เซตอันดับความสูง 1 ซึ่งกำหนดพีชคณิตอันดับพริมอลที่เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์

โดย

นางสาวมยุรี ห้าวสุด

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2547
ISBN 974-464-613-6

ORDERED SETS OF HEIGHT 1 WHOSE ORDER-PRIMAL ALGEBRA IS CONGRUENCE MODULAR

By

Mayuree Howsud

The Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2004

ISBN 974-464-613-6

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้วิทยานิพนธ์เรื่อง "เซตอันดับความสูง 1 ซึ่งกำหนดพีชคณิตอันดับพริมอลที่เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์" เสนอโดย นางสาวมยุรี ห้าวสุด เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

……....……………………………………

(รองศาสตราจารย์ ดร. จิราวรรณ คงคล้าย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.........เดือน..................พ.ศ................

ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

................../.................../...............

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

................../.................../...............

....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์)

................../.................../...............

K43511003 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คำสำคัญ : เซตอันดับความสูง 1/majority order/พีชคณิตอันดับพริมอล

มยุรี ห้าวสุด : เซตอันดับความสูง 1 ซึ่งกำหนดพีชคณิตอันดับพริมอลที่เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ (ORDERED SETS OF HEIGHT 1 WHOSE ORDER-PRIMAL ALGEBRA IS CONGRUENCE MODULAR) อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ : รศ. ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. 74 หน้า. ISBN 974-464-613-6

ผลงานวิจัยบางส่วนของ Baker และ Pixley ทำให้เราสรุปได้ว่า clone บนเซตจำกัด เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ถ้า clone นั้นประกอบด้วยฟังก์ชันชนิดพิเศษที่เรียกกันว่า near unanimity function J. Demetrovics และ L. Ronyai ได้พิสูจน์ว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับที่มีลักษณะเฉพาะซึ่งเรียกกันว่า fence และ crown เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด โดยการแสดงเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดของ clone นอกจากนี้ยังแสดงด้วยว่า clone ของ fence ประกอบด้วย majority function แต่ใน clone ของ crown ไม่มีฟังก์ชันใดเป็น near unanimity function

ในวิทยานิพนธ์นี้เรานิยามเซตอันดับความสูง 1 ให้เป็นภาคยืดขยายลักษณะหนึ่งของ fences และ crowns และศึกษาสมบัติยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับความสูง 1 เพื่อนำมาใช้ในการแสดงเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดของ majority order ความสูง 1 เราจำแนก majority order ความสูง 1 ทั้งหมดโดยใช้แผนภาพของ crowns นอกจากนี้เรายังแสดง majority operation หนึ่งบนเซตอันดับ $\overline{P} = (P; \leq)$ ซึ่งเป็น majority order ความสูง 1 และแสดงว่าเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดเซตหนึ่งสำหรับ Pol($\leq$) คือเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับทั้งหมด

สุดท้ายเรานิยามความสัมพันธ์กลาง ρ ซึ่ง clone ทางเดียวของ majority order ความสูง 1 เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ประกอบด้วย operations ทั้งหลายที่ยืนยง ρ

ภาควิชาคณิตศาสตร์	บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร	ปีการศึกษา 2547

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์..

K43511003 : MAJOR : MATHEMATICS

KEY WORD : ORDERED SETS OF HEIGHT 1/MAJORITY ORDER/ORDER-PRIMAL ALGEBRA

MAYUREE HOWSUD : ORDERED SETS OF HEIGHT 1 WHOSE ORDER-PRIMAL ALGEBRA IS CONGRUENCE MODULAR. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. CHAWEEWAN RATANAPRASERT, Ph.D. 74 pp. ISBN 974-464-613-6

Some results published by Baker and Pixley implies that a clone containing a near unanimity function is finitely generated. J. Demetrovics and L. Ronyai showed a finite generating set of the monotone clones of fences and crowns and they proved that clones of all fences contain a majority function while the case of crowns is particularly interesting because they admit no order-preserving near unanimity function.

In the thesis, we define a certain ordered sets known as ordered sets of height 1 to be a generalization of fences and crowns. We study the property of ordered set of height 1; the preservation of the distance function, which is useful in showing finite generating set of majority order of height 1. We characterize all majority orders of height 1 in terms of the diagram of crowns. We define an explicit majority operation on an ordered set $\overline{P} = (P;\leq)$ which is majority order of height 1 and present an explicit finite generating set of Pol($\leq$), the set of all binary order-preserving functions.

Besides, we define a central relation ρ such that the monotone clone of a majority order of height 1 is a subclone of the maximal clone consisting of those operations preserving ρ.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2004

Student's signature……………………………………….

Thesis Advisor's signature………………………………………….

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เพราะความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางวิชาการของผู้วิจัยกว้างขวางขึ้น ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่างๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา พร้อมทั้งหยิบยื่นโอกาสทางการศึกษา และเป็นกำลังใจให้จนทำให้ลูกศิษย์คนนี้พบความสำเร็จ

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ วารี เกรอต และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์ ประธานกรรมการ และกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำ

ขอขอบคุณ เพื่อนๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับกำลังใจ น้ำใจ ความช่วยเหลือต่างๆ และความจริงใจที่มีให้กันเสมอมา

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ พี่ และน้อง ที่มอบความรัก การดูแล และสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ลูกมีความสำเร็จในวันนี้

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ให้ A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่างและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียกฟังก์ชัน $f: A^n \to A$ ว่า n-ary operation บน A เราใช้สัญลักษณ์ $O_n(A)$ แทนเซตของ n-ary operations ทั้งหมดบน A และให้ $O(A) := \bigcup_{n>0} O_n(A)$ เป็นเซตของ operations ทั้งหมดบน A เราเรียก n-ary operation f บน A ว่า i-th projection map ถ้ามี $i \in \{1,...,n\}$ ซึ่ง $f(x_1,...,x_n) = x_i$ สำหรับทุก ๆ $(x_1,...,x_n) \in A^n$

ให้ $\phi \neq C \subseteq O(A)$ เรากล่าวว่า C มีสมบัติปิดภายใต้ฟังก์ชันผลประกอบ(composition) ถ้าทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k และ n ซึ่ง $f_1, f_2,...,f_n$ เป็น k-ary operations ใน C และ g เป็น n-ary operation ใน C จะได้ว่า $g(f_1,...,f_n) \in C$ โดยที่ $g(f_1,...,f_n)(a_1,...,a_k) = g(f_1(a_1,...,a_k),...,f_n(a_1,...,a_k))$ สำหรับทุก ๆ $(a_1,\ldots,a_k) \in A^k$ และกล่าวว่า C เป็น clone บน A ถ้า C ประกอบด้วย projection maps ทั้งหมดบน A และมีสมบัติปิดภายใต้ฟังก์ชันผลประกอบ เราใช้สัญลักษณ์ L(A) แทนเซตของ clones ทั้งหมดบน A

ให้ P เป็นเซตและ $\leq \subseteq P \times P$ เป็นความสัมพันธ์ทวินามบน P เราเรียก $\leq$ ว่าอันดับ (order) บน P ถ้า $\leq$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน(reflexive) ปฏิสมมาตร(anti-symmetric)และถ่ายทอด(transitive) และเรียกโครงสร้าง $\overline{P} = (P; \leq)$ ว่าเซตอันดับ(ordered set) โดยเขียน $x \leq y$ แทน $(x, y) \in \leq$ สำหรับทุก ๆ x, y ใน P

ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกในเซตอันดับ $\overline{P} = (P; \leq)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด(least upper bound) และขอบเขตล่างค่ามากสุด(greatest lower bound) เราจะเรียก $\overline{P} = (P; \leq)$ ว่าแลตทิซ และเรียกแลตทิซ $\overline{P}$ ว่าแลตทิซบริบูรณ์ถ้าทุก ๆ สับเซตของ P มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดใน P

สังเกตว่าโครงสร้าง $(L(A); \subseteq)$ เป็นแลตทิซบริบูรณ์ และถ้า $H \subseteq O(A)$ เราใช้สัญลักษณ์ [H] แทน clone เล็กสุดบน A ที่มี H เป็นสับเซตและเรียกว่า clone ก่อกำเนิดโดย H และถ้า H เป็นเซตจำกัด เราจะกล่าวว่า C = [H] เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด

ให้ $\rho \subseteq A^n$ เป็น n-ary relation บน A และ $f \in O_k(A)$ เป็น k-ary operation บน A เรากล่าวว่า f ยืนยง ρ ถ้า $(f(x_{11},...,x_{k1}), f(x_{12},...,x_{k2}),...,f(x_{1n},...,x_{kn})) \in \rho$ สำหรับทุก ๆ $(x_{i1},...,x_{in}) \in \rho$ เมื่อ $i = 1,...,k$ เราใช้สัญลักษณ์ $Pol(\rho) := \{f \in O(A) \mid f$ ยืนยง $\rho\}$ แทนเซตของ operations f ทั้งหมดบน A ซึ่ง f ยืนยง ρ แล้วเห็นได้ชัดว่า $Pol(\rho)$ เป็น clone บน A

ใน [12] I.G. Rosenberg ได้จำแนก clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม(maximal clone)บนแต่ละเซตจำกัด A โดยกล่าวว่า clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน A คือ clone ของ operations ทั้งหมดที่ยืนยงความสัมพันธ์ใดความสัมพันธ์หนึ่งใน class ของความสัมพันธ์บน A 6 classes ต่อไปนี้

Class 1: class ของความสัมพันธ์ทวินามที่เป็นอันดับ $\rho \subset A \times A$ ซึ่งมี $0,1 \in A$ ที่ทำให้ $(0,x) \in \rho$ และ $(x,1) \in \rho$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

Class 2: class ของความสัมพันธ์สมมูลที่ไม่ใช่ ความสัมพันธ์ทั้งหมด $A \times A$ และไม่ใช่ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ $\omega = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Class 3: class ของความสัมพันธ์ ρ ซึ่งเป็นกราฟของ prime permutation α บน A นั่นคือความสัมพันธ์ในรูป $\rho := \{(a,\alpha(a)) \mid a \in A\}$ เมื่อ α เป็น prime permutation

เราเรียกวิธีเรียงสับเปลี่ยน(permutation) α บน A ว่า *prime permutation* ถ้า α เป็นผลคูณของวัฏจักรต่างสมาชิกโดยที่ทุก ๆ วัฏจักรมีความยาวเป็นจำนวนเฉพาะจำนวนเดียวกัน

Class 4: class ของความสัมพันธ์ prime affine

เรียก $\rho \subseteq A^4$ ว่า *affine* ถ้า $(a,b,c,d) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ มีกลุ่มสลับที่การบวก $(A;+)$ ซึ่ง $a+b = c+d$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c,d \in A$ และถ้า $(A;+)$ เป็นกลุ่มซึ่งมีอันดับเป็นกำลังของจำนวนเฉพาะเราจะเรียก ρ ว่า *prime affine*

Class 5: class ของความสัมพันธ์ k-regularly generated สำหรับจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $3 \le k \le |A|$

ถ้า $3 \le k \le |A|$ จะกล่าวว่าเซต $T = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}$ ของความสัมพันธ์สมมูลบน A โดยที่ $m \ge 1$ เป็น *k-regular* ถ้าเซตของเซตสมมูลของแต่ละ θ_i $(1 \le i \le m)$ ประกอบด้วย k เซตเท่า ๆ กันและ $\bigcap_{i=1}^{m} \varepsilon_i \ne \phi$ เมื่อ ε_i เป็นเซตสมมูลของ θ_i สำหรับ $1 \le i \le m$

$\rho = \{(a_1,...,a_k) \mid a_i \in A \text{ for all } i = 1,..,k\}$ เป็น *k-regularly generated* โดย T ถ้าแต่ละ $(a_1,...a_k) \in \rho$ จะมี $1 \le s \ne t \le k$ และ $1 \le i \le m$ ซึ่ง $(a_s, a_t) \in \theta_i$

Class 6: class ของความสัมพันธ์กลาง(central relation)

ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียก $\rho \subseteq A^k$ ว่า *totally reflexive* ถ้า $\{(a_1,\ldots,a_k) \mid$ มี $i \neq j$ ซึ่ง $a_i = a_j\} \subseteq \rho$ และเป็น *totally symmetric* ถ้าสำหรับทุก ๆ วิธีเรียงสับเปลี่ยน α บน $\{1,\ldots,k\}$ จะได้ $(a_1,\ldots,a_k) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ $(a_{\alpha(1)},\ldots,a_{\alpha(k)}) \in \rho$ และจะกล่าวว่า $B \subseteq A$ เป็น *center* ของ ρ ถ้าแต่ละ $a \in B$ จะได้ว่า $(a,a_2,\ldots,a_k) \in \rho$ สำหรับทุก ๆ $a_2,\ldots,a_k \in A$

เรากล่าวว่า ρ เป็น*ความสัมพันธ์กลาง*ถ้า ρ เป็น totally reflexive และ totally symmetric โดยมี $\phi \neq B \subset A$ เป็น center ของ ρ

ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียกฟังก์ชัน $f : P^n \to P$ ว่าฟังก์ชันยืนยงอันดับ(order-preserving) ถ้า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เมื่อใดก็ตามที่ $x_i \leq y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ใน P สำหรับทุก ๆ $x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n \in P$ เราจะเรียก Pol($\leq$) ของฟังก์ชันยืนยงอันดับทั้งหมดบน P ว่า clone ทางเดียว (monotone clone)

สำหรับ $n \geq 3$ เราเรียก $\eta : A^n \to A$ ว่า near unanimity functions ถ้า

$$\eta(b,a,a,\ldots,a) = \eta(a,b,a,\ldots,a) = \Lambda = \eta(a,a,a,\ldots,b) = a$$

สำหรับทุก ๆ $a, b \in A$ และในกรณีที่ $n = 3$ เราเรียก η ว่า majority function

ผลงานวิจัยบางส่วนของ Baker และ Pixley ใน [1] ทำให้เราสรุปได้ว่า clone บนเซตจำกัดเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดถ้า clone นั้นประกอบด้วย near unanimity functions

ใน [6] J. Demetrovics และ L. Ronyai ได้พิสูจน์ว่า clone ทางเดียวของ fence และ crown เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยแสดงการสร้างเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดของ clone นอกจากนี้ยังแสดงด้วยว่า clone ทางเดียวของ fence ประกอบด้วย majority function แต่ใน clone ของ crown ถึงแม้จะเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดแต่ก็ไม่มีฟังก์ชันใดใน clone เป็น near unanimity function จึงได้มีการตั้งคำถามสำหรับเซตอันดับทั่วไปไว้ว่า

1. เมื่อใดที่วาไรตีซึ่งก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอลจะเป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง
2. clone ทางเดียวใดบ้างที่ประกอบด้วย near unanimity function
3. clone ทางเดียวใดบ้างที่เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด
4. clone ทางเดียวของ unbounded order จะเป็น subclone ของ cloneใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มซึ่งยืนยงความสัมพันธ์ของ classใดใน 6 classes

ให้ A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $F^{\overline{A}}$ เป็นเซตของ operations ที่นิยามบน A เราเรียกโครงสร้าง $\overline{A} = (A ; F^{\overline{A}})$ ว่า พีชคณิต(algebra) โดยเรียก A ว่า เอกภพ และเรียกแต่ละสมาชิกของ $F^{\overline{A}}$ ว่า fundamental operation ของ $\overline{A}$

ในบทที่ 2 ได้รวบรวมบทนิยามและกล่าวทฤษฎีบทสำคัญในมโนคติของเซตอันดับ พีชคณิตเอกภพและทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งเกี่ยวข้องและเป็นพื้นฐานของการศึกษาวิทยานิพนธ์นี้

ในบทที่ 3 ได้ศึกษาและแสดงผลงานวิจัยที่เป็นความสำคัญและเป็นที่มาของปัญหาการวิจัยของวิทยานิพนธ์นี้ ได้แก่ใน [3] B.A. Davey ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรูปลักษณ์ของแผนภาพของเซตอันดับ $\overline{P} = (P ; \leq)$ กับสมบัติของวาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตทางเดียว $\overline{A} = (P ; (f_i^{\overline{P}})_{i \in I})$ ซึ่งสัมพัทธ์กับ $\overline{P}$ ตัวอย่างเช่น ถ้า วาไรตี $V(\overline{A})$ เป็น k-permutable แล้ว $\overline{P}$ เป็นปฏิโซ่ หรือ ถ้า $\overline{P}$ เป็น up-directed และ down-directed และ $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์แล้ว $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจงเป็นต้น นอกจากนี้ท่านยังให้เงื่อนไขจำเป็นสำหรับเซตอันดับ $\overline{P}$ ที่จะทำให้วาไรตี $V(\overline{A})$ ที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับ $\overline{P}$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์

ใน [7] Z. Furedi และ I.G. Rosenberg ได้ศึกษา clone ทางเดียวของเซตอันดับซึ่งประกอบด้วย majority functions โดยให้ชื่อเซตอันดับที่มีสมบัตินี้ว่า majority orders ท่านได้ให้เงื่อนไขจำเป็นสำหรับการเป็น majority orders

ใน [6] J. Demetrovics และ L. Ronyai ได้พิสูจน์ว่า clone ทางเดียวของกลุ่มของเซตอันดับที่มีชื่อเรียกว่า fence และ crown เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยแสดงเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดของ clone นอกจากนี้ยังแสดงด้วยว่า clone ทางเดียวของ fence ประกอบด้วย majority function แต่ใน clone ของ crown มีลักษณะพิเศษกล่าวคือไม่มีฟังก์ชันใดเป็น near unanimity function

ใน [10] C. Ratanaprasert ได้นิยามกลุ่มของเซตอันดับที่เป็นภาคยืดขยายแบบหนึ่งของ fences โดยให้ชื่อเรียกว่า string และ string of lattices และได้แสดงว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยแสดงว่ามี majority function เป็นสมาชิกของ clone และได้แสดงการสร้างเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันทวินามทั้งหมดสำหรับ clone ของ string โดยใช้สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของ string

ในบทที่ 4 เราให้นิยามเซตอันดับความสูง 1 ซึ่งเป็นภาคยืดขยายอีกลักษณะหนึ่งของ fence และ crown เราจำแนกเซตอันดับความสูง 1 ทั้งหมดที่เป็น majority orders และศึกษาสมบัติของ clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้โดยในหัวข้อ 4.1เราสร้าง majority function สำหรับ clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ซึ่งทำให้ได้ว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด และแสดงความสัมพันธ์ของรูปลักษณ์ของแผนภาพของเซตอันดับความสูง 1 กับความเป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจงของวาไรตี $V(\overline{A})$ ที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ ในหัวข้อ 4.2 เราศึกษาสมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับความสูง 1 เพื่อนำไปเป็นเครื่องมือสร้างเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดเซตหนึ่งสำหรับ clone ทางเดียวของ majority order ความสูง 1 ในหัวข้อ 4.3 และในหัวข้อ 4.4 เราได้นิยามความสัมพันธ์กลาง ρ ซึ่ง clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ประกอบด้วย operations ทั้งหลายที่ยืนยง ρ เป็น superset ของ clone ทางเดียวของ majority order ความสูง 1

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทในมโนคติของเซตอันดับ พีชคณิตเอกภพ และทฤษฎีกราฟเบื้องต้นเพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรื่องราวในบทต่อ ๆ ไป

2.1 บทนิยามและทฤษฎีบทของเซตอันดับ

ในหัวข้อนี้เราจะให้บทนิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้นของเซตอันดับ และแลตทิซ ซึ่งผู้วิจัยศึกษาจาก [4]

บทนิยาม 2.1.1 ให้ P เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และให้ $\leq \subseteq P \times P$ เป็นความสัมพันธ์ทวินาม (binary relation) บน P เรากล่าวว่า $\leq$ เป็น*อันดับ* (*order*) บน P ถ้า $\leq$ สอดคล้องสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. สมบัติสะท้อน (reflexive) นั่นคือ $x \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$
2. สมบัติปฏิสมมาตร (anti-symmetric) นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$
3. สมบัติถ่ายทอด (transitive) นั่นคือสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in P$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$

ถ้า $\leq$ เป็นอันดับบน P เราเรียกโครงสร้าง $\overline{P} = (P; \leq)$ ว่า*เซตอันดับ* (*ordered set*) โดยจะเขียนแทน $(x, y) \in \leq$ ด้วยสัญลักษณ์ $x \leq y$ และถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ เป็นเท็จทั้งคู่ เรากล่าวว่า x และ y เปรียบเทียบกันไม่ได้(non- comparable) โดยจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \| y$

บทนิยาม 2.1.2 เราจะเรียกเซตอันดับ $\overline{P}$ ว่า *โซ่* (*chain*) หรือ *เซตอันดับเชิงเส้น*(*linearly ordered set*) ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกใน P เปรียบเทียบกันได้ (comparable) นั่นคือ $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ และถ้าไม่มีสมาชิกคู่ใดเลยใน P ซึ่งเปรียบเทียบกันได้ เราจะเรียก $\overline{P}$ ว่า *ปฏิโซ่*(*antichain*) นั่นคือ ถ้า $x, y \in P$ และ $x \leq y$ แล้ว $x = y$

ถ้า $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราจะใช้สัญลักษณ์ $|P|$ แทนจำนวนสมาชิกในเซต P

บทนิยาม 2.1.3 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ $x, y \in P$ ถ้า

1. $x < y$ และ
2. สำหรับทุก ๆ $z \in P$ ซึ่ง $x \leq z \leq y$ แล้ว $y = z$ หรือ $z = x$

เราจะกล่าวว่า x *ถูกปกคลุมโดย* (*is covered by*) y หรือ y *ปกคลุม*(*cover*) x และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \,\pi\, y$ หรือ $y \,\phi\, x$

ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับโดยที่ P เป็นเซตจำกัด เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับจำกัด (finite ordered set) และในกรณีของเซตอันดับจำกัด เราสามารถสร้างแผนภาพของ $\overline{P}$ ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. แทนแต่ละสมาชิกของ P ด้วยวงกลม " $\circ$ " ในระนาบ
2. ถ้า $x \leq y$ ใน P เราจะวางวงกลมเล็กของ x ให้อยู่ในตำแหน่งต่ำกว่าวงกลมเล็กของ y
3. ลากเส้นตรง 1 เส้นจากวงกลมเล็กของ x ไปยังวงกลมเล็กของ y ถ้า $x \,\pi\, y$ และถ้า $x \,\pi\, y$ และ $z \in P$ โดยที่ $z \neq x$ และ $z \neq y$ แล้วจะต้องไม่มีวงกลมเล็กของ z อยู่บนเส้นตรงที่เชื่อมโยงวงกลมเล็กของ x และวงกลมเล็กของ y

ในกรณีของเซตอันดับจำกัด เราสามารถใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์อธิบายได้ไม่ยากว่าเรากระทำข้อ 3 ได้เสมอและภาพที่เกิดขึ้นจากขั้นตอนทั้ง 3 ข้อดังกล่าวเราเรียกว่า แผนภาพ (diagram)ของเซตอันดับ

บทนิยาม 2.1.4 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ และ $\overline{Q} = (Q;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราจะเรียกฟังก์ชัน $f : P \to Q$ ว่า *ฟังก์ชันยืนยงอันดับ*(*order-preserving*) หรือ *ฟังก์ชันทางเดียว*(*monotone* หรือ *isotone*) ถ้า $x \leq y$ ใน $\overline{P}$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ ใน $\overline{Q}$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

ข้อสังเกต 2.1.1 ถ้า $\overline{P}$, $\overline{Q}$ และ $\overline{R}$ เป็นเซตอันดับและ $f : P \to Q$ และ $g : Q \to R$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแล้ว*ฟังก์ชันผลประกอบ* (*composition function*) $g \circ f$ ซึ่งกำหนดโดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ข้อสังเกต 2.1.2 ให้ $\overline{P} = (P;\le)$ เป็นเซตอันดับและ $Q \subseteq P$ เราจะได้ว่า $\overline{Q}$ เป็นเซตอันดับด้วยอันดับของ $\overline{P}$ ซึ่งกำกัดลงบน Q นั่นคือ $x \le y$ ใน $\overline{Q}$ ก็ต่อเมื่อ $x \le y$ ใน $\overline{P}$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in Q$ ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่าอันดับของ $\overline{P}$ ชักนำ (induce) อันดับของ $\overline{Q}$ และเรียก $\overline{Q}$ ว่า *เซตอันดับย่อย* (*subordered set*) ของ $\overline{P}$ และขอให้สังเกตว่า ทุก ๆ สับเซตของ P ถูกชักนำเป็นเซตอันดับย่อยของ $\overline{P}$

บทนิยาม 2.1.5 ให้ $\overline{P} = (P;\le)$ เป็นเซตอันดับ และ $Q \subseteq P$

1. เราจะเรียก $a \in Q$ ว่า *สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม* (*maximal element*) ของ Q ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $a \le x \in Q$ แล้วจะต้องได้ว่า $a = x$

2. เราจะเรียก $a \in Q$ ว่า *สมาชิกใหญ่สุด* หรือ *มากสุด*(*maximum element* หรือ *greatest element*)ของ Q ถ้า $x \le a$ สำหรับทุก ๆ $x \in Q$

3. เราเรียก $b \in Q$ ว่า *สมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม* (*minimal element*) ของ Q ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $b \ge x \in Q$ แล้วจะต้องได้ว่า $b = x$

4. เราเรียก $b \in Q$ ว่า *สมาชิกเล็กสุด* หรือ *น้อยสุด* (*minimum element* หรือ *least element*)ของ Q ถ้า $x \ge b$ สำหรับทุก ๆ $x \in Q$

ให้ $\overline{P}$ และ $\overline{Q}$ เป็นเซตอันดับ เราสามารถสร้างเซตอันดับใหม่จาก $\overline{P}$ และ $\overline{Q}$ ได้ดังต่อไปนี้

1. ถ้า P และ Q เป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint set) นั่นคือเป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และนิยาม $\le$ บน $P \cup Q$ โดย

$$x \le y \iff \begin{cases} x, y \in P \text{ และ } x \le y \text{ ใน } \overline{P} \text{ หรือ} \\ x, y \in Q \text{ และ } x \le y \text{ ใน } \overline{Q} \end{cases}$$

แล้ว $\le$ เป็นอันดับ ซึ่งเราเรียกเซตอันดับ $(P \cup Q;\le)$ ว่า *ยูเนียนต่างสมาชิก* (*disjoint union*)และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{P} \dot{\cup} \overline{Q}$

2. ถ้านิยาม $\le$ บนผลคูณคาร์ทีเชียน $P \times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in P \times Q$ โดย

$$(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_1 < y_1 \text{ หรือ} \\ x_1 = y_1 \text{ และ } x_2 \le y_2 \end{cases}$$

แล้วเราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า $\le$ เป็นอันดับบน $P \times Q$ ซึ่งเรียกว่า *lexicographic order*

3. ถ้านิยาม $\le$ บนผลคูณคาร์ทีเซียน $P \times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in P \times Q$ โดย

$$(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ และ } y_1 \le y_2$$

แล้วเราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า $\le$ เป็นอันดับบน $P \times Q$ ซึ่งเรียกอันดับแบบนี้ว่า*อันดับผลคูณตรง*(*order-direct product*)

บทนิยาม 2.1.6 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับและ $S \subseteq P$ เราจะเรียกสมาชิก $x \in P$ ว่า*ขอบเขตบน* (*upper bound*) ของ S ถ้า $s \le x$ สำหรับทุก ๆ $s \in S$ และเราเรียกสมาชิก $x \in P$ ว่า*ขอบเขตล่าง* (*lower bound*) ของ S ถ้า $s \ge x$ สำหรับทุก ๆ $s \in S$ และเราใช้สัญลักษณ์

$$S^u := \{x \in P \mid (\forall s \in S)(s \le x)\} \text{ และ } S^\lambda := \{x \in P \mid (\forall s \in S)(s \ge x)\}$$

แทนเซตของขอบเขตบนทั้งหมดของ S และเซตของขอบเขตล่างทั้งหมดของ S ตามลำดับ และใช้สัญลักษณ์ $S^{u\lambda}$ แทน $(S^u)^\lambda$ และ $S^{\lambda u}$ แทน $(S^\lambda)^u$

บทนิยาม 2.1.7 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับและ $S \subseteq P$ เราจะเรียกสมาชิก $x \in P$ ว่า *ขอบเขตบนค่าน้อยสุด* (*least upper bound* หรือ *supremum*) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ lub(S) หรือ sup(S) ถ้า

1. x เป็นขอบเขตบนของ S และ
2. ถ้า y เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว $x \le y$

และเราเรียกสมาชิก $x \in P$ ว่า*ขอบเขตล่างค่ามากสุด* (*greatest lower bound* หรือ *infimum*) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ glb(S) หรือ inf(S) ถ้า

1. x เป็นขอบเขตล่างของ S และ
2. ถ้า y เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว $x \ge y$

สังเกตว่าขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของแต่ละสับเซต S ของ P ถ้ามีก็จะมีเพียงหนึ่งเดียวเราจึงใช้สัญลักษณ์ $\vee S$ แทน sup(S) และสัญลักษณ์ $\wedge S$ แทน inf(S) และสำหรับคู่ x, y ใน $\overline{P}$ เราจะเขียน $x \vee y$ แทน sup(x, y) และเขียน $x \wedge y$ แทน inf(x, y) โดยเรียกสัญลักษณ์ $\vee$ และ $\wedge$ ว่า join (หรือ disjunction) และ meet (หรือ conjunction) ตามลำดับ

บทนิยาม 2.1.8 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ

1. เราเรียก $\overline{P}$ ว่า *แลตทิซ* (*lattice*) ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกใน P มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดและมีขอบเขตล่างค่ามากสุด นั่นคือสำหรับทุกคู่ ๆ $x, y \in P$ จะมี $t, s \in P$ ซึ่ง $t = x \vee y$ และ $s = x \wedge y$

2. เราจะเรียก $\overline{P}$ ว่า *แลตทิซบริบูรณ์* (*complete lattice*) ถ้าทุก ๆ สับเซตของ P มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุด นั่นคือสำหรับทุก ๆ สับเซต S ของ P จะมี $u, v \in P$ ซึ่ง $u = \vee S$ และ $v = \wedge S$

สังเกตว่าถ้าเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นแลตทิซ เราจะได้ว่า $\vee : P^2 \to P$ และ $\wedge : P^2 \to P$ กำหนดโดย $\vee(x, y) = x \vee y$ และ $\wedge(x, y) = x \wedge y$ เป็น binary operations

บทแทรก 2.1.1 ทุกแลตทิซจำกัดเป็นแลตทิซบริบูรณ์

บทนิยาม 2.1.9 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น*กึ่งแลตทิซ*(*semilattice*) ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกใน P มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (หรือขอบเขตล่างค่ามากสุด)

บทนิยาม 2.1.10 ให้ $\overline{L} = (L;\leq)$ เป็นแลตทิซ

1. เรากล่าวว่า $\overline{L}$ เป็น*แลตทิซแจกแจง* (*distributive lattice*) ถ้า $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in L$

2. เรากล่าวว่า $\overline{L}$ เป็น*แลตทิซมอดูล่าร์* (*modular lattice*) ถ้า $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in L$

บทนิยาม 2.1.11 ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มบวกและนิยามอันดับ $\leq$ บน เซต $\{c_1,..,c_{2n}\}$ โดย

$$c_1 \leq c_2 \geq c_3 \leq ... \geq c_{2n-1} \leq c_{2n} \geq c_1$$

และไม่มีการเปรียบเทียบใด ๆ อีก เราจะเรียกเซตอันดับ $(\{c_1,...,c_{2n}\};\leq)$ ว่า *crown* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C_n

บทนิยาม 2.1.12 ให้ $n \geq 1$ และนิยามอันดับ $\leq$ บนเซต $F = \{a_1,\ldots,a_n\}$ โดย

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq \ldots \geq a_{n-1} \leq (\geq) a_n \ \text{(หรือ } a_1 \geq a_2 \leq a_3 \geq \ldots \leq a_{n-1} \geq (\leq) a_n \text{)}$$

และไม่มีการเปรียบเทียบใด ๆ อีก เราจะเรียกเซตอันดับ $(F;\leq)$ ว่า *down-fence* (หรือ *up-fence*)

และถ้าไม่มีการระบุว่า F เป็น up-fence หรือ down-fence อย่างใดอย่างหนึ่งเราจะเรียก F ว่า fence และใช้สัญลักษณ์ $|F|$ แทนจำนวนเส้นใน fence F

สังเกตว่าถ้า F เป็น fence แล้วแต่ละสมาชิกใน F จะเป็น สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มหรือเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม

บทนิยาม 2.1.13 เรากล่าวว่าเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็น*เซตอันดับแบบต่อเนื่อง* (*connected ordered set*) ถ้าสำหรับทุก ๆ $a, b \in P$ มีจำนวนเต็มบวก n และ $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b \in P$ ซึ่ง $a_0 \leq a_1 \geq a_2 \leq \ldots \geq a_n (\leq a_n) = b$ (หรือ $a_0 \geq a_1 \leq a_2 \geq \ldots \leq a_n (\geq a_n) = b$)

บทนิยาม 2.1.14 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับจำกัดแบบต่อเนื่อง และ $d : P^2 \to P$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $d(a,b) = \min\{|F| \mid F \text{ เป็น fence จาก } a \text{ ไป } b\}$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in P$ เราเรียก d ว่า *ฟังก์ชันระยะทาง*(*distance function*) บน P

ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับจำกัดแล้วจะมีจำนวนจริง $\sup\{d(a,b) \mid a,b \in P\}$ เสมอ ซึ่งเราเรียกว่า *reach* ของ $\overline{P}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $r(\overline{P})$

บทนิยาม 2.1.15 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ และ F เป็น fence ใน $\overline{P}$ เราจะเรียก F ว่า *maximal size fence* ใน $\overline{P}$ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $\overline{F}$ เป็น fence ใน $\overline{P}$ ซึ่ง $F \subseteq \overline{F}$ แล้ว $F = \overline{F}$

สังเกตว่าถ้า $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับจำกัด เราสามารถหา maximal size fence F ใน $\overline{P}$ ซึ่ง $|F| = r(\overline{P})$ ได้เสมอ

บทนิยาม 2.1.16 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับจำกัด และ F เป็น fence ใน $\overline{P}$ เราจะเรียก F ว่า *minimal size fence* ใน $\overline{P}$ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $\overline{F}$ เป็น fence ใน $\overline{P}$ ซึ่ง $\overline{F} \subseteq F$ แล้ว $F = \overline{F}$

บทนิยาม 2.1.17 ให้ $n > 2$ และ $\eta : A^n \to A$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$\eta(b,a,a,...,a) = \eta(a,b,a,...,a) = \Lambda = \eta(a,a,a,...,b) = a$$

สำหรับทุก ๆ $a, b \in A$ เราเรียก η ว่า *near unanimity functions*

สำหรับกรณีที่ $n = 3$ η จะถูกนิยามโดย

$$\eta(b,a,a,) = \eta(a,b,a,) = \eta(a,a,b) = a$$

สำหรับทุก ๆ $a, b \in A$ ซึ่งเราเรียกฟังก์ชันในกรณีนี้ว่า *majority function*

2.2 บทนิยามและทฤษฎีบทของพีชคณิตเอกภพ

ให้ A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ A^n หมายถึง ผลคูณ $A \times A \times ... \times A$ ทั้งหมด n ครั้ง n-ary operation f บน A คือฟังก์ชัน $f : A^n \to A$ โดยเรียก n ว่า *arity* ของ f ถ้า n = 1,2,3 จะมีชื่อเรียก f เฉพาะว่า *unary operation* , *binary operation* และ *ternary operation* ตามลำดับ เราใช้สัญลักษณ์ $O_n(A)$ แทนเซตของ n-ary operation ทั้งหมดบน A และใช้สัญลักษณ์ $O(A) = \bigcup_{n>0} O_n(A)$ แทนเซตของ operations ทั้งหมดบน A

ตัวอย่างของ n-ary operation เช่น projection $e_i^{n,A}$ บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A ซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละตำแหน่ง i = 1,2,…,n และแต่ละสมาชิก $(x_1, x_2 ..., x_n) \in A^n$ โดย $e_i^{n,\overline{A}}(x_1, x_2,..., x_n) = x_i$

บทนิยาม 2.2.1 เราเรียกโครงสร้าง $\overline{A} = (A; F^{\overline{A}})$ ที่ประกอบด้วยเซต A และเซต $F^{\overline{A}}$ ของ operation บน A ว่า*พีชคณิตไม่ดรรชนี* (*nonindex algebra*)

เราอาจพิจารณา $F^{\overline{A}}$ เป็นเซตดรรชนี $(f_i^{\overline{A}})_{i \in I}$ ซึ่งกำหนดด้วยการส่งแต่ละสมาชิกของเซตดรรชนี I ไปยัง $n_i -$ ary operation $f_i^{\overline{A}}$ บน A แล้วเราเรียกโครงสร้าง $\overline{A} = (A; (f_i^{\overline{A}})_{i \in I})$ ว่า *พีชคณิตดรรชนี* (*index algebra*)

เราเรียกเซต A ของพีชคณิต $\overline{A}$ ว่าเอกภพ (*carrier* หรือ *universe*) และเรียก $F^{\overline{A}}$ หรือ $(f_i^{\overline{A}})_{i \in I}$ ว่าเซตของ *fundamental operation* ของ $\overline{A}$

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงเฉพาะพีชคณิตดรรชนีเท่านั้น

สังเกตว่าสำหรับแต่ละ $i \in I$ เราสามารถจับคู่ i กับจำนวนเต็มบวก n_i ซึ่งเป็น arity ของ operation $f_i^{\overline{A}}$ ได้เสมอดังนั้นแต่ละพีชคณิตดรรชนี $\overline{A} = (A;(f_i^{\overline{A}})_{i\in I})$ เราจะมีลำดับ $\tau = (n_i)_{i\in I}$ ของ arity ของ operation $(f_i^{\overline{A}})_{i\in I}$ อยู่ลำดับหนึ่งและเพียงลำดับเดียวเสมอ เราเรียกลำดับ τ นี้ว่า *แบบ* (*type*) ของ $\overline{A}$ และใช้สัญลักษณ์ $A\lg(\tau)$ แทน class ของพีชคณิตแบบ τ ทั้งหมด

บทนิยาม 2.2.2 ให้ $\overline{A} = (A;(f_i^{\overline{A}})_{i\in I})$ เป็นพีชคณิตแบบ τ และ $\overline{B}$ เป็นพีชคณิต เราเรียก $\overline{B}$ ว่า *พีชคณิตย่อย (subalgebra)* ของ $\overline{A}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ ถ้า $\overline{B}$ สอดคล้องเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้

1. $\overline{B} = (B;(f_i^{\overline{B}})_{i\in I})$ เป็นพีชคณิตแบบ τ
2. $B \subseteq A$

และ 3. $(\forall i \in I)(f_i^{\overline{A}} \subseteq f_i^{\overline{B}})$

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $C \subseteq O(A)$ เรากล่าวว่า C เป็น *clone* ถ้า C มีสมบัติปิดภายใต้ฟังก์ชันผลประกอบ และ C ประกอบด้วย projection map บน A สำหรับทุก ๆ arity n และทุก ๆ $1 \le i \le n$

ให้ $H \subseteq O(A)$ เราจะใช้สัญลักษณ์ $[H] = \bigcap\{\, H \subseteq C$ และ C เป็น clone บน $A\}$ แทน clone ที่เล็กสุดที่มี H เป็นสับเซตและจะเรียกว่า *clone ที่ก่อกำเนิดโดย* (*generated by*) H และจะกล่าวว่า clone C เป็น *clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด* (*finitely generated*) ถ้า $C = [H]$ โดยที่ H เป็นสับเซตจำกัดของ C

บทนิยาม 2.2.4 ให้ $\overline{P} = (P;\le)$ เป็นเซตอันดับและ m เป็นจำนวนเต็มบวกและให้ $f : P^m \to P$ เป็น operation เรากล่าวว่า f *ยืนยง* (*preserve*) $\le$ ถ้า $f(x_1, x_2, ,..., x_m) \le f(y_1, y_2,..., y_m)$ เมื่อใดก็ตามที่ $x_i \le y_i$ $(1 \le i \le m)$ ใน $\overline{P}$ สำหรับทุก ๆ $x_1,..., x_m, y_1,..., y_m \in P$

เรานิยาม $\mathrm{Pol}(\le) := \{\, f \in O(P) \mid f$ ยืนยง $\le\}$ แทนเซตของ operations ทั้งหมดบน P ที่ f ยืนยง $\le$ แล้วเราพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า $\mathrm{Pol}(\le)$ เป็น clone บน P ซึ่งเรียกว่า *clone ทางเดียว* (*monotone clone*)

บทนิยาม 2.2.5 ให้ $\theta \subseteq A \times A$ เป็นความสัมพันธ์ทวินามใน A เรากล่าวว่า θ เป็น*ความสัมพันธ์สมมูล* (*equivalence relation*) ถ้า θ สอดคล้องสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. สมบัติสะท้อน (reflexive) นั่นคือ $x \theta x$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$
2. สมบัติสมมาตร (symmetric) นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x, y \in A$ ถ้า $x \theta y$ แล้ว $y \theta x$
3. สมบัติถ่ายทอด(transitive) นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in A$ ถ้า $x \theta y$ และ $y \theta z$ แล้ว $x \theta z$

เราจะใช้สัญลักษณ์ Eq(A) แทนเซตของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบน A

บทนิยาม 2.2.6 ให้ A เป็นเซตและ $n \geq 1$ และให้ θ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A เราจะกล่าวว่า operation $f \in O_n(A)$ ยืนยง θ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $(a_1, b_1) \in \theta, \ldots, (a_n, b_n) \in \theta$ แล้วจะได้ว่า $(f(a_1, .., a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta$ สำหรับทุก ๆ $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$

บทนิยาม 2.2.7 ให้ $\overline{A} = (A; F^{\overline{A}})$ เป็นพีชคณิต เราเรียกความสัมพันธ์สมมูล θ บน A ว่า *คอนกรูเอนซ์* (*congruence*) ของ $\overline{A}$ ถ้า f ยืนยง θ สำหรับทุก ๆ fundamental operation f ของ $\overline{A}$ และเราใช้สัญลักษณ์ Con$\overline{A}$ แทนเซตของคอนกรูเอนซ์ทั้งหมดบน $\overline{A}$

สังเกตได้ว่า $(\mathrm{Con}\overline{A}; \subseteq)$ เป็นแลตทิซ

บทนิยาม 2.2.8 ให้ $\overline{A} = (A; (f_i^{\overline{A}})_{i \in I})$ และ $\overline{B} = (B; (f_i^{\overline{B}})_{i \in I})$ ต่างเป็นพีชคณิตแบบ τ เราเรียกฟังก์ชัน $h : A \to B$ ว่า*ฟังก์ชันถ่ายแบบ* (*homomorphism*) จาก $\overline{A}$ ไปยัง $\overline{B}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $h : \overline{A} \to \overline{B}$ ถ้า $h(f_i^{\overline{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i})) = h(f_i^{\overline{B}}(a_1, \ldots, a_{n_i}))$ สำหรับทุก ๆ $i \in I$ และ $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A$

ถ้าฟังก์ชันถ่ายแบบ $h : \overline{A} \to \overline{B}$ เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 correspondence หรือ bijection) เราจะเรียก h ว่า *ฟังก์ชันถอดแบบ* (*isomorphism*) จาก $\overline{A}$ ไปยัง $\overline{B}$ และถ้ามีฟังก์ชันถอดแบบจาก $\overline{A}$ ไปยัง $\overline{B}$ เรากล่าวว่า $\overline{A}$ ถอดแบบกับ (isomorphic to) $\overline{B}$ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{A} \cong \overline{B}$

บทนิยาม 2.2.9 ให้ $\overline{A}_1$ และ $\overline{A}_2$ ต่างเป็นพีชคณิตแบบ τ *พีชคณิตผลคูณตรง*(*direct product of algebra*) ของ $\overline{A}_1$ และ $\overline{A}_2$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{A_1 \times A_2}$ เป็นพีชคณิตแบบ τ ที่มีเอกภพคือผลคูณคาร์ทีเซียน $A_1 \times A_2$ และเซตของ fundamental operation ประกอบด้วย operation $f^{\overline{A_1 \times A_2}}$ บน $A_1 \times A_2$ ซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละ $n \in \tau$ ดังนี้

$$f^{\overline{A_1 \times A_2}}((a_1, b_1),\ldots,(a_n, b_n)) = (f^{\overline{A}_1}(a_1,\ldots,a_n), f^{\overline{A}_2}(b_1,\ldots,b_n))$$

เมื่อ $a_j \in A_1$ และ $b_j \in A_2$ สำหรับ $j = 1,\ldots,n$

ต่อไปขอขยายนิยามของผลคูณตรง $\overline{A_1 \times A_2}$ ไปสู่กรณีทั่วไป

บทนิยาม 2.2.10 ให้ $(\overline{A}_j)_{j\in J}$ เป็น class ของพีชคณิตแบบ τ *ผลคูณตรง*(*direct product*)ของ $(\overline{A}_j)_{j\in J}$ เป็นพีชคณิตที่มีเอกภพคือผลคูณคาร์ทีเซียน $P := \prod_{j\in J} A_j = \{(x_j)_{j\in J} \mid (\forall j \in J)(x_j \in A_j)\}$ และสำหรับทุกๆ สัญลักษณ์ f_i ของ n_i-ary operation ในแต่ละพีชคณิต $\overline{A}_j$ เรานิยาม n_i-ary operation f_i^P บน P โดย

$$(f_i^P(\underline{a_1},\ldots,\underline{a_{n_i}}))(j) := f_j^{A_j}((\underline{a_1})(j),\ldots,(\underline{a_{n_i}})(j))$$

สำหรับทุก ๆ $\underline{a_1},\ldots,\underline{a_{n_i}} \in P$ นั่นคือ $f_i^P((a_{1j})_{j\in J},\ldots,(a_{n_ij})_{j\in J}) := (f_i^{A_j}(a_{1j},\ldots,a_{n_ij}))_{j\in J}$ เมื่อ $\underline{a_k} = (a_{kj})_{j\in J}$ และ $k = 1,\ldots,n_i$

ถ้า $J = \{1,\ldots,m\}$ เราใช้สัญลักษณ์ $\overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_m$ แทนพีชคณิตผลคูณตรง

บทนิยาม 2.2.11 ให้ A และ B เป็นเซตโดยที่ $\phi \neq B \subseteq A$ เราเรียก $\alpha : B \to A$ ว่า*การฝัง* (*embedding*) ถ้า $\alpha(b) = b$ ทุก ๆ $b \in B$

บทนิยาม 2.2.12 ให้ $(\overline{A}_j)_{j\in J}$ เป็น class ของพีชคณิตแบบ τ และ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตแบบ τ เรากล่าวว่า $\overline{A}$ เป็น*ผลคูณย่อย* (*subdirect product*) ของ $(\overline{A}_j)_{j\in J}$ ถ้า

1. $\overline{A} \subseteq \prod_{j\in J} \overline{A}_j$ และ
2. $\pi_i(\overline{A}) = \overline{A}_j$ สำหรับแต่ละ $j \in J$

และเราเรียกการฝัง $\alpha : \overline{A} \rightarrow \prod_{j \in J} \overline{A}_j$ ว่า*การฝังผลคูณย่อย* (*subdirect embedding*) ถ้า $\alpha(\overline{A})$ เป็นผลคูณย่อยของ $(\overline{A}_j)_{j \in J}$

บทนิยาม 2.2.13 เราเรียกพีชคณิต $\overline{A}$ แบบ τ ว่า *subdirectly irreducible algebra* ถ้าทุก ๆ class $(\overline{A}_j)_{j \in J}$ ของพีชคณิตแบบ τ ซึ่ง $\overline{A}$ เป็นผลคูณย่อยของ $(\overline{A}_j)_{j \in J}$ และทุกการฝังผลคูณย่อย $\alpha : \overline{A} \rightarrow \prod_{j \in J} \overline{A}_j$ จะมี $j \in J$ ซึ่ง $\pi_i\, o \alpha : \overline{A} \rightarrow \overline{A}_j$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบ

บทนิยาม 2.2.14 เราเรียกพีชคณิต $\overline{A}$ ว่า *คอนกรูเอนซ์แจกแจง*(*congruence distributive*) ถ้า $\mathrm{Con}\overline{A}$ เป็นแลตทิซแจกแจง และเรียกพีชคณิต $\overline{A}$ ว่า *คอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์*(*congruence modular*) ถ้า $\mathrm{Con}\overline{A}$ เป็นแลตทิซมอดูล่าร์

บทนิยาม 2.2.15 ให้ $\overline{A} = (A; F^{\overline{A}})$ เป็นพีชคณิตและ $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\overline{A}$ เรากล่าวว่า θ_1 และ θ_2 *สับเปลี่ยนกันได้* (*permutable*) ถ้า $\theta_1\, o\theta_2 = \theta_2\, o\theta_1$

เราเรียกพีชคณิต $\overline{A}$ ว่า *คอนกรูเอนซ์สับเปลี่ยน* (*congruence permutable*) ถ้าทุก ๆ คู่คอนกรูเอนซ์ของ $\overline{A}$ สับเปลี่ยนกันได้

บทนิยาม 2.2.16 ให้ $k \geq 2$ และ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิต เรากล่าวว่า $\theta, \psi \in \mathrm{Con}\overline{A}$ เป็น *k-permutable* ถ้า $\theta \cup \psi = \theta_1\, o\Lambda\ o\theta_k$ โดยที่ $\theta_i = \begin{cases} \theta & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \psi & \text{ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

และจะกล่าวว่าพีชคณิต $\overline{A}$ เป็น k-permutable ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกใน $\mathrm{Con}\overline{A}$ เป็น k-permutable และกล่าวว่าวาไรตี V เป็น k-permutable ถ้าทุก ๆ พีชคณิตในวาไรตีเป็น k-permutable

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า $\overline{A} = (A; F^{\overline{A}})$ เป็นคอนกรูเอนซ์สับเปลี่ยนแล้ว $\overline{A}$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์

บทนิยาม 2.2.17 ให้ K เป็น class ของพีชคณิตแบบ τ เรานิยาม class ของพีชคณิตที่สร้างจาก K ดังต่อไปนี้

$$I(K) = \{\overline{A} \mid (\exists \overline{B} \in K)(\overline{A} \cong \overline{B})\}$$

$$S(K) = \{\overline{A} \mid (\exists \overline{B} \in K)(\overline{A} \subseteq \overline{B})\}$$

$$H(K) = \{\overline{A} \mid (\exists \overline{B} \in K)(\exists C \in Alg(\tau))(h : \overline{B} \to \overline{C})(\overline{A} = h(\overline{B}))\}$$
$$P(K) = \{\overline{A} \mid (\exists i \in I)(\{\overline{A}_i\}_{i\in I} \neq \phi)(\overline{A} \cong \prod_{i\in I} \overline{A}_i)\}$$

สังเกตว่า I, S, H, P เป็นการส่ง (mapping) ซึ่งส่ง class ของพีชคณิตแบบ τ ไปเป็น class ของพีชคณิตแบบ τ เราจึงเรียก I, S, H, P ว่า class operator

บทนิยาม 2.2.18 เรากล่าวว่า class ของพีชคณิต K แบบ τ มีสมบัติปิดภายใต้ class operator O ถ้า $O(K) \subseteq K$

บทนิยาม 2.2.19 เราเรียก class K ของพีชคณิตแบบ τ ว่า *วาไรตี* (*variety*) แบบ τ ถ้า K มีสมบัติปิดภายใต้ class operator S, H และ P

สังเกตว่าอินเตอร์เซกชันใด ๆ ของ class ของวาไรตีแบบ τ ยังคงเป็น วาไรตีแบบ τ [นั่นคือถ้า $(K_i)_{i\in I}$ เป็น class ของวาไรตีแบบ τ แล้ว $\cap(K_i)_{i\in I}$ เป็นวาไรตีแบบ τ] และ $Alg(\tau)$ ของพีชคณิตแบบ τ ทั้งหมดก็เป็นวาไรตีแบบ τ เราจึงกล่าวได้ว่าถ้า K เป็น class ของพีชคณิตแบบ τ แล้วจะมีวาไรตีแบบ τ ที่เล็กสุดซึ่งมี K เป็น subclass

บทนิยาม 2.2.20 ให้ $K \neq \phi$ เป็น class ของพีชคณิตแบบ τ เราใช้สัญลักษณ์ V(K) แทนวาไรตีแบบ τ เล็กสุดซึ่งมี K เป็น subclass และเรียกว่า *วาไรตีก่อกำเนิดโดย* (*the variety generated by*) K และถ้า K ประกอบด้วยสมาชิก $\overline{A}$ เพียงหนึ่งเดียวเราจะเขียนแทน V(K) ด้วย $V(\overline{A})$ นั่นคือ

$$V(K) = \cap\{K' \mid K \subseteq K' \text{ และ } K' \text{ เป็นวาไรตีแบบ } \tau\}$$

และ
$$V(\overline{A}) = \cap\{K' \mid \overline{A} \in K' \text{ และ } K' \text{ เป็นวาไรตีแบบ } \tau\}$$

เรากล่าวว่าวาไรตี V ก่อกำเนิดแบบจำกัด ถ้ามี class ของพีชคณิต K ขนาดจำกัด ซึ่ง $V = V(K)$

บทนิยาม 2.2.21 ให้ $X := \{x_1, x_2, ...\}$ เป็น*เซตอนันต์นับได้*(*countably infinite set*)ของสมาชิกที่แตกต่างกัน(disjoint)ทั้งหมด โดยเราจะเรียกสมาชิกของ X ว่าตัวแปร (variable) และให้ $X_n := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นเซตของตัวแปร n ตัวแรก

ให้ $\{f_i \mid i \in I\}$ เป็นเซตดรรชนีซึ่งเป็นเซตต่างสมาชิกกับเซต X โดยจะเรียกแต่ละสมาชิก f_i ว่า *n_i-ary operation symbol* โดยที่ $n_i \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $\tau = (n_i)_{i\in I}$ เป็นลำดับของ arity ของสมาชิกใน $\{f_i \mid i \in I\}$ และจะเรียก τ ว่าแบบ(type) ของ $\{f_i \mid i \in I\}$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n เรานิยาม n-ary term แบบ τ เหนือ X_n โดยอุปนัยดังนี้

1. แต่ละตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น n-ary term
2. ถ้า $t_1,\ldots,t_m$ เป็น n-ary term และ f เป็น m-ary operation symbol แล้ว $p = f(t_1,\ldots,t_m)$ เป็น n-ary term

เราใช้สัญลักษณ์ $W_\tau(X_n)$ แทนเซตเล็กสุดที่มี $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นสมาชิกและมีสมบัติปิดภายใต้การประยุกต์ใช้จำนวนจำกัดครั้งของข้อ 2 ในบทนิยาม 2.2.21 [นั่นคือ $W_\tau(X_n)$ เป็นเซตเล็กสุดของ n-ary term แบบ τ] และให้ $W_\tau(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} W_\tau(X_n)$ เป็นเซตของ term แบบ τ เหนือ X ทั้งหมด

บทนิยาม 2.2.22 ให้ $\overline{A} = (A;(f_i^{\overline{A}})_{i\in I})$ เป็นพีชคณิตแบบ τ และสำหรับแต่ละ $t \in W_\tau(X_n)$ เรานิยามฟังก์ชัน $t^{\overline{A}} : A^n \to A$ ดังนี้

1. ถ้า $t = x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เรานิยาม $t^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = e_i^{n,\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a_i$ สำหรับทุก ๆ $a_1,\ldots,a_n \in A$ และ

2. ถ้า t อยู่ในรูป $f_i(t_1,\ldots,t_{n_i})$ เมื่อ $f_i \in \{f_i \mid i \in I\}$ และ $t_1,\ldots,t_{n_i}$ ต่างเป็น term ใน $W_\tau(X_n)$ ซึ่งได้นิยามฟังก์ชัน $t_1^{\overline{A}},\ldots,t_{n_i}^{\overline{A}}$ แล้ว เรากำหนด $t^{\overline{A}} := f_i^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}},\ldots,t_{n_i}^{\overline{A}})$ สำหรับทุก ๆ $a_1,\ldots,a_n \in A$ โดย

$$t^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = f_i^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,t_{n_i}^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n))$$

เราเรียก $t^{\overline{A}}$ ว่า *term operation* บน $\overline{A}$ และเราใช้สัญลักษณ์ $T(\overline{A})$ แทนเซตของ term operation ทั้งหมดบน $\overline{A}$

บทนิยาม 2.2.23 ให้ $\overline{A} = (P;F^{\overline{P}})$ เป็นพีชคณิตและ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียก $\overline{A}$ ว่า *พีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ* $\overline{P}$ (*order-primal algebra corresponding to* $\overline{P}$) ถ้า $T(\overline{A}) = Pol(\leq)$ นั่นคือเซตของ operations ทั้งหมดบน P ที่ยืนยงอันดับและ นั่นก็คือ clone ทางเดียวบน P

บทนิยาม 2.2.24 ให้ $\overline{A} = (A; F^{\overline{A}})$ และ $\overline{B} = (B; F^{\overline{B}})$ เป็นพีชคณิต เรากล่าวว่า $\overline{A}$ เป็น *term - equivalent* กับ $\overline{B}$ ถ้า $A = B$ และ $T(\overline{A}) = T(\overline{B})$

บทนิยาม 2.2.25 เรากล่าวว่าวาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง ถ้าทุกพีชคณิต $\overline{A}$ ในวาไรตี V จะได้ว่า Con$\overline{A}$ เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

บทนิยาม 2.2.26 เราเรียกคู่ของเทอม $(p,q) \in (W_\tau(X_n))^2$ สำหรับแต่ละ $n \geq 1$ ว่า *สมการ* (*equation*) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \approx q$ หรือ $p(x_1,...,x_n) \approx q(x_1,...,x_n)$

ให้ $\overline{A} = (P; F^{\overline{P}})$ เป็นพีชคณิต เรากล่าวว่า สมการ $p \approx q$ เป็น*เอกลักษณ์*(*identity*) ของ $\overline{A}$ โดยเขียนแทนความหมายนี้ด้วยสัญลักษณ์

$$\overline{A} \models p \approx q \quad \text{หรือ} \quad \overline{A} \models p(x_1,...,x_n) \approx q(x_1,...,x_n)$$

ถ้า term operation $p^{\overline{A}}$ และ $q^{\overline{A}}$ เป็น operation เดียวกันใน $\overline{A}$ นั่นคือ $p^{\overline{A}} = q^{\overline{A}}$ หรือ $p^{\overline{A}}(a_1,...,a_n) = q^{\overline{A}}(a_1,...,a_n)$ สำหรับทุก ๆ $a_1,...,a_n \in A$

และกล่าวว่าสมการ $p \approx q$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับ class ของพีชคณิต K แบบ τ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $K \models p \approx q$ ถ้า $\overline{A} \models p \approx q$ สำหรับทุก ๆ พีชคณิต $\overline{A} \in K$

ทฤษฎีบท 2.2.2 วาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็มบวก n และ 3-ary term operations $p_0,\ldots,p_n$ ซึ่งทำให้ V สอดคล้องเอกลักษณ์ ต่อไปนี้

$p_0(x,y,z) \approx x$

$p_i(x,y,x) \approx x$ สำหรับทุก ๆ $0 \leq i \leq n$

$p_i(x,x,y) \approx p_{i+1}(x,x,y)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่

$p_i(x,y,y) \approx p_{i+1}(x,y,y)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

$p_n(x,y,z) \approx z$

ทฤษฎีบท 2.2.3 วาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม $n \geq 1$ และ 3-ary term operations $d_0,\ldots,d_n$ และ p ซึ่งทำให้ V สอดคล้องเอกลักษณ์ต่อไปนี้

(G1) $d_0(x,y,z) \approx x$

(G2) $d_i(x,y,x) \approx x$ สำหรับทุก ๆ i

(G3) $d_i(x,x,y) \approx d_{i+1}(x,x,y)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่

(G4) $d_i(x,y,y) \approx d_{i+1}(x,y,y)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่

(G5) $d_n(x,y,y) \approx p(x,y,y)$

(G6) $p(x,x,y) \approx y$

ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n และ terms $d_0,\ldots,d_n$ และ p ซึ่งทำให้ (G1) – (G6)ของทฤษฎีบท 2.2.3 เป็นจริงในวาไรตี W จะกล่าวว่า W สอดคล้อง GM_n และกล่าวว่าเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ สอดคล้อง GM_n ถ้าวาไรตี $V(\overline{A})$ ที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับ $\overline{P} = (P;\leq)$ สอดคล้อง GM_n

ทฤษฎีบท 2.2.4 วาไรตี W เป็น k-permutable สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 2$ ก็ต่อเมื่อ มี 3-ary term operations $p_1,\ldots,p_{k-1}$ ซึ่ง W สอดคล้องเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$x \approx p_1(x,z,z),$$

$$p_i(x,x,z) \approx p_{i+1}(x,z,z) \text{ สำหรับทุก ๆ } i \text{ และ}$$

$$p_{k-1}(x,x,z) \approx z$$

2.3 บทนิยามเบื้องต้นของกราฟ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามที่เป็นความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกราฟเฉพาะส่วนที่จะนำไปอ้างอิงในวิทยานิพนธ์นี้

บทนิยาม 2.3.1 กราฟ $G = (V;E)$ คือโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยเซต $V \neq \phi$ และเซต E ซึ่งเป็นเซตของคู่ที่ไม่เป็นอันดับ (unordered pair) ของสมาชิกใน V เราเรียกสมาชิกของ V ว่าจุด (*vertex* หรือ *point*) และเรียกสมาชิกของ E ว่า*เส้น* (*edge* หรือ *line*)

ในบางครั้งถ้าต้องการระบุว่า V และ E เป็นเซตของจุด และเซตของเส้นของกราฟ G เราจะเขียนแทน V และ E ด้วย V(G) และ E(G) ตามลำดับ

บทนิยาม 2.3.2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า u *ประชิด* (*adjacent*) กับ v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเขียนแทนเส้นดังกล่าวด้วย uv และจะเรียก u และ v ว่าจุดปลายของเส้น uv

ถ้า $e = uv$ เป็นเส้นในกราฟ G เรากล่าวว่า จุด u *ตกกระทบ*(*incident*) กับเส้น e หรือเส้น e ตกกระทบกับจุด u และถ้า $e \neq f$ เป็นเส้นสองเส้นใด ๆ ใน G ที่ตกกระทบกับจุดเดียวกัน เรากล่าวว่า e ประชิดกับ f หรือ e และ f ประชิดกัน

โดยทั่วไปเราจะเขียนแทนจุดในกราฟด้วยจุดในระนาบ และเส้นในกราฟด้วยเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดในระนาบ และเป็นที่เข้าใจกันว่าในการเขียนรูปของกราฟนั้นจะไม่เขียนให้เส้นตัดกับตัวมันเองหรือลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น ยิ่งไปกว่านั้นเส้นสองเส้นของกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันได้โดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่

บทนิยาม 2.3.3 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G *ดีกรี* (*degree*) ของ u ใน G เขียนแทนด้วย deg(u) คือจำนวนเส้นใน G ที่ตกกระทบกับจุด u

บทนิยาม 2.3.4 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ (u และ v อาจเป็นจุดเดียวกัน) *ทางเดิน u - v* (*u - v walk*) ใน G คือลำดับจำกัดซึ่งเป็นลำดับสลับกันของจุดและเส้นดังนี้

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, ..., u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

ซึ่งเริ่มต้นด้วยจุด u และจบด้วยจุด v และสำหรับ $i = 1,2,…,n$ จุดปลายของเส้น e_i คือ u_{i-1} และ u_i

ความยาวของทางเดิน $u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, ..., u_{n-1}, e_n, u_n = v$ คือจำนวนเส้นในลำดับซึ่งมีค่าเท่ากับ n และในกรณีที่ $n = 0$ เราเรียกทางเดินนั้นว่า ทางเดินชัด (trivial walk) เราเรียก u_0 และ u_n ว่า จุดเริ่มต้น (origin) และ จุดปลาย (terminus) ของทางเดินตามลำดับ และเรียกจุด u_1 , u_2 ,…, u_n ว่า จุดภายใน (interval vertices) ของทางเดิน

บทนิยาม 2.3.5 เรากล่าวว่าทางเดิน u - v เป็น*ทางเดินไม่ซ้ำ*(*trail*) ถ้าเส้นในทางเดิน u – v ทั้งหมดไม่ซ้ำกัน และเป็น *วิถี*(*path*) เมื่อจุดในทางเดินทั้งหมดไม่มีจุดใดซ้ำกัน

บทนิยาม 2.3.6 เรากล่าวว่ากราฟ G เป็น *tree* ถ้าแต่ละคู่สมาชิกใน G มีวิถีเพียงวิถีเดียวระหว่างกัน

บทที่ 3
วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้เราศึกษาผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและนำมาขยายผลในวิทยานิพนธ์นี้

3.1 Monotone Clones and Congruence Modularity

ในหัวข้อนี้เราศึกษาผลงานวิจัยเรื่อง Monotone Clones and Congruence Modularity ของ B.A. Davey ใน [3] ซึ่งได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแผนภาพของเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ กับวาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตทางเดียว(ดูบทนิยาม 3.1.1) $\overline{A} = (P;(f_i^{\overline{P}})_{i\in I})$ ซึ่งสัมพัทธ์กับ $\overline{P}$ ที่เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ พร้อมทั้งให้เงื่อนไขจำเป็นสำหรับเซตอันดับ $\overline{P}$ ซึ่งวาไรตี $V(\overline{A})$ ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับ $\overline{P}$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ เราศึกษารายละเอียดของการพิสูจน์ทั้งหมดและเพิ่มเติมบทพิสูจน์บางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ โดยขอเริ่มต้นด้วยบทนิยามพีชคณิตทางเดียว

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $\overline{A} = (P;F^{\overline{A}})$ เป็นพีชคณิต เราเรียก $\overline{A}$ ว่า*พีชคณิตทางเดียว* (*monotone algebra*) ซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ ถ้าแต่ละ fundamental operation $f \in F^{\overline{A}}$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับของ $\overline{P}$

จากบทนิยามของพีชคณิตอันดับพริมอลในบทนิยาม 2.2.23 และบทนิยามของพีชคณิตทางเดียวดังบทนิยาม 3.1.1 ทำให้ได้ข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกต 3.1.1 ถ้า $\overline{A} = (P;F^{\overline{A}})$ เป็นพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ แล้ว $\mathrm{Pol}(\leq) = T(\overline{A}) = < F^{\overline{A}} >$ แต่ถ้า $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวแล้ว $F^{\overline{A}} \subseteq \mathrm{Pol}(\leq)$ ซึ่งแสดงว่า $< F^{\overline{A}} > \subseteq \mathrm{Pol}(\leq)$ ดังนั้นพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นพีชคณิตทางเดียว

ทฤษฎีบท 3.1.1 [3] ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ ถ้าวาไรตี V ที่ก่อกำเนิดโดย $\overline{A}$ เป็น k-permutable สำหรับทุก ๆ $k \geq 2$ แล้ว $\overline{P}$ เป็นปฏิโซ่

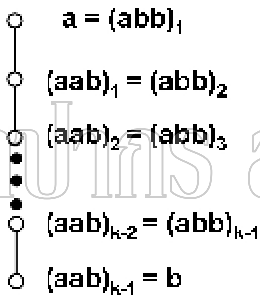
บทพิสูจน์ ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ และวาไรตี V ที่ก่อกำเนิดโดย $\overline{A}$ เป็น k-permutable สำหรับทุก ๆ $k \geq 2$ แล้วโดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะมี 3-ary order-preserving $p_1,\ldots,p_{k-1}$ ซึ่งสอดคล้องเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$x \approx p_1(x, z, z),$$

$$p_i(x, x, z) \approx p_{i+1}(x, z, z) \text{ สำหรับทุก ๆ } i \text{ และ}$$

$$p_{k-1}(x, x, z) \approx z$$

ให้ $a, b \in P$ ซึ่ง $a \leq b$ แล้ว $a = p_1(a, b, b) \geq p_1(a, a, b) = p_2(a, b, b) \geq p_2(a, a, b) = p_3(a, b, b) \geq \ldots p_{k-3}(a, a, b) = p_{k-2}(a, b, b) \geq p_{k-2}(a, a, b) = p_{k-1}(a, b, b) \geq p_{k-1}(a, a, b) = b$ ทำให้ได้ว่า $b \leq a$ เพราะฉะนั้น $a = b$ นั่นคือ $\overline{P}$ เป็นปฏิโซ่



รูปที่ 1

ข้อตกลง ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกและ $f_1,\ldots,f_m$ เป็น 3-ary operations บน A เราจะเขียน $(xyz)_i$ แทน $f_i(x,y,z)$ สำหรับ $0 \leq i \leq m$

บทนิยาม 3.1.2 เรากล่าวว่า วาไรตี W เป็น dual-discriminator ถ้า 3-ary term d(x, y, z) ซึ่งนิยามโดย

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x & , x = y \\ z & , \text{ในกรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

เป็น term operation บนทุก ๆ subdirectly irreducible algebra $\overline{S} \in W$

ทฤษฎีบท 3.1.3 [3] ให้ V เป็นวาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอล $\overline{A}$ ซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ แล้ว V เป็นวาไรตีแบบ dual-discriminator ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\overline{P}$ เป็นปฏิโซ่ หรือ
2. $|P| = 2$ และ $Pol(\leq) = < \wedge,\vee >$

บทพิสูจน์ ให้ $V(\overline{A})$ เป็นวาไรตีแบบ dual-discriminator แล้วเนื่องจาก $\overline{A}$ เป็น พีชคณิตอันดับพริมอล ดังนั้น $\overline{A}$ เป็น subdirectly irreducible algebra และโดยนิยามของวาไรตีแบบ dual-discriminator จะได้ว่า 3-ary term $d(x, y, z)$ นิยามบน P สอดคล้องบทนิยาม 3.1.2 เป็น3-ary term operation บน $\overline{A}$

สมมติว่า $\overline{P}$ ไม่เป็นปฏิโซ่ แล้ว $|P| \geq 2$ และมี $a, b \in P$ ซึ่ง $a < b$ สมมติว่า $|P| > 2$ แล้วจะมี $c \in P$ ซึ่ง $c \notin \{a, b\}$ ที่ทำให้ $a = d(a, a, c) \leq d(a, b, c) = c \leq d(b, b, c) = b$ ดังนั้น $a \leq c \leq b$

สมมติว่า $a \neq c$ และ $b \neq c$ แล้ว $a < c < b$ จะได้ว่า $a = d(a, a, b) \leq d(a, c, b) \leq d(c, c, b) = c$ โดยที่ $d(a,c,b) = b$ ซึ่งทำให้ได้ $b \leq c$ เพราะฉะนั้น $b = c$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $c \notin \{a, b\}$ ทำให้ได้ว่า $a = c$ หรือ $b = c$ ดังนั้น $|P| = 2$

ต่อไปจะแสดงว่า $Pol(\leq) = < \wedge,\vee >$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $< \wedge,\vee > \subseteq Pol(\leq)$ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $Pol(\leq) \subseteq < \wedge,\vee >$ เนื่องจาก $\overline{P}$ เป็นโซ่ขนาด 2 ซึ่งเป็น fence แล้วโดยทฤษฎีบท 3.4.3[6] ทำให้ได้ว่า clone ทางเดียว $Pol(\leq)$ ก่อกำเนิดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบน P และเพราะว่า $P = \{0,1\}$ ดังนั้นเราสามารถนิยามฟังก์ชันทวินาม จาก $P \times P$ ไปยัง P ได้ทั้งหมด 16 ฟังก์ชัน แต่ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับมีเพียง 6 ฟังก์ชันต่อไปนี้

$f_1(x, y) = 1$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$, $f_2(x, y) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x = 0 \text{ และ } y = 0 \\ 1 & \text{ในกรณีอื่นๆ} \end{cases} \quad , \quad f_4(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1 \text{ และ } y = 1 \\ 0 & \text{ในกรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1 \text{ และ } y \in P \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \text{ และ } y \in P \end{cases} \quad , \quad f_6(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } y = 1 \text{ และ } x \in P \\ 0 & \text{ถ้า } y = 0 \text{ และ } x \in P \end{cases}$$

และจะได้ว่า $f_1 := (x \wedge y) \vee 1$, $f_2 := (x \vee y) \wedge 0$, $f_3 := \vee$, $f_4 := \wedge$, $f_5(x,y) := (x \wedge y) \vee x$, $f_6(x,y) := (x \vee y) \wedge y$ ซึ่งเห็นได้ว่าแต่ละ f_i เป็นฟังก์ชันผลประกอบของ $\wedge$ และ $\vee$ ดังนั้น $f_i \in < \wedge,\vee >$ ทุก $i = 1,\ldots,6$ ซึ่งแสดงว่า $\mathrm{Pol}(\leq) = < \wedge,\vee >$

ในการพิสูจน์บทกลับถ้า $\overline{P}$ เป็นปฏิโซ่แล้ว $\overline{A}$ เป็น subdirectly irreducible algebra ของ $V(\overline{A})$ ให้ $d : P^3 \to P$ นิยามสำหรับ $x, y, z \in P$ ดังตารางต่อไปนี้

x	y	z	d(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

แล้ว d(x, y, z) สอดคล้องบทนิยาม 3.1.2 ดังนั้น $V(\overline{A})$ เป็นวาไรตีแบบ dual-discriminator และถ้า $|P| = 2$ และ $\mathrm{Pol}(\leq) = < \wedge,\vee >$ แล้ว $\overline{A}$ เป็น subdirectly irreducible algebra ของ $V(\overline{A})$ ให้ $d : P^3 \to P$ นิยามสำหรับ $x, y, z \in P$ ดังนี้

$$d(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

แล้ว d(x, y, z) สอดคล้องบทนิยาม 3.1.2 ดังนั้น $V(\overline{A})$ เป็นวาไรตีแบบ dual-discriminator

บทนิยาม 3.1.3 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับและ $a, b \in P$ เรานิยาม $[a, b] := \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$ และเรียกว่า ช่วง(*interval*) ใน $\overline{P}$

บทนิยาม 3.1.4 ให้ $\overline{P} = (P\,;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ $S \subseteq P$ เรากล่าวว่า S เป็น *up-directed* (หรือ *down-directed*) ถ้าสำหรับแต่ละสับเซตจำกัด F ของ S จะมี $z \in S$ ซึ่ง $z \in F^{u}$ ($z \in F^{\lambda}$)

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.4 [3] ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ และให้ $p : P^3 \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งสอดคล้อง $p(x,x,y) = y$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

1. ถ้า {a, b} มีขอบเขตบนใน $\overline{P}$ แล้ว $p(a, b, c) \leq c$ สำหรับทุก ๆ $c \in P$
2. $p(x, y, z) = z$ บนทุก ๆ ช่วง ใน P
3. ถ้า P เป็นทั้ง up-directed และ down-directed แล้ว p เป็น third projection นั่นคือ $p(x, y, z) = z$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in P$

บทพิสูจน์ 1. ให้ $a, b, c \in P$ และให้ $u \in P$ เป็นขอบเขตบนของ {a, b} แล้ว $a \leq u$ และ $b \leq u$ เนื่องจาก p เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับทำให้ได้ว่า $p(a, b, c) \leq p(u, u, c) = c$ ซึ่งแสดงว่า $p(a, b, c) \leq c$

2. ให้ $x, y, z \in P$ โดยที่ [x, y] เป็นช่วงใน $\overline{P}$ แล้ว $p(x, y, z) \leq p(y, y, z) = z$ ซึ่งแสดงว่า $p(x, y, z) \leq z$ และเนื่องจาก $z = p(x, x, z) \leq p(x, y, z)$ จะได้ว่า $z \leq p(x, y, z)$ และทำให้ได้ $p(x, y, z) = z$

3. ให้ $\overline{P}$ เป็นทั้ง up-directed และ down-directed และให้ $\{x, y, z\} \subseteq P$ แล้ว {x, y, z} มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างใน $\overline{P}$ ให้ $u, v \in P$ เป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ {x, y, z} ตามลำดับแล้ว $p(x, y, z) \leq p(u, u, z) = z$ และ $z = p(v, v, z) \leq p(x, y, z)$ ซึ่งแสดงว่า $p(x, y, z) = z$ เพราะฉะนั้น p เป็น third projection

ทฤษฎีบท 3.1.5 [3] ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ และให้ $\overline{P}$ เป็นทั้ง up-directed และ down-directed แล้ว $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ ก็ต่อเมื่อ $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

บทพิสูจน์ เป็นที่ทราบกันดีว่า ถ้าวาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจงแล้ว V เป็น คอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ จึงเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่าถ้าวาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์แล้ววาไรตี V เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

ให้ $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์แล้วโดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่า $V(\overline{A})$ สอดคล้อง (G1) ถึง (G6) ให้ $p : P^3 \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งสอดคล้อง (G6) แล้วโดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1.4 ข้อ 3 จะได้ว่า p เป็น third projection นั่นคือ $p(x, y, y) = y$ สำหรับทุกๆ $x, y \in P$ ดังนั้น V สอดคล้องเงื่อนไขของทฤษฎีบท 2.2.2 เพราะฉะนั้น V เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

บทนิยาม 3.1.5 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและให้ $A \subseteq P$ เรานิยาม $H_A := A^{u\lambda} \cap A^{\lambda u}$ และเรียก H_A ว่า *convex hull* ของ A สำหรับกรณีที่ $A = \{a, b\}$ จะเขียนแทน H_A ด้วย H_{ab} และเรียกว่า *ab-hull*

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.6 [3] ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและให้ $f : P^3 \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งสอดคล้อง $f(u, v, u) = u$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in P$ แล้ว $f(a, s, b) \in H_{ab}$ สำหรับทุก ๆ $a, b, s \in P$

บทพิสูจน์ ให้ $f : P^3 \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งสอดคล้อง $f(u, v, u) = u$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in P$ และให้ $a, b, s \in P$ จะแสดงว่า $f(a, s, b) \in H_{ab}$

<u>กรณี 1</u> $\{a,b\}^u \neq \phi$ และ $\{a,b\}^\lambda \neq \phi$

ให้ $c \in \{a, b\}^u$ แล้ว $a \leq c$ และ $b \leq c$ ดังนั้น $f(a, s, b) \leq f(c, s, c) = c$ เพราะฉะนั้น $f(a, s, b) \in \{a, b\}^{u\lambda}$ ต่อไปให้ $c \in \{a, b\}^\lambda$ แล้ว $a \geq c$ และ $b \geq c$ ดังนั้น $f(a, s, b) \geq f(c, s, c) = c$ เพราะฉะนั้น $f(a, s, b) \in \{a, b\}^{\lambda u}$ ซึ่งแสดงว่า $f(a, s, b) \in H_{ab}$

<u>กรณี 2</u> $\{a,b\}^u = \phi$ และ $\{a,b\}^\lambda = \phi$ แล้ว $\{a,b\}^{u\lambda} = P$ และ $\{a,b\}^{\lambda u} = P$ ทำให้ได้ว่า $H_{ab} = \{a,b\}^{u\lambda} \cap \{a,b\}^{\lambda u} = P$ เพราะฉะนั้น $f(a, s, b) \in P = H_{ab}$

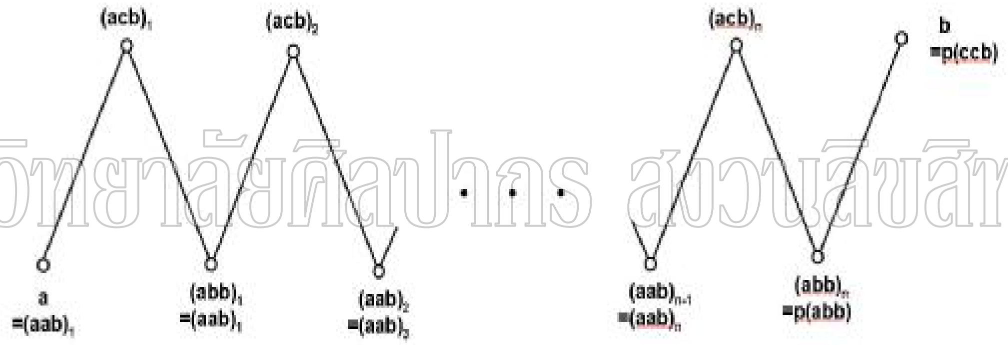
<u>กรณี 3</u> $\{a,b\}^u = \phi$ และ $\{a,b\}^\lambda \neq \phi$ แล้ว $\{a,b\}^{u\lambda} = P$ และ $\{a,b\}^{\lambda u} \neq \phi$ ทำให้ได้ว่า $H_{ab} = \{a,b\}^{u\lambda} \cap \{a,b\}^{\lambda u} = \{a,b\}^{\lambda u}$ เพราะว่า $\{a,b\}^\lambda \neq \phi$ โดยการพิสูจน์ในกรณี 1 จะได้ว่า $f(a, s, b) \in \{a, b\}^{\lambda u} = H_{ab}$

<u>กรณี 4</u> $\{a,b\}^u \neq \phi$ และ $\{a,b\}^\lambda = \phi$ แล้ว $\{a,b\}^{u\lambda} \neq \phi$ และ $\{a,b\}^{\lambda u} = P$ ทำให้ได้ว่า $H_{ab} = \{a,b\}^{u\lambda} \cap \{a,b\}^{\lambda u} = \{a,b\}^{u\lambda}$ เนื่องจาก $\{a,b\}^u \neq \phi$ ดังนั้นโดยการพิสูจน์ในกรณี 1 จะได้ว่า $f(a, s, b) \in \{a, b\}^{u\lambda} = H_{ab}$

เพราะฉะนั้นไม่ว่ากรณีใดจะได้ว่า $f(a, s, b) \in H_{ab}$

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.7 [3] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนคี่และให้ $\overline{\mathrm{P}}$ เป็นเซตอันดับซึ่งสอดคล้อง GM_n ในทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า $a, b, c \in P$ โดยที่ $c \in \{a, b\}^u$ แล้วสมาชิกของ P ที่แสดงดังในรูปที่ 2 ทั้งหมด จะอยู่ใน H_{ab}

บทพิสูจน์ ให้ $a, b, c \in P$ โดยที่ $c \in \{a, b\}^u$ เนื่องจาก $\overline{\mathrm{P}}$ สอดคล้อง GM_n ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก n และ 3-ary order-preserving $d_0,\ldots,d_n$ และ p ซึ่งสอดคล้อง (G1) ถึง (G6) ของทฤษฎีบท 2.2.3 และโดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1.6 จะได้ว่า $d_i(a, c, b) \in H_{ab}$ สำหรับทุกๆ $i = 0,\ldots,n$ นอกจากนี้ $a = d_0(a, a, b) = d_1(a, a, b) \le d_1(a, c, b) \ge d_1(a, b, b) = d_2(a, b, b) \le d_2(a, c, b) \ge d_2(a, a, b) = d_3(a, a, b) \le d_3(a, c, b) \ge \ldots \le d_{n-1}(a, a, b) = d_n(a, a, b) \le d_n(a, c, b) \ge d_n(a, b, b) = p(a, b, b) \le p(c, c, b) = b$ ทำให้สามารถเขียนแผนภาพได้ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2

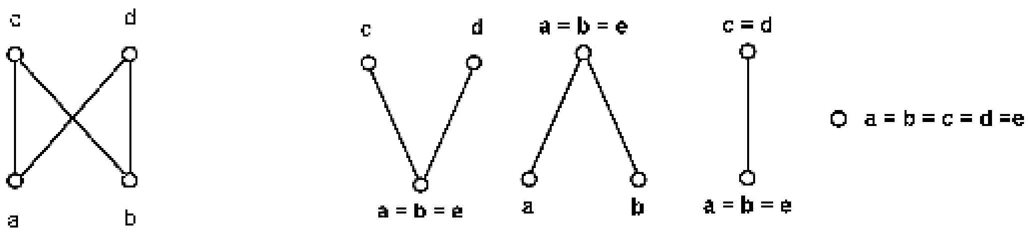
บทนิยาม 3.1.6 ให้ $\overline{\mathrm{P}} = (P\,;\le)$ เป็นเซตอันดับ และให้ $\overline{\mathrm{P}}_1,\ldots,\overline{\mathrm{P}}_n$ เป็นเซตอันดับย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $\overline{\mathrm{P}}$ และเป็นเซตต่างสมาชิกกันโดยที่ $P_1 \cup \ldots \cup P_n = P$ เราเรียกแต่ละเซตอันดับย่อย $\overline{\mathrm{P}}_i$ สำหรับ $i = 1,\ldots,n$ ของ $\overline{\mathrm{P}}$ ว่า *คอมโพแนนท์*(*component*) ของ $\overline{\mathrm{P}}$ ถ้า

1. $\overline{\mathrm{P}}_i$ เป็นเซตอันดับแบบต่อเนื่องสำหรับทุกๆ $i = 1,\ldots,n$ และ
2. $\overline{\mathrm{P}}_i \cup \overline{\mathrm{P}}_j$ ไม่เป็นเซตอันดับแบบต่อเนื่อง สำหรับทุกๆ $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ โดยที่ $i \ne j$

บทแทรกต่อไปนี้เป็นผลพลอยได้ของทฤษฎีบทประกอบ 3.1.7 ซึ่งเห็นได้อย่างชัดเจนจึงขอละการพิสูจน์

บทแทรก 3.1.8 [3] ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ และ $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ และให้ $a, b \in P$ ถ้า $\{a, b\}$ มีขอบเขตบนหรือขอบเขตล่าง ใน $\overline{P}$ แล้ว a และ b จะอยู่ในคอมโพแนนท์เดียวกันของ convex hull ของ $\{a, b\}$

บทนิยาม 3.1.7 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับเราเรียก $\{a, b, c, d\} \subseteq P$ ว่า *criss-cross* ถ้า $a, b \le c, d$ และเรียก criss-cross $\{a, b, c, d\}$ ว่า *proper* ถ้าไม่มี $e \in P$ ซึ่ง $a, b \le e \le c, d$



(i) (ii)

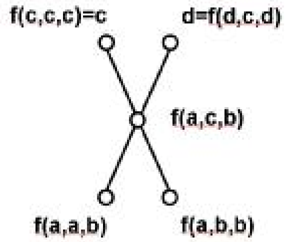
รูปที่ 3

รูปที่ 3 (ii) แสดงตัวอย่างของ criss-cross และจะเห็นจากนิยามว่าขนาดของ criss-cross ที่เป็นไปได้ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 รูปที่ 3 (i) เป็นตัวอย่างของ proper criss-cross และขนาดของ proper criss-cross จะเท่ากับ 4 และจะได้ว่า $a \parallel b$ และ $c \parallel d$

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.9 [3] ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับและ $\{a, b, c, d\} \subseteq P$ เป็น proper criss-cross และให้ $f : P^3 \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งสอดคล้อง $f(u, v, u) = u$ สำหรับทุก ๆ $u, v \in P$ แล้ว $\{f(a, a, b), f(a, b, b), c, d\}$ เป็น criss-cross ที่ไม่เป็น proper
ยิ่งไปกว่านั้น $\{f(a, a, b), f(a, b, b)\} \neq \{a, b\}$

บทพิสูจน์ ให้เงื่อนไขของทฤษฎีบทเป็นจริง เนื่องจาก $\{a, b, c, d\}$ เป็น proper criss-cross ดังนั้น $|\{a, b, c, d\}| = 4$, $a \parallel b$, $c \parallel d$ และ $a, b \le c, d$ แต่เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ จะได้ว่า $f(a, a, b) \le f(a, c, b)$ และ $f(a, b, b) \le f(a, c, b)$ โดยที่ $f(a, c, b) \le f(c, c, c) = c$ และ $f(a, c, b) \le f(d, c, d) = d$ และจะได้ว่า $f(a, c, b) \neq f(c, c, c)$ และ $f(a, c, b) \neq f(d, c, d)$ เพราะ

ถ้า f(a, c, b) = f(c, c, c) แล้ว $c \leq d$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $c \parallel d$ ซึ่งสามารถนำสมาชิกดังกล่าวมาเขียนเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 4

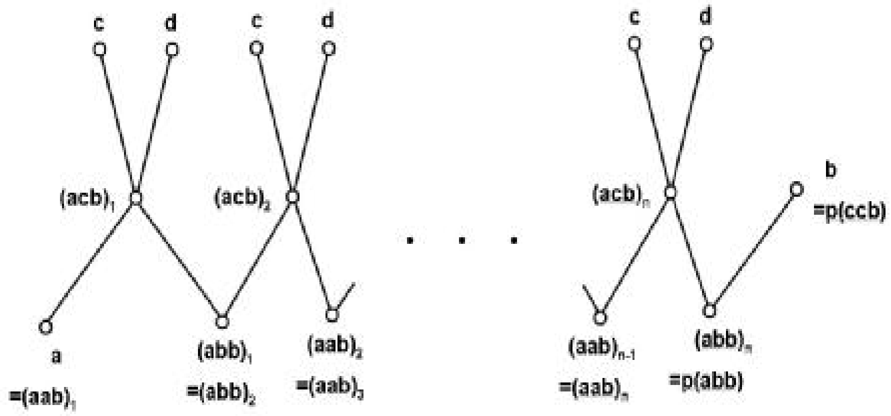


รูปที่ 4

เพราะฉะนั้น {f(a, a, b), f(a, b, b), c, d} เป็น criss-cross

ต่อไปสมมติว่า {f(a, a, b), f(a, b, b)} = {a, b} และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปเราให้ f(a, a, b) = a และ f(a, b, b) = b ทำให้ได้ว่า {a, b, c, d} ไม่เป็น proper เนื่องจากมี f(a, c, b) ใน P ซึ่ง $a, b < f(a,c,b) < c, d$ เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น {f(a, a, b), f(a, b, b)} ≠ {a, b}

ข้อสังเกต 3.1.2 ถ้าเซตอันดับ $\overline{P}$ สอดคล้อง GM_n โดยที่ n เป็นจำนวนคี่และ {a, b, c, d} เป็น criss-cross ใน $\overline{P}$ เราจะได้แผนภาพตามรูปที่ 5 ต่อไปนี้ซึ่งเรียกว่า *the spiked fence* เป็นส่วนหนึ่งของแผนภาพของ $\overline{P}$



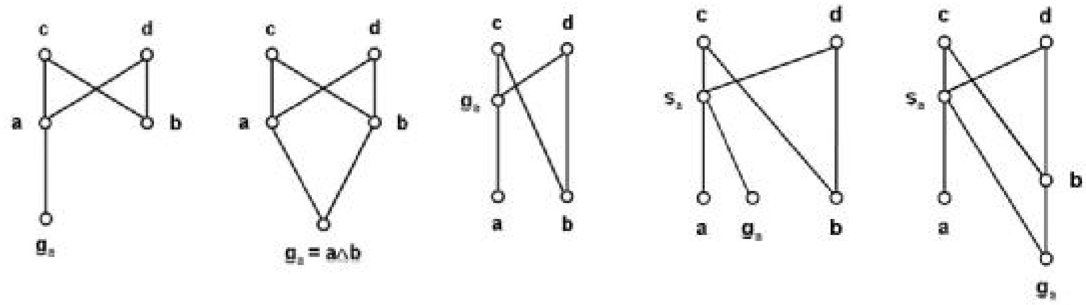
รูปที่ 5

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.10 [3] ให้ $\overline{\mathrm{P}}$ เป็นเซตอันดับซึ่งสอดคล้อง GM_n โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ และ {a, b, c, d} เป็น proper criss-cross ใน $\overline{\mathrm{P}}$ แล้วจะมี $0 < k \le n$ ซึ่ง

1. $(aab)_k = a$ และ $(abb)_k \notin \{a, b\}$ ถ้า k เป็นจำนวนคี่ หรือ
2. $(abb)_k = a$ และ $(aab)_k \notin \{a, b\}$ ถ้า k เป็นจำนวนคู่

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{\mathrm{P}}$ เป็นเซตอันดับซึ่งสอดคล้อง GM_n โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ และ {a, b, c, d} เป็น proper criss-cross ใน $\overline{\mathrm{P}}$ แล้วโดยข้อสังเกต 3.1.2 จะได้ spiked fence ดังรูปที่ 5 เนื่องจาก $d_1(a,a,b) = a$ และ $d_n(a,a,b) \le b$ ดังนั้น $d_n(a,b,b) \ne a$ ดังนั้นจะมีจำนวนคี่ k ซึ่ง $d_k(a,a,b) = a$ และ $d_k(a,b,b) \ne a$ หรือจะมีจำนวนคู่ k ซึ่ง $d_k(a,b,b) = a$ และ $d_k(a,a,b) \ne a$ แล้ว $\{a, d_k(a,b,b), c, d\}$ (หรือ $\{a, d_k(a,a,b), c, d\}$) เป็น criss-cross ที่ไม่เป็น proper ทำให้ได้ว่า $d_k(a,b,b) \ne b$ เพราะฉะนั้น $d_k(a,b,b) \notin \{a,b\}$

ทฤษฎีบท 3.1.11 [3] ให้ $\overline{\mathrm{A}}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{\mathrm{P}}$ และให้ $V(\overline{\mathrm{A}})$ สอดคล้อง GM_n โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ ถ้า {a, b, c, d} เป็น proper criss-cross ใน $\overline{\mathrm{P}}$ แล้วจะมี $g_a \in H_{ab}$-{a, b} และ $s_a \in H_{ab}$ ซึ่งทำให้เซต $\{a, b, c, d, g_a\}$ หรือ $\{a, b, c, d, g_a, s_a\}$ เป็นเซตอันดับย่อยรูปใดรูปหนึ่งใน 5 รูป (A), (B), (C), (D), และ (E) ของรูปที่ 6 (และ อีก 5 รูปที่สมมาตร(กรณีแทน a ด้วย b) กับรูป (A)-(E)) ต่อไปนี้

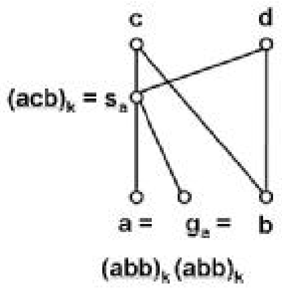


(A) (B) (C) (D) (E)

รูปที่ 6

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ และ $V(\overline{A})$ สอดคล้อง GM_n โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ และให้ {a, b, c, d} เป็น proper criss-cross ใน $\overline{P}$ แล้วโดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1.9 จะได้ $\{(aab)_k, (abb)_k, c, d\}$ เป็น criss-cross

<u>กรณี I</u> ถ้า k เป็นจำนวนคู่ แล้วโดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1.10 ทำให้ได้ว่า $(abb)_k = a$ และ $(aab)_k \notin \{a, b\}$ แล้วจะได้ $\{a, b, c, d, (aab)_k, (abb)_k\}$ เป็นเซตอันดับย่อยซึ่งสามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

ถ้า $g_a = (aab)_k \geq b$ แล้ว {a, b, c, d} เป็น criss-cross ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด เพราะฉะนั้น $g_a \not\geq b$

<u>กรณี 1</u> $a = s_a$

<u>กรณี 1.1</u> ถ้า $g_a \| b$ แล้วจะได้รูป (A) ของรูปที่ 6

<u>กรณี 1.2</u> ถ้า $g_a < b$ แล้วจะได้รูป (B) ของรูปที่ 6 เนื่องจาก $g_a < a$ และ $g_a < b$ และ $g_a \in \{a,b\}^{\lambda u}$ ทำให้ได้ว่า $g_a = a \wedge b$

<u>กรณี 2</u> $g_a = s_a$ แล้วจะได้ว่า $g_a \| b$ ดังนั้นจะเกิดรูป (C) ของรูปที่ 6

<u>กรณี 3</u> $a, g_a < s_a$

<u>กรณี 3.1</u> ถ้า $g_a \| b$ แล้วจะได้รูป (D) ของรูปที่ 6

<u>กรณี 3.2</u> ถ้า $g_a < b$ แล้วจะได้รูป (E) ของรูปที่ 6

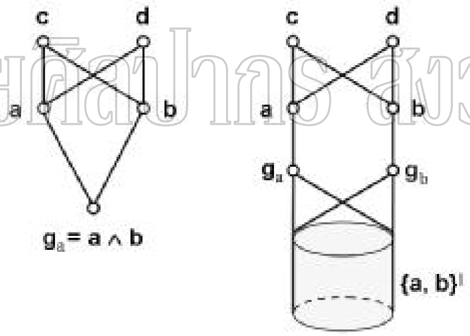
<u>กรณี II</u> ถ้า k เป็นจำนวนคี่ แล้วโดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1.10 ทำให้ได้ว่า $(aab)_k = a$ และ $(abb)_k \notin \{a,b\}$ แล้วจะได้ $\{a, b, c, d, (aab)_k, (abb)_k\}$ เป็นเซตอันดับย่อยซึ่งสามารถเขียนเป็น

แผนภาพที่สมมาตรกับรูปที่ 7 และสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับกรณี I ซึ่งจะทำให้ได้เกิดแผนภาพของเซตอันดับย่อย 5 รูปที่สมมาตรกับรูป (A)-(E)

บทนิยาม 3.1.8 เรากล่าวว่า proper criss-cross {a, b, c, d} เป็น *minimal* ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ proper criss-cross $\{a', b, c', d'\}$ ซึ่ง $a \le a'$, $b \le b'$, $c' \le c$ และ $d' \le d$ จะได้ว่า $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ และ $d' = d$

ทฤษฎีบท 3.1.12 [3] ให้ $\overline{A}$ เป็นพีชคณิตทางเดียวซึ่งสัมพัทธ์กับเซตอันดับ $\overline{P}$ และให้ $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ ถ้า {a, b, c, d} เป็น minimal proper criss-cross ใน P แล้ว

1. จะมี $t \in P$ ซึ่ง $t = a \wedge b$ ใน $\overline{P}$ หรือ
2. มี $g_a, g_b \in H_{ab}$ โดยที่ $g_a \parallel g_b$, $g_a < a$ และ $g_b < b$ (ดูรูปที่ 8)



รูปที่ 8

บทพิสูจน์ ให้เงื่อนไขของทฤษฎีบทเป็นจริง แล้วโดยทฤษฎีบท 3.1.11 จะมี $g_a \in H_{ab}$-{a, b} และ $s_a \in H_{ab}$ ซึ่งทำให้เกิดรูปใดรูปหนึ่งในรูป (A)-(E) ของรูปที่ 6 และมี $g_b \in H_{ab}$-{a, b} และ $s_a \in H_{ab}$ ซึ่งทำให้เกิดรูปที่สมมาตรกับรูป (A)-(E) ของรูปที่ 6 แต่เนื่องจาก {a, b, c, d} เป็น minimal proper criss-cross ดังนั้นรูป (C)-(E) ของรูปที่ 6 และรูปที่สมมาตรกับรูป (C)-(E) ไม่สามารถเกิดขึ้น

33

สมมติว่า $t \neq a \wedge b$ สำหรับทุก ๆ $t \in P$ แล้วรูป (B) และรูปที่สมมาตรกับรูป (B) ไม่สามารถเกิดขึ้น ดังนั้นจะเกิดรูป (A)และรูปที่สมมาตรกับรูป (A) โดยที่ $g_a < a$, $g_a \parallel b$, $g_b < b$ และ $g_b \parallel a$ ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 8

3.2 Orders Admitting an Isotone Majority Operation

ในหัวข้อนี้เราศึกษาผลงานวิจัยของ Z.Furedi และ I.G.Rosenberg ใน [7] เรื่อง Orders Admitting an Isotone Majority Operation โดยได้ศึกษารายละเอียดในบทพิสูจน์และได้เพิ่มเติมการพิสูจน์ในบางส่วนที่ไม่สมบูรณ์

ให้ $\leq$ เป็นอันดับบนเซต P ขอทบทวนว่า ternary operation $m : P^3 \to P$ เป็น isotone หรือฟังก์ชันยืนยงอันดับ หรือ monotone ถ้า $m(x, y, z) \leq m(x', y', z')$ เมื่อใดก็ตามที่ $x \leq x', y \leq y', z \leq z'$ และเรียก m ว่า majority operation ถ้า m(y, x, x) = m(x, y, x) = m(x, x, y) = x สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ ส่วน clone ทางเดียวของเซตอันดับใดที่มี isotone majority operation เป็นสมาชิกเราจะเรียกเซตอันดับนั้นว่า majority orders ซึ่งเป็นเซตอันดับที่มีความสำคัญในการศึกษาเรื่อง clone งานวิจัยนี้ได้บอกเงื่อนไขจำเป็นของ majority orders โดยแสดงว่า majority orders เป็น partial lattice และสอดคล้องสมบัติ Helly type

เราเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงสมบัติของ majority orders ที่เป็น partial lattice และสอดคล้องสมบัติ Helly type (ซึ่งจะให้นิยามต่อไป)

ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ m เป็น ternary operation บน P เราจะแทน $m(x, y, z)$ ด้วยสัญลักษณ์ (xyz) สำหรับแต่ละ $(x, y, z) \in P^3$ และสำหรับ $a \in P$ ให้ $[a) := \{x \in P \mid x \geq a\}$ และ $(a] := \{x \in P \mid x \leq a\}$

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น *partial lattice* ถ้าสำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ จะได้ว่า

1. $[x) \cap [y) = \phi$ หรือ $[x) \cap [y)$ มีสมาชิกตัวน้อยสุด ซึ่งในกรณีที่ $[x) \cap [y)$ มีสมาชิกตัวน้อยสุด เราแทนสมาชิกน้อยสุดของ x กับ y ด้วยสัญลักษณ์ $x + y$
2. $(x] \cap (y] = \phi$ หรือ $(x] \cap (y]$ มีสมาชิกตัวมากสุด ซึ่งในกรณีที่ $(x] \cap (y]$ มีสมาชิกตัวมากสุด เราแทนสมาชิกมากสุดของ x กับ y ด้วยสัญลักษณ์ $x \cdot y$

ให้ $\overline{P}$ เป็น partial lattice และ $x, y, z \in P$ แล้ว + และ · ที่นิยามดังบทนิยาม 3.2.1 สอดคล้องกฎการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $[xy]z = x[yz]$ และ $[x+y]+z = x+[y+z]$ ซึ่งทำให้สามารถเขียน xyz แทน $x[yz]$ และเขียน $x+y+z$ แทน $x+[y+z]$

ข้อสังเกต 3.2.1 ถ้า $a < b$ แล้ว $[a) \cap (b] := \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$ เป็นแลตทิซ

บทนิยาม 3.2.2 ให้ $\overline{P}$ เป็น partial lattice เรากล่าวว่า $\overline{P}$ สอดคล้องสมบัติ Helly type ถ้าสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in P$ จะได้ว่า

1. ถ้ามีสมาชิก $a, b, c \in P$ ซึ่ง $a = x+y, b = x+z$ และ $c = y+z$ แล้วจะมี $d \in P$ ซึ่ง $d = x+y+z$ และ

2. ถ้ามีสมาชิก $u, v, s \in P$ ซึ่ง $u = xy,\ v = xz$ และ $s = yz$ แล้วจะมี $t \in P$ ซึ่ง $t = xyz$

เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 [7] ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m แล้ว $\overline{P}$ เป็น partial lattice ที่สอดคล้องสมบัติ Helly type ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับทุก ๆ $x, y, z \in P$ จะได้ว่า

$$z \geq x+y \ \Rightarrow\ (xyz) = (yxz) = (xzy) = x+y, \qquad \ldots(1)$$

$$z \leq xy \ \Rightarrow\ (xyz) = (yxz) = (xzy) = xy, \qquad \ldots(2)$$

ถ้ามี $a \in P$ ซึ่ง $a = x+y+z$ แล้ว $(xyz) \leq [x+y][x+z][y+z]$, ...(3)

และ ถ้ามี $b \in P$ ซึ่ง $b = xyz$ แล้ว $(xyz) \geq xy+xz+yz$ ...(4)

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m และให้ $x, y \in P$

จะแสดงว่า $[x) \cap [y) = \phi$ หรือ $[x) \cap [y)$ มีสมาชิกตัวน้อยสุด

สมมติ $[x) \cap [y) \neq \phi$

<u>กรณี 1</u> $x \in [x) \cap [y)$ หรือ $y \in [x) \cap [y)$ เราจะแสดงการพิสูจน์เฉพาะกรณี $x \in [x) \cap [y)$ สำหรับกรณีของ $y \in [x) \cap [y)$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน แล้วโดยนิยามของ $[x)$ และ

$[y)$ จะได้ว่า $a \geq x$ และ $a \geq y$ สำหรับทุก ๆ $a \in [x) \cap [y)$ ซึ่งแสดงว่า x เป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ $[x) \cap [y)$

<u>กรณี 2</u> $x \notin [x) \cap [y)$ และ $y \notin [x) \cap [y)$

ให้ $a \in [x) \cap [y)$ แล้ว $a \geq x$ และ $a \geq y$ และเนื่องจาก m เป็น isotone majority operation ดังนั้น $m(a,x,y) \geq m(x,x,y) = x$ และ $m(a,x,y) \geq m(y,x,y) = y$ ทำให้ได้ว่า $m(a,x,y) \in [x) \cap [y)$

ให้ $b \in [x) \cap [y)$ แล้ว $b \geq x$ และ $b \geq y$ ทำให้ได้ $m(a,x,y) \leq m(a,b,b) = b$ ซึ่งแสดงว่า $m(a,x,y) \leq b$ สำหรับทุก ๆ $b \in [x) \cap [y)$ ทำให้ได้ว่า $m(a,x,y)$ เป็นสมาชิกตัวน้อยสุดของ $[x) \cap [y)$

ในการแสดงว่า $(x] \cap (y] = \phi$ หรือ $(x] \cap (y]$ มีสมาชิกตัวมากสุดสามารถทำได้ในทำนองเดียวกับข้างต้น เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็น partial lattice

ต่อไปจะแสดงว่า (1) เป็นจริง ให้ $x, y, z \in P$ ซึ่ง $z \geq x + y$ แล้ว $z \geq x$ และ $z \geq y$ และเพราะว่า m เป็น isotone majority operation ทำให้ได้ว่า $m(x,y,z) \geq m(x,y,x) = x$ และ $m(x,y,z) \geq m(x,y,y) = y$ ซึ่งแสดงว่า $m(x,y,z)$ เป็นขอบเขตบนของ x กับ y

ให้ u เป็นขอบเขตบนของ x และ y แล้ว $u \geq x$ และ $u \geq y$ ทำให้ได้ว่า $m(x,y,z) \leq m(u,u,z) = u$ ดังนั้น $m(x,y,z)$ เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ x กับ y เพราะฉะนั้น $m(x,y,z) = x + y$ สำหรับกรณีของ $m(y,z,x)$ และ $m(x,z,y)$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน เพราะฉะนั้น (1) เป็นจริง

ในการแสดงว่า (2) เป็นจริงสามารถทำได้ในทำนองเดียวกับ (1)

ต่อไปจะแสดงว่า (3) เป็นจริง ให้ $x, y, z \in P$ และมี $a \in P$ โดยที่ $a = x + y + z$ แล้วจะมี $b, c, d \in P$ ซึ่ง $b = x + y$, $c = x + z$ และ $d = y + z$ และเนื่องจาก m เป็น isotone majority จะได้ว่า

$$m(x,y,z) \leq m(x+y, x+y, z) = x + y \ ,$$
$$m(x,y,z) \leq m(x+z, y, x+z) = x + z \ ,$$
$$m(x,y,z) \leq m(x, y+z, y+z) = y + z$$

ซึ่งแสดงว่า $m(x,y,z)$ เป็นขอบเขตล่างของ $x + y$, $y + z$ และ $x + z$ แต่เพราะว่า $[x+y][x+z][y+z]$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $x + y$, $y + z$ และ $x + z$ ดังนั้น $m(x,y,z) \leq [x+y][x+z][y+z]$ เพราะฉะนั้น (3) เป็นจริง

ในการแสดงว่า (4) เป็นจริงสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับ (3)

บทแทรก 3.2.2 [7] ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับซึ่ง Pol$(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m แล้วสำหรับ $x, y, z, u, \lambda \in P$ จะได้ว่า

$$x, y, z \in (u] \text{ หรือ } x, y, z \in [u) \;\Rightarrow\; \big((xyu)zu\big) = \big(x(yzu)u\big) \qquad \ldots(5)$$

$$x, y \in [\lambda) \cap (u] \;\Rightarrow\; (x(xyu)\lambda) = (x(xy\lambda)u) = x \qquad \ldots(6)$$

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับซึ่ง Pol$(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m แล้วจะได้ว่า $\overline{P}$ เป็น partial lattice และสอดคล้องเงื่อนไข (1)-(4) ในทฤษฎีบท 3.2.1 และให้ $x, y, z, u, \lambda \in P$

จะแสดงว่า (5) เป็นจริง ให้ $x, y, z \in (u]$ แล้ว $x \leq u, y \leq u$ และ $z \leq u$ ดังนั้น $x + y \leq u$ และโดยเงื่อนไข (1) ทำให้ได้ $m\big(m(x,y,z),z,u\big) = m(x+y,z,u) = [x+y]+z = x+[y+z] = m\big(x.y+z,u\big) = m\big(x,m(y,z,u),u\big)$ และสำหรับกรณี $x, y, z \in [u)$ เราจะได้ $x \geq u, y \geq u$ และ $z \geq u$ ดังนั้น $xy \geq u$ และโดยเงื่อนไข (2) เราจะได้ $m(m(x,y,u),z,u) = m(xy,z,u) = [xy]z = x[yz] = m(x,yz,u) = m\big(x,m(y,z,u),u\big)$ เพราะฉะนั้น (5) เป็นจริง

ให้ $x, y \in [\lambda) \cap (u]$ แล้ว $\lambda \leq x$ และ $\lambda \leq y$ และโดย (1) และ (2) ทำให้ได้ว่า $m(x,m(x,y,u),\lambda) = m(x,m(x,u,y),\lambda) = m(x,x+u,\lambda) = x[x+u] = x \cdot u = x$ และ $m(x,m(x,y,\lambda),u) = m(x,m(x,\lambda,y),u) = m(x,x\cdot\lambda,u) = x + x\lambda = x+\lambda = x$ เพราะฉะนั้น $m(x,m(x,y,u),\lambda) = m(x,m(x,y,\lambda),u) = x$ ซึ่งแสดงว่า (6) เป็นจริง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น *up-directed* (หรือ *down-directed*) ถ้า $[x) \cap [y) \neq \phi$ (หรือ $(x] \cap (y] \neq \phi$) สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ และกล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น *directed* ถ้า $\overline{P}$ เป็นทั้ง up-directed และ down-directed

เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3 [7] ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ

1. ถ้า $\overline{P}$ เป็น majority order และเป็น up-directed แล้ว $(P;+)$ เป็นกึ่งแลตทิซ และถ้า $\overline{P}$ เป็น majority order และเป็น down-directed แล้ว $(P;\cdot)$ เป็นกึ่งแลตทิซ
2. ถ้า $\overline{P}$ เป็น directed แล้ว $\overline{P}$ เป็น majority order ก็ต่อเมื่อ $\overline{P}$ เป็นแลตทิซ

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ

1. ให้ $\overline{P}$ เป็น majority order และเป็น up-directed แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $\overline{P}$ เป็น partial lattice และเนื่องจาก $\overline{P}$ เป็น up-directed ดังนั้น $[x)\cap[y)\neq\phi$ ทำให้ได้ว่า {x, y} มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ เพราะฉะนั้น (P;+) เป็นกึ่งแลตทิซ

ในกรณีที่ $\overline{P}$ เป็น majority order และเป็น down-directed สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับข้างต้น เพราะฉะนั้น $(P;\cdot)$ เป็นกึ่งแลตทิซ

2. ให้ $\overline{P}$ เป็น directed ถ้า $\overline{P}$ เป็น majority order แล้วโดยผลของข้อ 1 ทำให้ได้ว่า $(P;+,\cdot)$ เป็นแลตทิซ

ให้ $\overline{P}$ เป็นแลตทิซและให้ $m: P^3 \to P$ นิยามสำหรับ $x, y, z \in P$ โดย $m(x,y,z) = xy + xz + yz$ (หรือ $m(x,y,z) = [x+y][x+z][y+z]$) แล้วเห็นได้ชัดว่า m เป็น isotone majority operation เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็น majority order

ข้อสังเกต 3.2.2 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m และให้ $p \in P$ ซึ่ง $x_i \geq p$ สำหรับ i = 1, 2, 3 แล้ว $m(x_1, x_2, x_3) \geq p$ ทำให้ได้ว่า $m(x_1, x_2, x_3) \in [p)$ และฟังก์ชันกำกัดของ m บน [p) (the restriction of m to [p)) เป็น isotone majority operation บน $([p);\leq)$ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่าฟังก์ชันกำกัดของ m บน (p] เป็น isotone majority operation บน $((p];\leq)$ ด้วย ดังนั้นสำหรับแต่ละ $p, p' \in P$ โดยที่ $p < p'$ ฟังก์ชันกำกัดของ m บน $I := [p, p']$ เป็น isotone majority operation บน $(I;\leq)$

บทนิยาม 3.2.4 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียกลำดับของสมาชิกใน P ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $(p_0, p_1, \ldots)$, $(p_1, p_2, \ldots)$ หรือ $(\ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots)$ รูปใดรูปหนึ่งว่า *W-path* ถ้าแต่ละลำดับสอดคล้อง

$$p_{2i} = p_{2i-1} \cdot p_{2i+1} \quad \text{และ} \quad p_{2i+1} = p_{2i} \cdot p_{2i+2} \qquad \ldots(7)$$

สำหรับทุก ๆ i

ทฤษฎีบท 3.2.4 [7] ให้ $\overline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P};\leq)$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m และให้ Q เป็น W-path ใน $\overline{\mathrm{P}}$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปใดรูปหนึ่งของบทนิยาม 3.2.4 และให้เงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) ต่อไปนี้เป็นจริง สำรหรับทุก ๆ $p_i \in Q$ และทุก ๆ $x, y \in P$

ถ้า $x \geq p_{2i-1}$ และ $y \geq p_{2i+1}$ แล้ว $x \cdot y = p_{2i}$ …(8)

ถ้า $x \leq p_{2i}$ และ $y \leq p_{2i+2}$ แล้ว $x + y = p_{2i+1}$ …(9)

และสำหรับแต่ละสมาชิก p_i ใน Q ถ้า i เป็นจำนวนคี่เรากำหนดให้ $q_i \geq p_i$ และถ้า i เป็นจำนวนคู่ เรากำหนดให้ $q_i \geq p_i$ แล้วสำหรับทุกๆ $1 \leq i \leq j \leq k$ และทุก ๆ วิธีเรียงสับเปลี่ยน π บน $\{i, j, k\}$ จะได้ว่า

$$(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}) = \begin{cases} \geq p_{\pi(j)} & ,\text{ถ้า } j \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \leq p_{\pi(j)} & ,\text{ถ้า } j \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases} \qquad ...(10)$$

ยิ่งไปกว่านั้นถ้า $k \leq i+2$ แล้ว $\left(p_{\pi(i)}p_{\pi(j)}p_{\pi(k)}\right) = p_{\pi(j)}$

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{\mathrm{P}}$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย isotone majority operation m และให้ Q เป็น W-path ใน $\overline{\mathrm{P}}$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปใดรูปหนึ่งของบทนิยาม 3.2.4 และให้เงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) ต่อไปนี้เป็นจริง ทุกๆ $p_i \in Q$ และทุกๆ $x, y \in P$

จะพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนผลต่าง $\lambda := k - i$

ให้ $\lambda \leq 1$ เนื่องจาก $\lambda = k - i \leq 1$ ดังนั้น $k - i = 0$ หรือ $k - i = 1$

ถ้า $k - i = 0$ แล้ว $i = j = k$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไป สมมติ $i = j = k$ เป็นจำนวนคี่ และให้ π เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนบน $\{i, j, k\}$ แล้ว $(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}) = (q_{\pi(j)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)})$ $= q_{\pi(j)} = q_j \geq p_j = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq p_{\pi(j)}$

ถ้า $k - i = 1$ แล้ว $i = j$ หรือ $j = k$

สมมติ $i = j$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติให้ $i = j$ จำนวนคี่และ k เป็นจำนวนคู่ และให้ π เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนบน $\{i, j, k\}$

ถ้า $\pi(i) = j, \pi(j) = i, \pi(k) = k$ จะได้ว่า $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) = \left(q_{\pi(j)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) = q_{\pi(j)} = q_i = q_j \geq p_j = p_i = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq p_{\pi(j)}$

ถ้า $\pi(i) = k, \pi(j) = j, \pi(k) = i$ จะได้ว่า $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) = \left(q_{\pi(k)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) = q_{\pi(k)} = q_i = q_j \geq p_j = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq p_{\pi(j)}$ สำหรับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบอื่นไม่สามารถเกิดขึ้นได้ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับ $\lambda \leq 1$

สมมติให้ทฤษฎีบทเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $\lambda \geq 1$ และให้ $1 \leq i \leq j \leq k$ สอดคล้อง $k - i = \lambda + 1$ และให้ π เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนบน $\{i, j, k\}$

<u>กรณี 1</u> ให้ i, j และ k เป็นจำนวนคู่ แล้วเนื่องจาก m เป็น isotone majority operation ดังนั้นจะได้ว่า

$$a := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \leq b := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)-1}q_{\pi(k)-1}\right)$$

และ

$$a := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \leq c := \left(q_{\pi(i)+1}q_{\pi(j)+1}q_{\pi(k)}\right)$$

เนื่องจาก $(\pi(k)-1) - \pi(i) = \pi(k) - \pi(i) - 1 \leq k - i - 1 = \lambda + 1 - 1 = \lambda$ และ $\pi(k) - (\pi(i)+1) = \pi(k) - \pi(i) - 1 \leq k - i - 1 = \lambda + 1 - 1 = \lambda$ และ $\pi(j)-1,\ \pi(j)+1$ เป็นจำนวนคี่ โดยขั้นสมมติฐานจะได้ $b := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)-1}q_{\pi(k)-1}\right) \geq p_{\pi(j)-1}$ และ $c := \left(q_{\pi(i)+1}q_{\pi(j)+1}q_{\pi(k)}\right) \geq p_{\pi(j)+1}$ โดยเงื่อนไข (8) ทำให้ได้ว่า $a \leq b \cdot c = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \leq p_{\pi(j)}$

<u>กรณี 2</u> ให้ i, j และ k เป็นจำนวนคี่ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1

<u>กรณี 3</u> ให้ j เป็นจำนวนคี่

ถ้า k เป็นจำนวนคี่และ i เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)-1}\right)$ โดยที่ $(\pi(k)-1) - \pi(i) = \pi(k) - \pi(i) - 1 \leq k - i - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$ และ $\pi(j)$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นโดยขั้นสมมติฐานจะได้ว่า $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)-1}\right) \geq p_{\pi(j)}$

ถ้า k เป็นจำนวนคู่ โดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปสมมติให้ i เป็นจำนวนคู่ เนื่องจาก m เป็น isotone majority operation จะได้ว่า

$$a := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq b := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)-1}q_{\pi(k)-1}\right)$$

และ

$$a := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq c := \left(q_{\pi(i)+1}q_{\pi(j)+1}q_{\pi(k)}\right)$$

เนื่องจาก $(\pi(k)-1) - \pi(i) = \pi(k) - \pi(i) - 1 \leq k - i - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$ และ $\pi(k) - (\pi(i)+1) = \pi(k) - \pi(i) - 1 \leq k - i - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$ และ $\pi(j)-1, \pi(j)+1$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นโดยขั้นสมมติฐานจะได้ว่า $b := \left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)-1}q_{\pi(k)-1}\right) \leq p_{\pi(j)-1}$ และ $c := \left(q_{\pi(i)+1}q_{\pi(j)+1}q_{\pi(k)}\right) \leq p_{\pi(j)+1}$ และโดยเงื่อนไข (9) ทำให้ได้ว่า $a \geq b + c = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(q_{\pi(i)}q_{\pi(j)}q_{\pi(k)}\right) \geq p_{\pi(j)}$

<u>กรณี 4</u> ถ้า j เป็นจำนวนคู่ เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับกรณี 3

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถสรุปได้ว่าเงื่อนไข (10) เป็นจริง

ให้ $k \le i+2$ ถ้า $k < i+2$ แล้ว $k-i=1$ หรือ $k-i=0$ ซึ่งทำให้ได้ $j=i$ หรือ $j=k$ หรือ $j=i=k$ ดังนั้นโดยสมมติฐานของขั้นอุปนัยในย่อหน้าก่อนทำให้ได้ว่า $(p_{\pi(i)}p_{\pi(j)}p_{\pi(k)}) = p_{\pi(j)}$

ถ้า $k = i+2$ แล้ว $j=i+1$ โดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปสมมติให้ j เป็นจำนวนคี่ แล้วจะได้ว่า $p_{\pi(j)} \le \left(p_{\pi(i)}p_{\pi(j)}p_{\pi(k)}\right) \le \left(p_{\pi(j)}p_{\pi(j)}p_{\pi(k)}\right) = p_{\pi(j)}$ เพราะฉะนั้น $\left(p_{\pi(i)}p_{\pi(j)}p_{\pi(k)}\right) = p_{\pi(j)}$

บทนิยาม 3.2.5 ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับ เราเรียกลำดับ $(p_1,\ldots,p_{2n})$ ของสมาชิกที่แตกต่างกันใน P ว่า *W-cycle* ถ้า $n > 1$ และ $(p_1,\ldots,p_{2n},p_1)$ เป็น W-path

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.5 [7] ถ้าเซตอันดับ $\overline{P}$ เป็น majority order และ W-cycle $(p_1,\ldots,p_{2n})$ เป็นเซตอันดับย่อยของ $\overline{P}$ แล้ว W-cycle $(p_1,\ldots,p_{2n})$ ไม่สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) ของทฤษฎีบท 3.2.4

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ เป็น majority order และสมมติว่า $\overline{P}$ ประกอบด้วย W-cycle $(p_1,\ldots,p_{2n})$ เป็นเซตอันดับย่อยที่สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.4 จะได้ว่า $(p_1p_2p_3) \le p_2$ และเพราะว่า $(p_1,\ldots,p_{2n})$ เป็น W-cycle จะได้ว่า $(p_3,\ldots,p_{2n},p_1,p_2)$ เป็น W-cycle ที่สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) ด้วย และในทำนองเดียวกันเราได้ว่า $(p_1p_2p_3) \ge p_1$ ดังนั้น $p_1 \le (p_1p_2p_3) \le p_2$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกันเอง เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ ไม่มี W-cycle ที่สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9)

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2.6 [7] ถ้าเซตอันดับ $\overline{P}$ มี W-cycle $(p_1,\ldots,p_{2n})$ เป็นเซตอันดับย่อย ซึ่ง $p_1, p_3, \ldots, p_{2n-1}$ เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ $\overline{P}$ และ $p_2, p_4, \ldots, p_{2n}$ เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มของ $\overline{P}$ แล้ว $\overline{P}$ ไม่เป็น majority order

บทพิสูจน์ สมมติ $\overline{P}$ เป็น majority order เนื่องจาก $p_1, p_3, \ldots, p_{2n-1}$ เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มและ $p_2, p_4, \ldots, p_{2n}$ เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มของ $\overline{P}$ แล้วจะได้ว่า $(p_1,\ldots,p_{2n})$ เป็น W-cycle ที่สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) จึงเกิดข้อขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 3.2.5 เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ ไม่เป็น majority order

ข้อสังเกต 3.2.3 ทุก ๆ เซตอันดับ $(\{c_1,c_2,...,c_{2n}\};\leq)$ ซึ่งเป็น crown จะไม่เป็น majority order เนื่องจาก $(\{c_1,c_2,...,c_{2n}\};\leq)$ เป็น W-cycle ซึ่ง $c_1 > c_2 < c_3 > ... < c_{2n} < c_1$ โดยที่ $c_1,\ldots,c_{2n}$ เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนั้น crown $(\{c_1,c_2,...,c_{2n}\};\leq)$ สอดคล้องเงื่อนไข (8) และเงื่อนไข (9) ของทฤษฎีบท 3.2.5

ให้ $\overline{P}=(P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $x,y \in P$ ขอทบทวนว่า x ปกคลุม y หมายความว่า $x>y$ และไม่มีสมาชิก $z \in P$ โดยที่ $x<z<y$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \phi y$ และขอให้สังเกตว่าแผนภาพของเซตอันดับ $\overline{P}$ เป็นกราฟไม่ระบุทิศทาง (unoriented graph) ที่มี P เป็นเซตของจุด และ {x,y} สำหรับทุก ๆ คู่ x , y โดยที่ x ปกคลุม y จะเป็นสมาชิกของเซตของเส้น เราจะเรียกกราฟ $\overline{P}$ ว่า tree ถ้าแต่ละคู่ของ $x,y \in P$ มีวิถีเพียงวิถีเดียวระหว่างสมาชิกทั้งสอง

บทนิยาม 3.2.6 ให้ $\overline{P}=(P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น *tree-like* ถ้ามี $Q \subseteq P$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\overline{Q}=(Q;\leq)$ เป็นเซตอันดับย่อยของ $\overline{P}$ และแผนภาพของ Q เป็น tree
2. สำหรับทุก ๆ $q,q' \in Q$ ซึ่ง q' ปกคลุม q ใน $\overline{Q}$ แล้วช่วง $I_{qq'}:=[q,q']$ ใน $\overline{P}$ เป็นแลตทิซ
3. แต่ละ $x \in P \setminus Q$ จะมี $q,q' \in P$ เพียงคู่เดียวซึ่งถ้า q' ปกคลุม q ใน $\overline{Q}$ แล้ว $x \in I_{qq'}$

บทนิยาม 3.2.7 ให้ $\overline{P}$ เป็น majority order เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น *stiff* ถ้า $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย majority operation m เพียง operation เดียว

ทฤษฎีบท 3.2.7 [7] ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับและ $\overline{P}$ เป็น directed แล้ว $\overline{P}$ เป็น stiff ก็ต่อเมื่อ $\overline{P}$ เป็นแลตทิซแจกแจง

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ เป็น directed

ให้ $\overline{P}$ เป็น stiff แล้ว $\mathrm{Pol}(\leq)$ ประกอบด้วย majority operation m เพียง operation เดียว ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\overline{P}$ เป็นแลตทิซ ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z \in P$ แต่เพราะ $\overline{P}$ เป็นแลตทิซจึงเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z \in P$

ให้ $x,y,z\in P$ และให้ $a:=x\wedge(y\vee z)$, $b:=x\wedge y$ และ $c:=x\wedge z$ แล้ว $b\le x, b\le y, c\le x$ และ $c\le z$ ทำให้ได้ว่า $b\vee c\le x$ และ $b\vee c\le y\vee z$ ซึ่งแสดงว่า $b\vee c$ เป็นขอบเขตล่างของ x และ $y\vee z$ แต่เพราะว่า a เป็นขอบเขตล่างมากสุดของ x และ $y\vee z$ ดังนั้น $a\ge b\vee c$ นั่นคือ $x\wedge(y\vee z)\ge(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็นแลตทิซแจกแจง

ในการพิสูจน์บทกลับให้ $\overline{P}$ เป็นแลตทิซแจกแจง แล้วโดยบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $m_\lambda : P^3\to P$ และ $m_u : P^3\to P$ ซึ่งนิยามโดย $m_\lambda(x,y,z)=xy+xz+yz$ และ $m_u(x,y,z)=[x+y][x+z][y+z]$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z\in P$ เป็น isotone majority บน $\overline{P}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\overline{P}$ เป็น stiff

ให้ m เป็น isotone majority บน $\overline{P}$ แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.1 ทำให้ได้ว่า $m_l(x,y,z)\le m(x,y,z)\le m_u(x,y,z)$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z\in P$ และเพราะว่า $\overline{P}$ เป็นแลตทิซแจกแจง ดังนั้น

$$\begin{aligned} m_\lambda(x,y,z)=xy+xz+yz &= xy+([x+y]z) \\ &= \big[xy+(x+y)\big]\big[xy+z\big] \\ &= \big[[(x+y)+x][(x+y)+y]\big]\big[[x+z][y+z]\big] \\ &= \big[[x+y][x+y]\big][x+z][y+z] \\ &= [x+y][x+z][y+z] \\ &= m_u(x,y,z) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $m_\lambda(x,y,z)=m(x,y,z)=m_u(x,y,z)$ สำหรับทุกๆ $x,y,z\in P$ เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็น stiff

3.3 Monotone Clones of Strings

ในหัวข้อนี้เราศึกษาผลงานวิจัยของ C. Ratanaprasert ใน [10] ซึ่งท่านได้นิยามกลุ่มของเซตอันดับซึ่งเป็นภาคยืดขยายลักษณะหนึ่งของ fences โดยให้ชื่อเรียกว่า string และได้ศึกษาสมบัติของ clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้โดยแสดงว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด นอกจากนี้ยังใช้สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของ string แสดงว่าเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับเป็นเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดเซตหนึ่งของ clone ของ string

บทนิยาม 3.3.1 เราเรียกเซตอันดับ $\overline{P}=(P;\leq)$ ว่า *string* ถ้ามีเซตจำกัด I ของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $P=\cup(P_i \mid i\in I)$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $(P_i;\leq)$ เป็นโซ่ สำหรับแต่ละ $i\in I$
2. ถ้า i เป็นตัวตามหลังของ j ใน I แล้ว $P_i \cap P_j=\{a\}$ โดยที่ a เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่มหรือ สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มใน $\overline{P}$ และ
3. ถ้า $i\neq j$ และ i ไม่เป็นตัวตามหลังของ j ใน I แล้ว $P_i \cap P_j=\phi$

บทนิยาม 3.3.2 ให้ $\overline{P}=(P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ $d:P^2\to P$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $d(x,y) = \min\{|F| \mid F$ เป็น fence จาก x ไป y$\}$ สำหรับทุก ๆ $x, y\in P$ เราเรียก d ว่า*ฟังก์ชันระยะทาง*(*distance function*) บน P

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันระยะทาง d บนเซตอันดับผลคูณ P^n คือฟังก์ชัน $d:(P^n)^2\to P$ ซึ่งกำหนดโดย $d(\overline{x},\overline{y})=\max\{d(x_i,y_i) \mid i=1,\ldots,n\}$
สำหรับทุก ๆ $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ และ $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ ใน P^n

ถ้าฟังก์ชัน $\varphi:P\to P$ สอดคล้องอสมการ $d(x,y)\geq d(\varphi(x),\varphi(y))$ สำหรับทุก ๆ x และ y ใน P เรากล่าวว่า φ *ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง*(*preserve the distance function*) และกล่าวว่าเซตอันดับจำกัด $\overline{P}=(P;\leq)$ สอดคล้อง*สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทาง* (*the preservation the distance function property*) ถ้าทุก ๆ ฟังก์ชันยืนยงอันดับที่นิยามบน $\overline{P}$ ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง นั่นคือถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $f:P^n\to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับซึ่งนิยามบน $\overline{P}$ แล้ว $d(\overline{x},\overline{y})\geq d(f(\overline{x}),f(\overline{y}))$ สำหรับทุก ๆ $\overline{x},\overline{y}$ ใน P^n

ทฤษฎีบท 3.3.1 [10] ทุก ๆ ฟังก์ชันยืนยงอันดับที่นิยามบน string ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $f:P^n\to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับที่นิยามบน string $\overline{P} = (P=\bigcup_{i\in I}P_i;\leq)$ และให้ $x_i\in P, y_i\in P$ สำหรับ i = 1,…,n

ถ้า $d(\overline{x},\overline{y})=\max\{d(x_i,y_i) \mid i=1,\ldots,n\}=0$ แล้ว $d(x_i,y_i)=0$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n ทำให้ได้ว่า $x_i = y_i$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันดังนั้น $f(x_1,\ldots,x_n)=f(y_1,\ldots,y_n)$ เพราะฉะนั้น $d(f(\overline{x}),f(\overline{y}))=0\leq d(\overline{x},\overline{y})$

ถ้า $d(x_i, y_i) \le 1$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,\ldots,n$ โดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปเราอาจสมมติว่ามี $r \in \{1,\ldots,n\}$ ซึ่ง $x_i \le y_i$ สำหรับ $i = 1,\ldots,r$ และ $x_i \ge y_i$ สำหรับ $i = r+1, r+2,\ldots,n$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับดังนั้น

$$f(x_1,\ldots,x_n) \le f(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_n) \ge f(y_1,\ldots,y_n)$$

และ

$$f(x_1,\ldots,x_n) \ge f(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n) \le f(y_1,\ldots,y_n)$$

นั่นคือ

$$f(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n) \le f(x_1,\ldots,x_n) \le f(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$$

และ

$$f(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n) \le f(y_1,\ldots,y_n) \le f(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$$

เนื่องจาก $f(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n) \le f(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$ และโดยบทนิยามของ string จะได้ว่ามี $i \in I$ ซึ่ง

$$\{(f(x_1,\ldots,x_n), f(x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_n), f(y_1,\ldots,y_r,x_{r+1},\ldots,x_n), f(y_1,\ldots,y_n)\} \subseteq P_i$$

แต่ $(P_i;\le)$ เป็นโซ่ดังนั้น $f(x_1,\ldots,x_n) \le f(y_1,\ldots,y_n)$ หรือ $f(y_1,\ldots,y_n) \le f(x_1,\ldots,x_n)$ เพราะฉะนั้น $d(f(x_1,\ldots,x_n), f(y_1,\ldots,y_n)) \le 1$

ถ้า $1 \le d(x_i, y_i) = m_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,\ldots,n$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติ ว่า $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_n$ และให้

$$x_1 = s_{01} \le s_{11} \ge s_{21} \le . \;\; . \;\; . \ge s_{m_1 1} = y_1,$$
$$x_2 = s_{02} \ge s_{12} \le s_{22} \ge . \;\; . \;\; . \le s_{m_1 2} \ge s_{(m_1+1)2} \le . \;\; . \;\; . \ge s_{m_2 2} = y_2,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = s_{0n} \le . \;\; . \;\; . \ge s_{m_1 n} \le . \;\; . \;\; . \ge s_{m_2 n} \le . \;\; . \;\; . \ge s_{m_n n} = y_n$$

เป็น minimum size fence จาก x_i ไป y_i สำหรับทุก ๆ $i = 1,\ldots,n$ เราจะสร้าง fence จาก x_i ไป y_i ได้ใหม่ดังนี้

$$x_1 = s_{01} \le s_{21} \ge s_{31} \le . \ . \ . \ge s_{m_1 1} \le \ldots \ge s_{m_n 1} = y_1,$$
$$x_2 = s_{02} \ge s_{22} \le s_{32} \ge . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ge s_{m_2 2} = y_2,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = s_{0n} \le s_{2n} \ge s_{3n} \le . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ge s_{m_n n} = y_n$$

โดยที่ $s_{(m_i+j)i} = y_i$ ทุก $i = 1,\ldots,n$ และ $1 \le m_i \le m$, $j \ge 1$ และ $m_i + 1 \le m_i + j \le m_n$
เนื่องจาก $d(s_{ij}, s_{(i+1)j}) \le 1$ สำหรับทุก ๆ $i, j = 0,1,\ldots,n$ ดังนั้น
$d(f(s_{i1},\ldots,s_{in}), f(s_{(i+1)j},\ldots,s_{(i+1)n})) \le 1$ สำหรับ $i = 0,1,\ldots,n$ และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับจะได้ว่า

$$f(s_{01},\ldots,s_{0n}) \le f(s_{11},\ldots,s_{1n}) \ge f(s_{21},\ldots,s_{2n}) \le . \ . \ . \ge f(s_{m_n 1},\ldots,s_{m_n n})$$

เป็น fences จาก $f(x_1,\ldots,x_n) = f(s_{01},\ldots,s_{0n})$ ถึง $f(y_1,\ldots,y_n) = f(s_{m_b 1},\ldots,s_{m_n n})$ ที่มีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ m_n ซึ่งแสดงว่า $d(f(x_1,\ldots,x_n), f(y_1,\ldots,y_n)) \le m_n$ เพราะฉะนั้น

$d(f(x_1,\ldots,x_n), f(y_1,\ldots,y_n)) \le m_n$

ให้ $\overline{P} =< P = \cup(P_i \mid i \in I) ; \le >$ เป็น string of lattices และ $<^*$ เป็นอันดับบนเซตของจำนวนเต็มบวกที่เป็นเซตจำกัด นิยาม $\le^* \subseteq P \times P$ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $x, y \in P_i$ และ i เป็นจำนวนคู่แล้ว $x \le^* y$ ก็ต่อเมื่อ $x \le y$,

2. ถ้า $x, y \in P_i$ และ i เป็นจำนวนคี่แล้ว $x \le^* y$ ก็ต่อเมื่อ $x \ge y$,

และ 3. ถ้า $x \in P_i$ และ $y \in P_j$ แล้ว $x \le^* y$ ก็ต่อเมื่อ $i <^* j$

เนื่องจาก $\le$ และ $<^*$ เป็นอันดับดังนั้นจึงแสดงได้ไม่ยากว่า $\le^*$ เป็นอันดับบน P และจะได้ว่าโครงสร้าง $L = (P;\le^*)$ เป็นแลตทิซ

ต่อไปนิยาม $\wedge \subseteq (P;\le^*)^2$ และ $\vee \subseteq (P;\le^*)^2$ สำหรับทุก ๆ x และ y ในแลตทิซ $(P;\le^*)$ ดังนี้

$x \vee y$ แทนขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{x, y\}$

และ $x \wedge y$ แทนขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{x, y\}$

ให้ $m : P^3 \to P$ นิยามสำหรับทุก ๆ $(x, y, z) \in P^3$ โดย

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

หรือ $m(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ (*)

แล้ว m เป็น majority functions บน $(P;\leq^{*})$ และสังเกตได้ว่า majority function นี้เป็นฟังก์ชันผลประกอบของฟังก์ชันทวินาม

และจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งรายละเอียดในการพิสูจน์ไม่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ จึงขอกล่าวโดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.3.2[10] clone ทางเดียวของ string of lattices ประกอบด้วย order-preserving majority function

ผลงานวิจัยบางส่วนของ Baker และ Pixley ใน [1] ทำให้เราสรุปได้ว่า clone บนเซตจำกัดเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดถ้า clone นั้นประกอบด้วย near unanimity functions ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า clone ทางเดียวของ string of lattices ก่อกำเนิดแบบจำกัด และโดยการใช้สมบัติยืนยงฟังก์ชันระยะทางของ string ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งจะกล่าวไว้โดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.3.3[10] ให้ $\overline{P} =< P = \cup(P_i \mid i \in I) ;\leq >$ เป็น string และ $a,b,u,v \in P$ โดยที่ $d(u,v) \leq d(a,b)$ แล้วจะมีฟังก์ชันยืนยงอันดับ $f : P \to P$ ซึ่ง $f(a) = u$ และ $f(b) = v$

ทฤษฎีบท 3.3.4[10] clone ทางเดียวของ string ก่อกำเนิดแบบจำกัดโดย $C_1 \cup \{m\}$ เมื่อ C_1 เป็นเซตของฟังก์ชันเอกนามที่ยืนยงอันดับทั้งหมดและ m เป็น majority operation นิยามใน (*)

เพราะว่า majority function ที่นิยามใน(*) เป็นฟังก์ชันผลประกอบของฟังก์ชันทวินาม b ดังนั้น $m \in [C_2]$ โดยที่ $[C_2]$ เป็น clone บน P ก่อกำเนิดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับบน P ทั้งหมดซึ่งเป็นเซตจำกัด และเพราะว่า $[C_1] \subseteq [C_2]$ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $Pol(\leq)$ ก่อกำเนิดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับ นั่นคือ $Pol(\leq) = [C_2]$ ทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.3.5[10] clone ทางเดียวของ string ก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบน string

3.4 Algebraic Properties of Crowns and Fences

ในหัวข้อนี้เราศึกษาผลงานวิจัยของ J. Demetrovics และ L. Ronyai ใน [6] ซึ่งท่านได้พิสูจน์ว่า clone ทางเดียวของ fence และ crown เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยแสดงการสร้างเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดของ clone นอกจากนี้ยังแสดงด้วยว่า clone ทางเดียวของ fence ประกอบด้วย majority function แต่ clone ของ crown เป็น clone ที่มีลักษณะพิเศษเพราะเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดแต่ไม่มีฟังก์ชันใดใน clone ที่เป็น near unanimity function เราจะเริ่มด้วยการให้บทนิยามต่อไปนี้

ข้อตกลง ให้ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวก เราใช้สัญลักษณ์ $F_n = \{0,1,\ldots,n\}$ เป็น up-fence และ $G_m = \{0,1,\ldots,m\}$ เป็น down-fence

บทนิยาม 3.4.1 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ สำหรับ $x, y \in P$ ถ้ามีจำนวนเต็มบวกน้อยสุด n และฟังก์ชันยืนยงอันดับ $f : F_n \to P$ โดยที่ $f(0) = x$ และ $f(n) = y$ เราจะเรียก n ว่า *up-distance* จาก x ไป y และเขียนแทน n ด้วยสัญลักษณ์ $D_p(x, y)$ และถ้ามีจำนวนเต็มบวกน้อยสุด m และฟังก์ชันยืนยงอันดับ $f : G_m \to P$ โดยที่ $f(0) = x$ และ $f(m) = y$ เราจะเรียก m ว่า *down-distance* จาก x ไป y และเขียนแทน m ด้วยสัญลักษณ์ $d_p(x, y)$

บทนิยาม 3.4.2 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $f : P \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เราจะเรียก f ว่า *retraction* ถ้า $f(f(x)) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$ และในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า Im(f) เป็น *retract* ของ P

บทแทรก 3.4.1[6] ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ F_n และ G_n เป็น up-fence และ down-fence ตามลำดับในเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ แล้ว

1. F_n เป็น retract ของ G_{n+1}

2. G_n เป็น retract ของ F_{n+1}

3. F_n เป็น retract ของ F_{n+1}

4. G_n เป็น retract ของ G_{n+1}

บทพิสูจน์ เราจะแสดงว่า F_n เป็น retract ของ G_{n+1} สำหรับกรณีอื่น ๆ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ให้ $f : G_{n+1} \to G_{n+1}$ นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 0 \\ x & ; x \neq 0 \end{cases}$ สำหรับทุก ๆ $x \in G_{n+1}$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ให้ $x, y \in G_{n+1}$ ซึ่ง $x \leq y$ ถ้า $y = 0$ แล้ว $x \in \{0,1\}$ ทำให้ได้ว่า $f(x) = y = f(y)$ ดังนั้น $f(x) \leq f(y)$ และถ้า $y \neq 0$ แล้ว $x \neq 0$ ดังนั้น $f(x) = x \leq y = f(y)$ ทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ต่อไปจะแสดงว่า $f(f(x)) = f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in G_{n+1}$ ให้ $x \in G_{n+1}$ ถ้า $x = 0$ แล้ว $f(f(0)) = f(1) = 1 = f(0)$ และถ้า $x = 1$ แล้ว $f(f(1)) = f(0) = 0 = f(1)$ ทำให้ได้ว่า f เป็น retraction และ $Im(f) = F_n$ ซึ่ง F_n เป็น retract ของ G_{n+1}

ทฤษฎีบท 3.4.2[6] ให้ F เป็น fence แล้ว F จะมี $m : F^3 \to F$ เป็น order-preserving majority function เพียง operation เดียว

โดยการใช้ retraction เป็นเครื่องมือช่วยในการแสดงว่า clone ทางเดียวของ fence ก่อกำเนิดแบบจำกัด ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งจะกล่าวโดยละการพิสูจน์ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.4.3[6] clone ทางเดียวของ fence ก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบน fence

บทที่ 4
เซตอันดับความสูง 1

ให้ P เป็นเซต ขอทบทวนว่าความสัมพันธ์ทวินาม $\leq\ \subseteq P \times P$ บน P เป็นอันดับ ถ้า $\leq$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน ปฏิสมมาตรและถ่ายทอดและเรียกโครงสร้าง $\overline{P} = (P;\leq)$ ว่าเซตอันดับ และถ้า $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียกเซต Pol($\leq$) ของฟังก์ชันยืนยงอันดับทั้งหมดบน P ว่า clone ทางเดียวบน P

ให้ $\overline{A} = (P;(f_i^{\overline{P}})_{i\in I})$ ปื้นพีชคณิตจำกัด ถ้าเราสามารถนิยามอันดับ $\leq$ บน P ที่ทำให้ term clone operations บน P คือ clone ทางเดียว Pol($\leq$) แล้วเราจะเรียก $\overline{A}$ ว่าพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$

ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น*เซตอันดับความสูง* 1 (*ordered set of height* 1) ถ้า $\overline{P}$ ไม่มีโซ่ขนาด 3 เป็นเซตอันดับย่อย แล้วจะเห็นว่า แต่ละสมาชิกของเซตอันดับความสูง 1 จะเป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มหรือสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม ตัวอย่างของเซตอันดับความสูง 1 ที่รู้จักกันดีและศึกษามาก่อนหน้าแล้วคือ fence และ crown ซึ่งเป็นกลุ่มของเซตอันดับที่มีความสำคัญมากในการศึกษาทางทฤษฎีของเซตอันดับจำกัดซึ่งเกี่ยวกับความต่อเนื่องและความสมมาตร

ในบทนี้เราจะจำแนกเซตอันดับความสูง 1 ทั้งหมดที่เป็น majority orders และตอบคำถามข้อ 1-4 ที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 (หน้า 3) ข้างต้น สำหรับกลุ่มของเซตอันดับกลุ่มนี้โดยใช้รูปแบบหรือแผนภาพของ crown เป็นตัวกำหนด

4.1 majority orders ความสูง 1

ในบทที่ 3 เราได้แสดงผลงานวิจัยของ B.A. Davey ใน [3] ซึ่งศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรูปลักษณ์ของแผนภาพของเซตอันดับ $\overline{P} = (P;\leq)$ กับความเป็นคอนกรูเอนซ์มอดูล่าร์ของวาไรตี $V(\overline{A})$ ที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตทางเดียว $\overline{A} = (P;(f_i^{\overline{P}})_{i\in I})$ ซึ่งสัมพัทธ์กับ $\overline{P}$ และใน [7] Z. Furedi และ I.G. Rosenberg ได้บอกเงื่อนไขจำเป็นของเซตอันดับที่เป็น majority orders

ในหัวข้อนี้ เราได้ขยายผลที่กว้างกว่าในกลุ่มของเซตอันดับความสูง 1 กล่าวคือเราบอกเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอของเซตอันดับความสูง 1 ที่จะเป็น majority orders ซึ่งทำให้ได้ว่าเงื่อนไขของ clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ที่จะเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด นอกจากนี้เรายังบอกความสัมพันธ์ของรูปลักษณ์ของแผนภาพของเซตอันดับความสูง 1 กับความเป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจงของวาไรตี $V(\overline{A})$ ที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับความสูง 1

เราจะเริ่มต้นด้วยบทนิยามที่จำเป็นสำหรับการศึกษาในหัวข้อนี้

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับที่ไม่เป็นปฏิโซ่ เรากล่าวว่า $\overline{P}$ เป็น*เซตอันดับความสูง* 1 (*ordered set of height* 1) ถ้า $|P| \geq 2$ และ $\overline{P}$ ไม่มีโซ่ขนาด 3 เป็นเซตอันดับย่อย

บทนิยาม 4.1.2 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 และ x, y เป็นสมาชิกของ P *วิถี* (*path*) จาก x ไป y คือ up-fence หรือ down-fence จาก x ไป y และเราเรียก $\overline{P}$ ว่า tree ถ้าแต่ละคู่ x, y ใน P มีวิถีเพียงวิถีเดียวระหว่างสมาชิกทั้งสอง

สังเกตจากนิยามข้างต้นจะเห็นว่าถ้าเซตอันดับ $\overline{P}$ เป็น tree แล้ว $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับแบบต่อ
เนื่อง แต่บทกลับไม่เป็นจริง เราได้บทกลับสำหรับเซตอันดับความสูง 1 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้า $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 แบบต่อเนื่องและ $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อยแล้ว $\overline{P}$ เป็น tree

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 และ $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย นั่นคือถ้า $B \subseteq P$ แล้ว $(B;\leq)$ ไม่เป็น crown

สมมติ $\overline{P}$ ไม่เป็น tree แล้วจะมี x, y ใน P โดยที่ $x \neq y$ ซึ่งมีวิถีอย่างน้อย 2 วิถีที่ต่างกันจาก x ไป y แต่เพราะ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 ดังนั้นวิถีทั้งสองจะต้องเป็น up-fence หรือ down-fence เหมือนกันจาก x ไป y และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปจะขอสมมติว่าวิถีทั้งสองเป็น up-fence ให้ $P_1: x \leq x_1 \geq x_2 \leq x_3 \geq \ldots \leq x_m = y$ และ $P_2 : x \leq y_1 \geq y_2 \leq y_3 \geq \ldots \leq y_n = y$ เป็นวิถีที่ต่างกันจาก x ไป y

ถ้า P_1 และ P_2 ไม่มีจุดภายในวิถี แล้ว P_1 และ P_2 จะเป็นวิถีเดียวกันนั่นคือโซ่ $x \leq y$ ขนาด 2 ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับที่สมมติว่า P_1 และ P_2 ต่างกัน ดังนั้นทั้ง P_1 และ P_2 ต้องมีจุดภายในวิถี

<u>กรณี 1</u> ไม่มีจุดภายในของ P_1 และ P_2 ที่ซ้ำกัน นั่นคือ $\{x_1,...,x_{m-1}\} \cap \{y_1,...,y_{n-1}\} = \phi$ แล้ว $x \leq x_1 \geq x_2 \leq x_3 \geq ... \leq y = x_m \geq y_{n-1} \leq y_{n-2} \geq ... \leq y_1 \geq x$ เป็นวิถีจาก x ไป x ซึ่งทำให้ได้ว่าเซตอันดับย่อย $(\{x, x_1,..., y, y_{n-1},..., y_1\}; \leq)$ ของ $\overline{P}$ เป็น crown จึงเกิดข้อขัดแย้งกับข้อกำหนดว่า $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย

<u>กรณี 2</u> มีจุดภายในของ P_1 และ P_2 ซ้ำกัน

ให้ $1 \leq j \leq m$ เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด ซึ่ง $x_j = y_k$ สำหรับบาง $1 \leq k \leq n$ แล้ว $\{x_1,...,x_{j-1}\} \cap \{y_1,...,y_{k-1}\} = \phi$ ทำให้เราได้วิถีจาก x ไป x_j 2 วิถีซึ่งไม่มีจุดภายในซ้ำกันดังนี้ $x \leq x_1 \geq x_2 \leq x_3 \geq ... \leq x_j = y_k$ และ $x \leq y_1 \geq y_2 \leq y_3 \geq ... \leq y_k = x_j$ แล้วโดยกรณี 1 จะได้ว่า $\overline{P}$ มี crown เป็นเซตอันดับย่อยซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด

ไม่ว่ากรณีใดเราจะได้ว่า $\overline{P}$ เป็น tree

โดยทฤษฎีบท 4.1.1 และบทนิยามของ tree-like (บทนิยาม 3.2.6) จะเห็นว่าเซตอันดับความสูง 1 แบบต่อเนื่อง $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็น tree ก็ต่อเมื่อ $\overline{P}$ เป็น tree-like ดังนั้นสำหรับเซตอันดับความสูง 1 ที่เป็น tree หรือนั่นคือเป็น tree-like เราจะเรียกว่า *tree ความสูง* 1 (*tree of height* 1)

บทนิยาม 4.1.3 ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็น tree ความสูง 1 ที่มี reach n ให้ $F = \{a_0,..., a_n\}$ เป็น maximal size fence ใน $\overline{P}$ และ $a, x \in P$

1. เราจะใช้สัญลักษณ์ $F_a(x)$ แทน fence ที่มีจุดเริ่มต้นที่ a และ $x \in F_a(x)$ และสำหรับทุก ๆ สมาชิก $y \in F_a(x)$ จะได้ $d(a_0, y) > d(a_0, a)$

2. เราใช้สัญลักษณ์ $L_a(x)$ แทนจำนวนเส้นใน fence จาก a ไปสิ้นสุดที่ x

3. จะเรียก a ใน P ว่า *จุดปลาย* ถ้า $\deg(a) = 1$

4. เรียก a ใน P ว่า *node* ถ้า a เป็นจุดปลาย หรือ $\deg(a) \geq 3$

บทนิยาม 4.1.4 ให้ $\overline{X} := (i_1,\ldots,i_k,\ldots)$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เราจะเรียก $\overline{X}$ ว่า *position sequence* ถ้ามีจำนวนเต็ม $k \geq 1$ ซึ่ง

1. $i_j = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \geq k$ และ
2. $i_j \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $j < k$

และเราอาจเขียนแทน $\overline{X} = (i_1,\ldots,i_k,\ldots,0,0,\ldots)$ ด้วย $\overline{X} = i_1 i_2 \ldots i_k$ และเรียก k ว่าความยาวของ $\overline{X}$

เรานิยามอันดับ $\leq^*$ บนเซตของ position sequences ทั้งหมดซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละคู่ position sequences $\overline{X} = (i_{x_1}, i_{x_2},\ldots,i_{x_m},\ldots)$ และ $\overline{Y} = (i_{y_1}, i_{y_2},\ldots,i_{y_n},\ldots)$ แบบ lexicographic order ดังนี้

$\overline{X} \leq^* \overline{Y} \Leftrightarrow$ 1. $i_{x_1} < i_{y_1}$ หรือ

2. มีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด k ซึ่ง $i_{x_j} = i_{y_j}$ สำหรับ $j < k$ และ $i_{x_k} \leq i_{y_k}$

สังเกตว่าการนิยามอันดับแบบ lexicographic order จะได้อันดับที่เป็น *totally order* หรือก็คือโซ่ เพราะว่าถ้า $\overline{X} = (i_1, i_2,\ldots,i_n,\ldots)$ และ $\overline{Y} = (j_1, j_2,\ldots,j_m,\ldots)$ เป็น position sequences ซึ่ง $\overline{X} \neq \overline{Y}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด k ซึ่ง $i_k \neq j_k$ และดังนั้น $i_t = j_t$ สำหรับ $t < k$ แต่เพราะ i_k และ j_k เป็นจำนวนเต็มบวกดังนั้น $i_k < j_k$ หรือ $j_k < i_k$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\overline{X} \leq^* \overline{Y}$ หรือ $\overline{Y} \leq^* \overline{X}$

บทนิยาม 4.1.5 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็น tree ความสูง 1 ที่มี reach n และ $F = \{a_0,\ldots,a_n\}$ เป็น maximal size fence ใน $\overline{P}$ เราจะกำหนด position sequence ให้กับแต่ละ node ใน $\overline{P}$ แบบอุปนัยดังนี้

1. กำหนด position sequence สำหรับ a_0 คือ $(0,0,\ldots)$ หรือ 0 และถ้า $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_s},a_n\}$ เป็นเซตของ node ทั้งหมดใน $F - \{a_0\}$ โดยที่ $L_{a_0}(a_{i_1}) < L_{a_0}(a_{i_2}) < \ldots < L_{a_0}(a_{i_s}) < L_{a_0}(a_n)$ แล้วเรากำหนด position sequence ของ a_{i_j} สำหรับ $1 \leq j \leq s$ คือ $(j,0,\ldots)$ หรือ j และ position sequence ของ a_n คือ $(s+1,0,\ldots)$ หรือ $s+1$

2. ถ้า $a \in P$ เป็น node ซึ่งมี position sequence คือ $i_1 i_2 \ldots i_m$ สำหรับบาง $m \geq 1$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปเราอาจสมมติให้ a เป็น minimal node เราจะกำหนด position sequence ให้กับ node ตัวถัดจาก a ดังนี้

ให้ $\overline{F}$ เป็น fence ซึ่ง $a \in \overline{F}$ โดยที่แต่ละ node b ใน $\overline{F}$ จะมีจำนวนเต็มบวก i_m ที่ทำให้ position sequence ของ b คือ $i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m$ และเนื่องจาก a เป็น minimal node ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม $r \geq 1$ และ $c_1, \ldots, c_r \in P - \overline{F}$ ซึ่ง $c_i > a$ สำหรับ $i \in \{1, \ldots, r\}$

ให้ $F_a(c_i)$ เป็น maximal size fence ในเซต $\{F_a(c_j) \mid j \in \{1, \ldots, r\}\}$ และให้ $\{d_{i_1}, \ldots, d_{i_t}\}$ เป็นเซตของ node ทั้งหมดใน $F_a(c_i) - \{a\}$ โดยที่ $L_a(d_{i_1}) < \ldots < L_a(d_{i_t})$ แล้วเรากำหนด position sequence สำหรับแต่ละ d_{i_λ} เมื่อ $1 \leq \iota \leq t$ เป็น $i_1 i_2 \ldots i_m \lambda$

ถ้า N เป็น node ใน tree ความสูง 1 เราจะใช้สัญลักษณ์ $\overline{N}$ แทนตำแหน่งของ node N

ข้อสังเกต 4.1.1 ถ้า N_1 และ N_2 เป็น node ใน tree ความสูง 1 ซึ่ง $d(a_0, N_1) < d(a_0, N_2)$ แล้ว $\overline{N}_1 < \overline{N}_2$

บทพิสูจน์ ให้ $d(a_0, N_1) < d(a_0, N_2)$ แล้วจำนวนเส้นใน fence จาก a_0 ไป N_1 จะน้อยกว่าจำนวนเส้นใน fence จาก a_0 ไป N_2 และเพราะว่า N_1 และ N_2 เป็น node ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก $r < k$ ซึ่ง $i_1 i_2 \ldots i_r$ และ $i_1 i_2 \ldots i_k$ เป็น position sequences ของ N_1 และ N_2 โดยบทนิยาม 4.1.3 และบทนิยาม 4.1.4 ทำให้ได้ว่า $\overline{N}_1 < \overline{N}_2$

บทนิยาม 4.1.6 ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็น tree ความสูง 1 และให้ $a, N, M \in P$ โดยที่ N และ M เป็น node ใน $\overline{P}$ ถ้า $\overline{F} = \{N = b_1, b_2, \ldots, M = b_n\}$ เป็น fence จาก N ไปสิ้นสุดที่ M ซึ่ง

1. $a \in \overline{F} - \{M\}$
2. $d(a_0, N) < d(a_0, M)$ และ
3. ถ้ามี $T \in \overline{P}$ ซึ่ง T เป็น node แล้ว $T \notin \overline{F}$

เราจะเรียก N ว่า node ของ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ N_a

ทฤษฎีบท 4.1.2 ให้ $\overline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P};\leq)$ เป็น tree ความสูง 1 แล้ว $\overline{\mathrm{P}}$ เป็น majority order

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P};\leq)$ เป็น tree ความสูง 1 และให้ $\mathrm{m}:\mathrm{P}\times\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ นิยามสำหรับแต่ละ $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{P}$ ดังต่อไปนี้

1. $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{s}\in\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}$

$$\text{ถ้า}\begin{cases}\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} \neq \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}} \text{ แต่ } \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{s}} = \min(\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}) \text{ หรือ}\\ \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}} \text{ โดยที่ } \mathrm{x}\in \mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}(\mathrm{y}) \text{ และ } \mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{s}) = \min(\mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{x}),\mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{y}))\end{cases}$$

หรือ

2. $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}$ ถ้า $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}$ และ $\mathrm{x}\notin \mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}(\mathrm{y})$

และให้ $\mathrm{M}:\mathrm{P}\times\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ นิยาม ในทำนองกลับกันกับ m ดังนี้

$1'$. $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{s}\in\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}$

$$\text{ถ้า}\begin{cases}\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} \neq \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}} \text{ แต่ } \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{s}} = \max(\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}) \text{ หรือ}\\ \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}} \text{ โดยที่ } \mathrm{x}\in \mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}(\mathrm{y}) \text{ และ } \mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{s}) = \max(\mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{x}),\mathrm{d}(\mathrm{N}_{\mathrm{x}},\mathrm{y}))\end{cases}$$

หรือ

$2'$. $\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{y}$ ถ้า $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} = \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}$ และ $\mathrm{x}\notin \mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}(\mathrm{y})$

เราจะแสดงเฉพาะว่า m เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับส่วนการแสดงว่า M เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับทำได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ $\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathrm{P}$ ซึ่ง $\mathrm{x}\leq\mathrm{a}$ และ $\mathrm{y}\leq\mathrm{b}$ แล้วต้องแสดงว่า $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\leq\mathrm{m}(\mathrm{a},\mathrm{b})$

<u>กรณี 1</u> x และ y มี node ต่างกัน

ให้ N_{x} และ N_{y} เป็น node ของ x และ y ตามลำดับและโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติว่า $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} < \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}$ แล้วจะได้ว่า $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}$ เนื่องจาก $\mathrm{x}\leq\mathrm{a}$ ดังนั้น $\mathrm{a}\in\mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}$ และ $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}}\leq\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}}$ และเนื่องจาก $\mathrm{y}\leq\mathrm{b}$ ดังนั้น $\mathrm{b}\in\mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{y}}}$ และ $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}\leq\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{b}}$ และเพราะว่า $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{x}} < \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}$ ทำให้ได้ว่า $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{z}} < \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}}$ สำหรับทุก ๆ $\mathrm{z}\in\mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}$ และเพราะว่า $\mathrm{a}\in\mathrm{F}_{\mathrm{N}_{\mathrm{x}}}$ เพราะฉะนั้น $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{a}} < \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{y}} < \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{b}}$ ดังนั้น $\mathrm{m}(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \mathrm{a}$ ทำให้ได้ว่า $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}\leq\mathrm{a} = \mathrm{m}(\mathrm{a},\mathrm{b})$

<u>กรณี 2</u> x และ y มี node เดียวกัน แล้ว $N_x = N_y$ และ $x, y \in F_{N_x}$ และ c ไม่เป็น node สำหรับทุก ๆ $c \in F_{N_x} \setminus \{x, y\}$

<u>กรณี 2.1</u> $x \in F_{N_x}(y)$ หรือ $y \in F_{N_y}(x)$ เราจะพิสูจน์เฉพาะกรณี $x \in F_{N_x}(y)$ สำหรับกรณี $y \in F_{N_y}(x)$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติให้ $d(N_x, x) < d(N_x, y)$ ดังนั้น $m(x, y) = x$ เนื่องจาก $x \le a$ จะได้ว่า $a \in F_{N_x}(y)$ และ $d(N_x, x) \le d(N_x, a)$ และเพราะว่า $y \le b$ ดังนั้น $b \in F_{N_x}(y)$ และ $d(N_x, y) \le d(N_x, b)$ เนื่องจาก $d(N_x, x) < d(N_x, y)$ ทำให้ได้ว่า $d(N_x, z) < d(N_x, y)$ สำหรับทุก ๆ $z \in F_{N_x}(y)$ และเพราะว่า $a \in F_{N_x}(y)$ เพราะฉะนั้น $d(N_x, a) < d(N_x, y) \le d(N_x, b)$ ทำให้ได้ว่า $m(a, b) = a$ เพราะฉะนั้น $m(x, y) = x \le a = m(a, b)$

<u>กรณี 2.2</u> $x \notin F_{N_x}(y)$ และ $y \notin F_{N_y}(x)$ แล้วจากนิยามของ m จะได้ว่า $m(x, y) = x$ และ $m(a, b) = a$ เพราะฉะนั้น $m(x, y) = x \le a = m(a, b)$

ไม่ว่ากรณีใดจะได้ว่า m เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $\mu : P^3 \to P$ นิยามสำหรับ $x, y, z \in P$ โดย

$$\mu(x, y, z) = m(M(z, x), m(M(x, y), M(y, z)))$$

เนื่องจาก μ เป็นฟังก์ชันผลประกอบของ m และ M ซึ่งต่างเป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ดังนั้น μ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ จึงเหลือเพียงแสดงว่า μ เป็น majority operation

ให้ $x, y \in P$

<u>กรณี 1</u> ถ้า $\overline{N}_x \ne \overline{N}_y$ แล้ว $\overline{N}_x < \overline{N}_y$ หรือ $\overline{N}_y < \overline{N}_x$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปจึงขอสมมติว่า $\overline{N}_x < \overline{N}_y$ แล้ว $m(x, y) = x$ และ $M(x, y) = y$ ดังนั้น

$$\mu(x, x, y) = m(M((y, x), m(M(x, x), M(x, y))) = m(y, m(x, y)) = m(y, x) = x$$

$$\mu(x, y, x) = m(M((x, x), m(M(x, y), M(y, x))) = m(x, m(y, y)) = m(x, y) = x$$

$$\mu(y, x, x) = m(M((x, y), m(M(y, x), M(x, x))) = m(y, m(y, x)) = m(y, x) = x$$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $\overline{N}_x = \overline{N}_y$ และ $x \in F_{N_x}(y)$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติว่า $d(N_x, x) < d(N_x, y)$ แล้ว $m(x, y) = x$ และ $M(x, y) = y$ ซึ่งเราสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับกรณี 1 จะได้ว่า $\mu(x, x, y) = \mu(x, y, x) = \mu(y, x, x) = x$

<u>กรณี 3</u> ถ้า $\overline{N}_x = \overline{N}_y$ และ $x \notin F_{N_x}(y)$ แล้ว $m(x, y) = x$ และ $M(x, y) = y$ ซึ่งเราสามารถแสดงในทำนองเดียวกับกรณี 1 ได้ว่า $\mu(x, x, y) = \mu(x, y, x) = \mu(y, x, x) = x$

ไม่ว่ากรณีใดเราได้ว่า μ เป็น majority operation เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็น majority order

ทฤษฎีบท 4.1.3 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $\overline{P}$ เป็น tree
2. $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย
3. $\overline{P}$ เป็น majority order

บทพิสูจน์ $(2) \Rightarrow (1)$ โดยทฤษฎีบท 4.1.1 และ $(1) \Rightarrow (3)$ โดยทฤษฎีบท 4.1.2 และ $(3) \Rightarrow (2)$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.2.5

จากทฤษฎีบท 3.1.11 ใน [3] ทำให้สรุปได้ว่าถ้า $V(\overline{A})$ เป็นวาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอล $\overline{A} = (P;(f_i^{\overline{P}})_{i\in I})$ ซึ่งสมนัยกับเซตอันดับความสูง 1 $\overline{P}$ แล้ว $\overline{P}$ ไม่มี 2-crown เป็นเซตอันดับย่อย ส่วน K. Baker และ A. Pixley ได้พิสูจน์ใน [1] ว่าพีชคณิตซึ่ง term clone operation ประกอบด้วย majority operation จะก่อกำเนิดวาไรตีที่เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง และโดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้างต้นทำให้เราสามารถบอกเงื่อนไขเพียงพอสำหรับเซตอันดับความสูง 1 ที่จะทำให้วาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอลซึ่งสมนัยกับเซตอันดับความสูง 1 เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจงโดยใช้แผนภาพของ crown เป็นตัวกำหนดดังจะแสดงให้เห็นจริงในบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.1.4 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 และ $V(\overline{A})$ เป็นวาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิตอันดับพริมอล $\overline{A} = (P;(f_i^{\overline{P}})_{i\in I})$ ซึ่งสมนัยกับ $\overline{P}$ ถ้า $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อยแล้ว $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย แล้วโดยทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า $\overline{P}$ เป็น majority order และโดยผลงานวิจัยของ K. Baker และ A. Pixley ใน [1] ทำให้ได้ว่า $V(\overline{A})$ เป็นคอนกรูเอนซ์แจกแจง

ให้ $(P_i;\leq_i)_{i\in I}$ เป็น class ของ tree ความสูง 1 โดยที่ $P_i \cap P_j \neq \phi$ สำหรับ $i \neq j \in I$ และให้ $\mathbf{P} = \bigcup_{i\in I} P_i$ เป็นยูเนียนของเซตต่างสมาชิกของ $(P_i;\leq_i)_{i\in I}$ เรานิยาม $\leq \subseteq P \times P$ สำหรับแต่ละคู่สมาชิก x และ y ใน P โดย

$$x \leq y \Leftrightarrow \text{ มี } i \in I \text{ ซึ่ง } x, y \in P_i \text{ และ } x \leq_i y$$

เพราะว่า $\leq_i$ เป็นอันดับ สำหรับแต่ละ $i \in I$ ดังนั้น $\leq$ เป็นอันดับด้วย และเราเรียกเซตอันดับ (**P**; $\leq$) ว่า *forest-like order*

เราจะได้ทฤษฎีบทในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1.3 สำหรับ forest-like order ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.5 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $\overline{P}$ เป็น forest-like
2. $\overline{P}$ ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย
3. $\overline{P}$ เป็น majority order

บทพิสูจน์ การพิสูจน์ $(2) \Rightarrow (1)$ และ $(3) \Rightarrow (2)$ ทำได้ในทำนองเดียวกันกับของทฤษฎีบท 4.1.3 จึงเหลือที่จะแสดง $(1) \Rightarrow (3)$ ดังนี้

ให้ $(P_i;\leq_i)_{i\in I}$ เป็น class ของ tree ความสูง 1 และสำหรับแต่ละ $i \in I$ ให้ m_i และ M_i เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน P_i ที่นิยามดังในทฤษฎีบท 4.1.2 ตามลำดับ และนิยามฟังก์ชัน m: $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ สำหรับแต่ละ $x, y \in \mathbf{P}$ ดังนี้

$$m(x,y) = \begin{cases} m_i(x,y) & ; \text{ถ้ามี } i \in I \text{ ซึ่ง } x, y \in P_i, \\ x & ; \text{ถ้ามี } i, j \in I \text{ ซึ่ง } x \in P_i, y \in P_j \text{ และ } i \neq j \end{cases}$$

และให้ M: $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ นิยามในทำนองกลับกันกับ m ดังนี้

$$M(x,y) = \begin{cases} M_i(x,y) & ; \text{ถ้ามี } i \in I \text{ ซึ่ง } x, y \in P_i, \\ y & ; \text{ถ้ามี } i, j \in I \text{ ซึ่ง } x \in P_i, y \in P_j \text{ และ } i \neq j \end{cases}$$

เราจะแสดงว่า m เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน **P** ส่วนการแสดงว่า M เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ $x, y, a, b \in \mathbf{P}$ ซึ่ง $x \leq a$ และ $y \leq b$

<u>กรณี 1</u> มี $i \in I$ ซึ่ง $x, y \in P_i$ เนื่องจาก $x \leq a$ และ $y \leq b$ ทำให้ได้ว่า $a, b \in P_i$ ดังนั้น $m(x, y) = m_i(x, y)$ และ $m(a, b) = m_i(a, b)$ และเพราะว่า m_i เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน P_i เพราะฉะนั้น $m(x, y) = m_i(x, y) \leq m_i(a, b) = m(a, b)$

<u>กรณี 2</u> มี $i, j \in I$ ซึ่ง $x \in P_i$ และ $y \in P_j$ โดยที่ $i \neq j$ เนื่องจาก $x \leq a$ และ $y \leq b$ ทำให้ได้ว่า $a \in P_i$ และ $b \in P_j$ ดังนั้น $m(x, y) = y \leq b = m(a, b)$

ดังนั้นไม่ว่ากรณีใดจะได้ว่า m เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $\mu : \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}$ นิยามสำหรับ $x, y, z \in \mathbf{P}$ ดังนี้

$$\mu(x, y, z) = m(M(z, x), m(M(x, y), M(y, z)))$$

แล้วโดยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ μ ของทฤษฎีบท 4.1.2 เราจะได้ว่า μ เป็น isotone majority operation เพราะฉะนั้น $\overline{P}$ เป็น forest-like

4.2 สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับความสูง 1

ผลงานวิจัยของ C. Ratanaprasert ใน [10] ได้นิยามกลุ่มของเซตอันดับซึ่งเป็นภาคยืดขยายลักษณะหนึ่งของ fences โดยให้ชื่อเรียกว่า string และ string of lattices และได้ศึกษาสมบัติของ clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้โดยแสดงว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด นอกจากนี้ยังแสดงเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับทั้งหมดสำหรับ clones ของ strings โดยใช้สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของ string

ในหัวข้อนี้ เราจะใช้แนวความคิดจากผลงานวิจัยของ C. Ratanaprasert ใน [10] ดังกล่าวข้างต้น ศึกษาและจำแนกเซตอันดับซึ่งมีสมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างเซตก่อกำเนิดแบบจำกัดสำหรับ clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 4.3 ต่อไป

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับและ $d : P^2 \to P$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $d(x, y) = \min\{|F| \mid F$ เป็น fence จาก x ไป y$\}$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ เราเรียก d ว่า*ฟังก์ชันระยะทาง*(*distance function*) บน P

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันระยะทาง d บนเซตอันดับผลคูณ P^n คือฟังก์ชัน $d : (P^n)^2 \to P$ ซึ่งกำหนดโดย

$$d(\bar{x},\bar{y}) = \max\{d(x_i, y_i) \mid i = 1,...,n\}$$

สำหรับทุก ๆ $\bar{x} = (x_1,...,x_n)$ และ $\bar{y} = (y_1,...,y_n)$ ใน P^n

ถ้าฟังก์ชัน $\varphi : P \to P$ สอดคล้องอสมการ $d(x,y) \geq d(\varphi(x),\varphi(y))$ สำหรับทุก ๆ x และ y ใน P เราจะกล่าวว่า φ *ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง(preserve the distance function)* และจะกล่าวว่าเซตอันดับจำกัด $\bar{P} = (P;\leq)$ สอดคล้อง*สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทาง* (*the preservation the distance function property*) ถ้าทุก ๆ ฟังก์ชันยืนยงอันดับที่นิยามบน $\bar{P}$ ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง นั่นคือถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $f : P^n \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับนิยามบน $\bar{P}$ แล้ว $d(\bar{x},\bar{y}) \geq d(f(\bar{x}),f(\bar{y}))$ สำหรับทุก ๆ $\bar{x},\bar{y}$ ใน P^n

บทนิยาม 4.2.2 ถ้า $\bar{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ a, b, c, d เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันทั้งหมดของ P โดยที่ $a < b < d$ และ $a < c < d$ เราเรียกเซตอันดับย่อย $\{a,b,c,d\}$ ว่า *diamond*

ใน [10] C. Ratanaprasert ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทหนึ่ง(ทฤษฎีบท 3.3.1) ซึ่งกล่าวว่าทุก ๆ ฟังก์ยืนยงอันดับที่นิยามบน string จะยืนยงฟังก์ชันระยะทาง เราจะใช้แนวทางการพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้แสดงผลที่กว้างกว่า กล่าวคือเราจะจำแนกเซตอันดับที่มีสมบัติยืนยงฟังก์ชันระยะทางด้วย diamond ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.1 เซตอันดับ $\bar{P} = (P;\leq)$ สอดคล้องสมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางก็ต่อเมื่อ $\bar{P}$ ไม่มี diamond เป็นเซตอันดับย่อย

บทพิสูจน์ ให้ $\bar{P}$ เป็นเซตอันดับที่ไม่มี diamond เป็นเซตอันดับย่อยและให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $f : P^n \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับที่นิยามบน $\bar{P}$ และให้ $\bar{x} = (x_1,...,x_n)$ และ $\bar{y} = (y_1,...,y_n)$ เป็นสมาชิกใน P^n เราจะแสดงว่า $d(\bar{x},\bar{y}) \geq d(f(\bar{x}),f(\bar{y}))$

<u>กรณี 1</u> ถ้า $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$ แล้ว $d(x_i,y_i) = 0$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n ทำให้ได้ว่า $x_i = y_i$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันดังนั้น $f(x_1,...,x_n) = f(y_1,...,y_n)$ เพราะฉะนั้น $d(f(\bar{x}),f(\bar{y})) = 0 = d(\bar{x},\bar{y})$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $d(\bar{x},\bar{y}) = 1$ แล้ว $d(x_i,y_i) \leq 1$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,…,n$ และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปเราอาจสมมติว่ามี $r \in \{1,...,n\}$ ซึ่ง $x_i \leq y_i$ สำหรับ i = 1,…,r และ $x_i \geq y_i$ สำหรับ i = r+1, r+2,…,n เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับทำให้ได้ว่า

$$f(x_1,...,x_n) \le f(y_1,...,y_r,x_{r+1},...,x_n) \ge f(y_1,...,y_n)$$

และ

$$f(x_1,...,x_n) \ge f(x_1,...,x_r,y_{r+1},...,y_n) \le f(y_1,...,y_n)$$

นั่นคือ

$$f(x_1,...,x_r,y_{r+1},...,y_n) \le f(x_1,...,x_n) \le f(y_1,...,y_r,x_{r+1},...,x_n)$$

และ

$$f(x_1,...,x_r,y_{r+1},...,y_n) \le f(y_1,...,y_n) \le f(y_1,...,y_r,x_{r+1},...,x_n)$$

แต่ $\overline{P}$ ไม่มี diamond เป็นเซตอันดับย่อยดังนั้น $f(x_1,...,x_n) \le f(y_1,...,y_n)$ หรือ $f(x_1,...,x_n) \ge f(y_1,...,y_n)$ ทำให้ได้ว่า $d(f(\overline{x}),f(\overline{y})) \le 1$ เพราะฉะนั้น $d(f(\overline{x}),f(\overline{y})) \le 1$ $= d(\overline{x},\overline{y})$

<u>กรณี 3</u> ถ้า $1 < d(\overline{x},\overline{y}) = m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m และให้ $d(x_i,y_i) = m_i$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n แล้ว $m_i \le m$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n และโดยไม่เสียความเป็นนัยทั่วไปขอสมมติ $m_1 \le m_2 \le ... \le m_n \le m$ และให้

$$x_1 = s_{01} \le s_{11} \ge s_{21} \le . \quad . \quad . \ge s_{m_1 1} = y_1,$$

$$x_2 = s_{02} \ge s_{12} \le s_{22} \ge . \quad . \quad . \le s_{m_1 2} \ge s_{(m_1+1)2} \le . \quad . \quad . \ge s_{m_2 2} = y_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_n = s_{0n} \le . \quad . \quad . \ge s_{m_1 n} \le . \quad . \quad . \ge s_{m_2 n} \le . \quad . \quad . \ge s_{m_n n} = y_n$$

เป็น minimum size fence จาก x_i ไป y_i สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n โดยที่ $s_{(m_i+j)j} = y_i$ สำหรับทุก ๆ i = 1,…,n และทุก ๆ j = 1,…,n เนื่องจาก $d(s_{ij},s_{(i+1)j}) \le 1$ สำหรับทุก ๆ i, j $\in$ {0,1,…,n} และโดยกรณี 1 และกรณี 2 จะได้ว่า $d(f(s_{i1},...,s_{in}),f(s_{(i+1)1},...,s_{(i+1)n})) \le 1$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{0,1,…,n\}$ และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับดังนั้น

$$f(s_{01},...,s_{0n}) \le f(s_{11},..,s_{1n}) \ge f(s_{21},...,s_{2n}) \le . \quad . \quad . \ge f(s_{m_n 1},...,s_{m_n n})$$

เป็น fences จาก $f(x_1,...,x_n) = f(s_{01},...,s_{0n})$ ถึง $f(y_1,...,y_n) = f(s_{m_b 1},...,s_{m_n n})$ ที่มีขนาดน้อยกว่าหรือเท่ากับ m ซึ่งแสดงว่า $d(f(x_1,...,x_n),f(y_1,...,y_n)) \le m$ เพราะฉะนั้น $d(f(\overline{x}),f(\overline{y})) \le d(\overline{x},\overline{y})$

ไม่ว่ากรณีใดเราได้ว่า f สอดคล้องสมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทาง

ในการพิสูจน์บทกลับเราจะแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ให้ $\overline{P}$ เป็นเซตอันดับซึ่งมี $\{a,b,c,d\} \subseteq P$ โดยที่ $a<b<d$, $a<c<d$ และ $b \neq c$ และให้ $f:P^2 \to P$ นิยามโดย

$$f(t,x)=\begin{cases} a & ;x \ngeq d \text{ and } t \leq a \\ c & ;x \geq d \text{ and } t \leq a \end{cases} \quad , \quad f(t,x)=\begin{cases} b & ;x \ngeq d \text{ and } t \nleq a \text{ and } t \leq b \\ d & ;x \geq d \text{ and } t \nleq a \text{ and } t \leq b \end{cases} ,$$

$$f(t,x)=\begin{cases} b & ;t \nleq b \text{ and } x \ngeq d \\ d & ;t \nleq b \text{ and } x \geq d \end{cases}$$

เราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ให้ $x,y,s,t \in P$ ซึ่ง $x \leq s$ และ $y \leq t$

กรณี 1 ถ้า $x \leq a$

กรณี 1.1 ถ้า $y \ngeq d$ แล้ว $f(x,y)=a \leq f(s,t) \in \{a,b,c,d\}$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

กรณี 1.2 ถ้า $y \geq d$ แล้ว $t \geq d$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $f(x,y)=c$ และ $f(s,t)=d$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

กรณี 2 ถ้า $x \nleq a$ แต่ $x \leq b$ แล้ว $s \nleq a$

กรณี 2.1 ถ้า $y \ngeq d$ แล้ว $f(x,y)=b$ และเนื่องจาก $y \leq t$ ดังนั้น $t \ngeq d$ ทำให้ได้ $f(s,t)=b$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

กรณี 2.2 ถ้า $y \geq d$ แล้ว $t \geq d$ ดังนั้น $f(x,y)=d$ และ $f(s,t)=d$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

กรณี 3 ถ้า $x \nleq b$ แล้ว $s \nleq b$

กรณี 3.1 ถ้า $y \ngeq d$ แล้ว $f(x,y)=b$ และเนื่องจาก $y \leq t$ ดังนั้น $t \geq d$ ทำให้ได้ $f(s,t)=b$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

กรณี 3.2 ถ้า $y \geq d$ แล้ว $t \geq d$ และจะได้ว่า $f(x,y)=d$ และ $f(s,t)=d$ เพราะฉะนั้น $f(x,y) \leq f(s,t)$

ไม่ว่ากรณีใดเราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $d:P^2 \to P$ เป็นฟังก์ชันระยะทางบน P แล้วเนื่องจาก $(a,d),(b,c) \in P^2$ จะได้ว่า $f(a,d)=c \leq d=f(b,d) \geq f(b,c)=b$ ดังนั้น $d(f(a,d),f(b,c))=d(c,b)=2$ และ

$d((a,d),(b,c)) = \max\{d(a,b),d(d,c)\} = \max\{1,1\} = 1$ ดังนั้น $d(f(a,d),f(b,c)) \geq d((a,d),(b,c))$ แสดงว่า f ไม่ยืนยงฟังก์ชันระยะทางดังนั้น $\overline{P}$ ไม่สอดคล้องสมบัติยืนยงฟังก์ชันระยะทาง

สังเกตว่า diamond เป็นเซตอันดับที่มีโซ่ขนาด 3 เป็นเซตอันดับย่อย แต่เซตอันดับความสูง 1 ไม่มีโซ่ขนาด 3 เป็นเซตอันดับย่อย ดังนั้นเซตอันดับความสูง 1 จึงไม่มี diamond เป็นเซตอันดับย่อย ทำให้ได้บทแทรกของทฤษฎีบท 4.2.1 ดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.2.2 ถ้า $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 แล้ว $\overline{P}$ สอดคล้องสมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทาง

นอกจากนั้น string ที่นิยามดังใน [10] ซึ่งเป็นภาคยืดขยายลักษณะหนึ่งของ fence เป็นเซตอันดับที่ไม่มี diamond เป็นเซตอันดับย่อยเช่นกัน เราจึงได้ทฤษฎีบท 3.3.1 เป็นบทแทรกของทฤษฎีบท 4.2.1 ด้วยดังจะกล่าวสรุปในบทแทรก 4.2.3 ต่อไปนี้

บทแทรก 4.2.3 ทุกๆ ฟังก์ชันยืนยงอันดับบน string ยืนยงฟังก์ชันระยะทาง

4.3 Clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ก่อกำเนิดแบบจำกัด

K.A. Baker และ A.F. Pixley ใน [1] ได้พิสูจน์ว่า clone ที่มี near unanimity function เป็นสมาชิกจะเป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดและในหัวข้อ 4.1 เราพิสูจน์ได้ว่า clone ทางเดียวของ tree ความสูง 1 เป็น clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดเพราะมี majority operation เป็นสมาชิกของ clone

บทแทรกต่อไปนี้พิสูจน์โดย J. Demetrovics, Hannak และ L. Ronyai ใน [6] ซึ่งรายละเอียดของการพิสูจน์ใช้ความรู้ที่ไม่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ จึงขอกล่าวโดยละการพิสูจน์ไว้ดังนี้

บทแทรก 4.3.1[6] ให้ C เป็น clone ที่มี majority function m เป็นสมาชิก และ $H \subseteq C$ ถ้าสำหรับแต่ละ $g \in C$ และทุกๆ $\overline{x}, \overline{y} \in \mathrm{Dom}(g)$ โดยที่ $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ และ $\overline{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ จะมี $f \in [H]$ ซึ่ง $g(\overline{x}) = f(x)$ และ $g(\overline{y}) = f(y)$ แล้ว $[H \cup \{m\}] \supseteq C$

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงโดยใช้สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ที่เป็น majority orders ก่อกำเนิดแบบจำกัดด้วยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบนเซตอันดับความสูง 1

ทฤษฎีบท 4.3.2 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็น tree ความสูง 1 และ $a,b,u,v \in P$ ซึ่ง $d(u,v) \leq d(a,b)$ แล้วจะมีฟังก์ชันยืนยงอันดับ $f : P \to P$ ซึ่ง $f(a) = u$ และ $f(b) = v$

บทพิสูจน์ ให้ $a,b,u,v \in P$ โดยที่ $d(u,v) \leq d(a,b)$ และให้

$$F(u,v) = \{ u = N_{s_0} \leq N_{s_0+1} \geq N_{s_0+2} \leq \ldots \geq N_{s_0+k} = v\} \subseteq P$$

และ

$$F(a,b) = \{ a = N_{t_0} \leq N_{t_0+1} \geq N_{t_0+2} \leq \ldots \geq N_{t_0+m} = b\} \subseteq P$$

เป็น fence จาก u ไป v และ fence จาก a ไป b ตามลำดับ

ให้ $g : P \to F(a,b)$ นิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} x & ; x \in F(a,b) \\ a = N_{t_0} & ; x \notin F(a,b) \text{ และ } \overline{N}_x \leq \overline{N}_a \\ N_{t_0+i} & ; x \notin F(a,b) \text{ และ } i \text{เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง } \overline{N}_x \geq \overline{N}_{t_0+i} \end{cases}$$

จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $x, y \in P$ โดยที่ $x \leq y$

<u>กรณี 1</u> $x, y \in F(a,b)$ จะได้ว่า $g(x) = x$ และ $g(y) = y$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 2</u> $x, y \notin F(a,b)$

<u>กรณี 2.1</u> $\overline{N}_x \leq \overline{N}_a$ และ $\overline{N}_y \leq \overline{N}_a$ จะได้ว่า $g(x) = a$ และ $g(y) = a$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 2.2</u> มีจำนวนเต็มบวก i ซึ่ง $\overline{N}_x \geq \overline{N}_{t_0+i}$ และ $\overline{N}_y \leq \overline{N}_a$ จาก $x \leq y$ จะได้ว่า $\overline{N}_x \leq \overline{N}_y$ และทำให้ได้ $\overline{N}_{t_0+i} \leq \overline{N}_x \leq \overline{N}_y \leq \overline{N}_a$ ซึ่งแสดงว่า $\overline{N}_{t_0+i} \leq \overline{N}_a$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นกรณี 2.2 ไม่สามารถเกิดขึ้น

<u>กรณี 2.3</u> $\overline{N}_x \leq \overline{N}_a$ และมีจำนวนเต็มบวก i ซึ่ง $\overline{N}_y \geq \overline{N}_{t_0+i}$ จะได้ว่า $g(x) = a = N_{t_0}$ และ $g(y) = N_{t_0+i}$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 2.4</u> มีจำนวนเต็มบวก i ซึ่ง $\overline{N}_x \geq \overline{N}_{t_0+i}$ และมีจำนวนเต็มบวก j ซึ่ง $\overline{N}_y \geq \overline{N}_{t_0+j}$

ให้ $k = \min\{i, j\}$ แล้ว $g(x) = N_{t_0+k}$ และ $g(y) = N_{t_0+k}$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 3</u> $x \in F(a,b)$ และ $y \notin F(a,b)$ แล้ว $g(x) = x$

<u>กรณี 3.1</u> $\overline{N}_y \leq \overline{N}_a$ จะได้ว่า $g(y) = a = N_{t_0}$ เนื่องจาก $x \in F(a,b)$ ดังนั้นจะมี $i \in 0,\ldots,m$ ซึ่ง $x = N_{t_0+i}$ และเพราะว่า $x \leq y$ ทำให้ได้ $\overline{N}_x \leq \overline{N}_y \leq \overline{N}_a$ $\overline{N}_x \leq \overline{N}_a$ และเพราะ $x \in F(a,b)$ ดังนั้น $x = N_{t_0}$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 3.2</u> มีจำนวนเต็มบวก i ซึ่ง $\overline{N}_y \geq \overline{N}_{t_0+i}$ แล้ว $g(y) = N_{t_0+i}$ เนื่องจาก $x \in F(a,b)$ ดังนั้นจะมี $j \in 0,\ldots,m$ ซึ่ง $x = N_{t_0+j}$ และเพราะว่า $x \leq y$ ดังนั้น $\overline{N}_x \leq \overline{N}_y$ แต่ $x = N_{t_0+j}$ เราจึงได้ $\overline{N}_x = \overline{N}_{t_0+j}$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 4</u> $y \in F(a,b)$ และ $x \notin F(a,b)$ แล้ว $g(y) = y$

<u>กรณี 4.1</u> $\overline{N}_x \leq \overline{N}_a$ เนื่องจาก $y \in F(a,b)$ ดังนั้นจะมี $j \in 0,\ldots,m$ ซึ่ง $y = N_{t_0+j}$ จึงได้ว่า $g(x) = a = N_{t_0} \leq N_{t_0+j} = y = g(y)$ ซึ่งแสดงว่า $g(x) \leq g(y)$

<u>กรณี 4.2</u> มีจำนวนเต็มบวก i ซึ่ง $\overline{N}_x \geq \overline{N}_{t_0+i}$ จะได้ว่า $g(x) = N_{t_0+i}$ และเพราะว่า $x \leq y$ ดังนั้น $\overline{N}_{t_0+i} \leq \overline{N}_x \leq \overline{N}_y$ ทำให้ได้ $\overline{N}_{t_0+i} \leq \overline{N}_y$ และ $y \in F(a,b)$ ดังนั้น $y = N_{t_0+m}$ เพราะฉะนั้น $g(x) \leq g(y)$

ไม่ว่ากรณีใดเราจะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ต่อไปให้ $h: F(a,b) \to P$ นิยามโดย $h(x) = \begin{cases} u \ ; \ x = a, \\ x \ ; \ x \notin \{a,b\}, \\ v \ ; \ x = b \end{cases}$ แล้วจะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $x, y \in F(a,b)$ โดยที่ $x \leq y$

<u>กรณี 1</u> $x = a = y$ จะได้ว่า $h(x) = u = h(y)$

<u>กรณี 2</u> $x = b = y$ จะได้ว่า $h(x) = v = h(y)$

กรณี 3 $x, y \notin \{a,b\}$ จะได้ว่า $h(x) = x \leq y = h(y)$

กรณี 4 $x = a$ และ $y = b$ แล้ว $h(x) = u \leq v = h(y)$

กรณี 5 $x = b$ และ $y = a$ เนื่องจาก $b = x \leq y = a$ ทำให้ได้ $b \leq a$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้นกรณี 5 ไม่สามารถเกิดขึ้น

กรณี 6 $x = a$ และ $y \notin \{a,b\}$ เนื่องจาก $a = x \leq y$ แต่ $y \notin \{a,b\}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณี 7 $x \notin \{a,b\}$ และ $y = a$ เกิดข้อขัดแย้งเหมือนกรณี 6

กรณี 8 $x = b$ และ $y \notin \{a,b\}$ เกิดข้อขัดแย้งเหมือนกรณี 6

กรณี 9 $x \notin \{a,b\}$ และ $y = b$ เกิดข้อขัดแย้งเหมือนกรณี 6

ดังนั้นกรณี 6 ถึง กรณี 9 ไม่สามารถเกิดขึ้น เพราะฉะนั้นไม่ว่ากรณีใด จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

เนื่องจากฟังก์ชันผลประกอบของฟังก์ชันยืนยงอันดับเป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับดังนั้น $h \circ g : P \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับด้วย แต่ $(h \circ g)(a) = u$ และ $(h \circ g)(b) = v$ เพราะฉะนั้นเรามีฟังก์ชันยืนยงอันดับ $f = h \circ g : P \to P$ ซึ่ง $f(a) = u$ และ $f(b) = v$ ตามต้องการ

ทฤษฎีบท 4.3.3 clone ทางเดียวของ tree ความสูง 1 ก่อกำเนิดโดย $C_1 \cup \{\mu\}$ โดยที่ C_1 เป็นเซตของฟังก์ชันเอกนามที่ยืนยงอันดับทั้งหมดและ μ เป็น majority function ที่นิยามดังในหัวข้อ 4.1

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P} = (P; \leq)$ เป็น tree ความสูง 1 และ μ เป็น majority function ที่นิยามดังในทฤษฎีบท 4.1.2 แล้ว $\mu \in Pol(\leq)$ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $g : P^n \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับและให้ $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ และ $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in Dom(g)$ และเพราะว่าฟังก์ชันระยะทาง $d : (P^n)^2 \to P$ ถูกกำหนดโดย

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \max\{d(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

สำหรับทุก ๆ $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ และ $\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$ ใน P^n เพราะฉะนั้นจะมี $1 \leq k \leq n$ ซึ่ง $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x_k, y_k)$ แล้วโดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า $d(g(\overline{x}), g(\overline{y})) \leq d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x_k, y_k)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้ว่า มี unary order-preserving $f \in C_1$ ซึ่ง $f(x_k) = g(\overline{x})$ และ $f(y_k) = g(\overline{y})$ และโดยบทแทรก 4.3.1[6] ทำให้เราได้ว่า $Pol(\leq) \subseteq [C_1 \cup \{\mu\}]$

เพราะว่า majority function ที่นิยามในหัวข้อ 4.1 เป็นฟังก์ชันผลประกอบของฟังก์ชันทวินาม ดังนั้น $\mu \in [C_2]$ โดยที่ $[C_2]$ เป็น clone บน P ก่อกำเนิดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่

ยืนยงอันดับบน P ทั้งหมดซึ่งเป็นเซตจำกัด และเพราะว่า $[C_1]\subseteq[C_2]$ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า Pol($\le$) ก่อกำเนิดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับ นั่นคือ Pol($\le$) = $[C_2]$

บทแทรก 4.3.4 clone ทางเดียวของ tree ความสูง 1 ก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบน tree ความสูง 1

เนื่องจาก fences เป็นเซตอันดับความสูง 1 ที่เป็น majority order ทำให้ได้ว่าทฤษฎีบท 3.4.3 [6] เป็นบทแทรกของทฤษฎีบท 4.3.3 ซึ่งจะขอกล่าวไว้เป็นบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.3.5 clone ทางเดียวของ fence ก่อกำเนิดแบบจำกัดโดยเซตของฟังก์ชันทวินามที่ยืนยงอันดับที่นิยามบน fence

4.4 Clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ majority order ความสูง 1

ขอทบทวนว่าเซตของ operations ทั้งหมดบนเซตจำกัด A เป็น clone บน A และเขียนแทนด้วย O(A) และเป็นที่ทราบกันดีว่าทุกๆ proper subclone ของ O(A) จะเป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม clone หนึ่งของ O(A)

I.G. Rosenberg ใน [12] ได้จำแนก clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบนทุก ๆ เซตจำกัด A โดยกล่าวว่า clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน A คือ clone ของ operations ทั้งหมดที่ยืนยงความสัมพันธ์ใดความสัมพันธ์หนึ่งใน 6 classes ของความสัมพันธ์บน A ดังกล่าวไว้ในบทที่ 1

C. Ratanaprasert ใน [9] ได้แสดงว่า clone ทางเดียวของ unbounded connected ordered set เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ยืนยงความสัมพันธ์ใน class 5 หรือ class 6 ของความสัมพันธ์บน A ซึ่งจำแนกโดย I.G. Rosenberg

C. Ratanaprasert ใน [11] ได้แสดงว่า clone ทางเดียวของ crown C_n ซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของ unbounded connected ordered set เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ยืนยงความสัมพันธ์ทั้งใน class 5 และ class 6

สำหรับเซตอันดับความสูง 1 ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 กลุ่มทำให้เราสามารถแสดง clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของแต่ละกรณีได้ดังต่อไปนี้

1. เซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่มี crown เป็นเซตอันดับย่อย ซึ่งก็คือ majority order ความสูง 1 เราสรุปโดยผลงานของ C. Ratanaprasert ใน [9] ได้ว่า clone ทางเดียวของ majority order ความสูง 1 เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ทุก operations ใน clone นี้ยืนยงความสัมพันธ์ใน class 5 เท่านั้น

2. เซตอันดับความสูง 1 ที่เป็น crown โดยผลงานของ C. Ratanaprasert ใน [11] แสดงว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ทุก operations ใน clone นี้ยืนยง ความสัมพันธ์ทั้งใน class 5 และ class 6

3. เซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่ใช่ crown แต่ประกอบด้วยเซตอันดับย่อยที่เป็น crown ยังไม่มีผลงานของท่านใดแสดงไว้ว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้จะเป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ทุก ๆ operations ใน clone ยืนยงความสัมพันธ์ใน class 5 หรือ class 6

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงความสัมพันธ์กลาง ρ ที่เป็นความสัมพันธ์ทวินาม ซึ่ง clone ทางเดียวของเซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่ใช่ crown เป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ที่ประกอบด้วย operations ทั้งหลายที่ยืนยง ρ โดยใช้สมบัติการยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับความสูง 1 ทำให้เราสามารถตอบคำถามสำหรับเซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่ใช่ crown แต่ประกอบด้วยเซตอันดับย่อยที่เป็น crown ว่า clone ทางเดียวของเซตอันดับกลุ่มนี้จะเป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ทุก ๆ operations ใน clone นี้ยืนยงความสัมพันธ์ใน class 6 เราเริ่มด้วยการทบทวนนิยามของความสัมพันธ์กลางดังต่อไปนี้

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก เราเรียก $\rho \subseteq P^k$ ว่า totally reflexive ถ้า $\{(a_1,\ldots,a_k) \mid$ มี $i \neq j$ ซึ่ง $a_i = a_j\} \subseteq \rho$ และเป็น totally symmetric ถ้า $(a_1,\ldots,a_k) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ $(a_{\alpha(1)},\ldots,a_{\alpha(k)}) \in \rho$ สำหรับทุกๆ วิธีเรียงสับเปลี่ยน α บน $\{1,\ldots,k\}$ และจะกล่าวว่า $B \subseteq P$ เป็น center ของ ρ ถ้าแต่ละ $a \in B$ จะได้ว่า $(a,a_2,\ldots,a_k) \in \rho$ สำหรับทุกๆ $a_2,\ldots,a_k \in P$

เรากล่าวว่า ρ เป็นความสัมพันธ์กลางถ้า ρ เป็น totally reflexive และ totally symmetric โดยมี $\phi \neq B \subset P$ เป็น center ของ ρ

สังเกตว่าถ้าความสัมพันธ์กลางเป็นความสัมพันธ์ทวินามแล้วสมบัติ totally reflexive คือสมบัติสะท้อนและสมบัติ totally symmetric คือสมบัติสมมาตรนั่นเอง

เราได้ทฤษฎีบท 4.4.1 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4.1 ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่ใช่ crown และมี reach $n \geq 2$ แล้ว clone ทางเดียว $\mathrm{Pol}(\leq)$ เป็น subclone ของ $\mathrm{Pol}(\rho)$ เมื่อ ρ เป็นความสัมพันธ์กลางที่นิยามบน P โดย $\rho := \{(x,y) \in P \times P \mid d(x,y) < n\}$

บทพิสูจน์ ให้ $\overline{P} = (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับความสูง 1 ที่ไม่ใช่ crown และมี reach $n \geq 2$ แล้วจะมี $F = \{N_0, N_1, ..., N_n\}$ เป็น maximal size fence ขนาด n ใน $\overline{P}$ และให้ $\rho \subseteq P \times P$ นิยามโดย

$$\rho := \{(x,y) \in P \times P \mid d(x,y) < n\}$$

ให้ $x \in P$ แล้วเนื่องจาก $d(x,x) = 0 < n$ ดังนั้น $(x,x) \in \rho$ เพราะฉะนั้น ρ สอดคล้องสมบัติสะท้อน

ให้ $x, y \in P$ โดยที่ $(x,y) \in \rho$ แล้ว $d(x,y) < n$ เนื่องจาก $d(y,x) = d(x,y)$ ดังนั้น $d(y,x) < n$ ทำให้ได้ว่า $(y,x) \in \rho$ เพราะฉะนั้น ρ สอดคล้องสมบัติสมมาตร

ให้ $C = \{a \in P \mid (a,x) \in \rho \text{ ทุก } x \in P\}$

เราจะแสดงว่า $C \neq \phi$ เนื่องจาก $r(\overline{P}) \geq 2$ ดังนั้นจะมี $N_m \in P$ โดยที่ $m = \frac{n-1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ $m = \frac{n}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

ให้ $x \in P$

<u>กรณี 1</u> $x \in F$ จะได้ว่า $d(x, N_m) < n$ ดังนั้น $(x, N_m) \in \rho$

<u>กรณี 2</u> $x \notin F$ ให้ $F' = \{x = M_0, M_1, ..., M_s = N_m\}$ เป็น minimum size fence จาก x ไป N_m แล้ว $d(x, N_m) = s$

<u>กรณี 2.1</u> F และ F' มีจุดภายในร่วมกัน ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุดซึ่ง $M_k = N_i$ โดยที่ $1 \leq k \leq s$ และ $1 \leq i \leq n-1$ จะได้ว่า $d(M_k, N_m) < \frac{n}{2}$ และ $d(x, M_k) < \frac{n}{2}$ ดังนั้น $d(x, N_m) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$

<u>กรณี 2.2</u> F และ F' ไม่มีจุดภายในร่วมกัน สมมติว่า $d(x, N_m) \geq n$

ให้ $\overline{F} = \{x = M_0, ..., M_s = N_m, N_{m+1}, ..., N_n\}$ เป็น minimum size fence จาก x ไป N_n แต่ $d(x, N_n) = d(x, N_m) + d(N_m, N_n) \geq n + d(N_m, N_n)$ โดยที่ $d(N_m, N_n) > 0$ ทำให้ได้ $d(x, N_n) > n$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานที่กล่าวว่า F เป็น maximal size fence ของ $\overline{P}$ เพราะฉะนั้น $d(x, N_m) < n$

ไม่ว่ากรณีใดจะได้ $d(x, N_m) < n$ ดังนั้น $N_m \in C$ เพราะฉะนั้น $C \neq \phi$ และเพราะว่า $d(N_0, N_n) = n$ ดังนั้น $(N_0, N_n) \notin \rho$ ซึ่งแสดงว่า $N_0 \notin C$ ทำให้ได้ว่า $C \neq P$ เราจึงได้ว่า C เป็น center ของ P เพราะฉะนั้น ρ เป็นความสัมพันธ์กลางบน P ทำให้ได้ว่า Pol(ρ) เป็น clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน P

ต่อไปจะแสดงว่า $\text{Pol}(\leq) \subseteq \text{Pol}(\rho)$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ $f : P^k \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน P และให้ $x_i, y_i \in P$ ซึ่ง $(x_i, y_i) \in \rho$ สำหรับทุกๆ i = 1,2,…,k แล้ว $d(x_i, y_i) < n$ สำหรับทุกๆ i = 1,2,…,k โดยสมบัติยืนยงฟังก์ชันระยะทางของเซตอันดับความสูง 1 เราได้ว่า

$d(f(x_1, ..., x_k), f(y_1, ..., y_k)) < n$ เพราะฉะนั้น $(f(x_1, ..., x_k), f(y_1, ..., y_k)) \in \rho$

บรรณานุกรม

[1] K.A. Baker and A.F. Pixley(1975), Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems, Math. *Z.* **143**, 165-174.

[2] S. Burris and H.P. Sankappanavar(1981), A course in Universal Algebra, Graduate Text in Mathematices **78**, Sprinnger, New York.

[3] B.A. Davey(1990), Monotone Clones and Congruence Modularity, Order **6**, 389-400.

[4] B.A. Davey and H.A. Priestley(1990), Introduction to Lattice and Ordered Set, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] B.A. Davey, R.W. Quackenbuch and D. Schweigert(1990), Monotone Clones and the Variety They Determine, Order **7**, 145-167.

[6] J. Demetrovice and L. Ronyai(1989), Algebraic Properties of Crowns and Fences, Order **6**, 91-99.

[7] Z. Furedi and I.G. Rosenberg(1985), Orders admitting an isotone majority operation, Preprint CRM Universite de Montreal.

[8] J. Hagemann and A. Mitschke(1973), On n-permutable congruences, Algebra Universalis **14**, 64-67.

[9] C. Ratanaprasert(2000), On Monotone Clones of Connected Ordered Sets, in : General Algebra and Applications, Proceedings of the 59th Arbeitstagung Allgemeine Algebra, Potsdam, 155-166.

[10] C. Ratanaprasert(2004), On Monotone Clones of Strings, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **28**, 671-683.

[11] C. Ratanaprasert(2004), All Maximal Clones Containing a Crown, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **27**, 1089-1100.

[12] I.G. Rosenberg(1990), Uber die funktionale vollstandigkeit in den mehrwertigen logiken, Rozpravy Cs. Czechosloven Akademie Ved, Ser. Math. Nat. Sci. **80**, 3-93.

[13] นวรัตน์ อนันต์ชื่น, ทฤษฎีกราฟ I, ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, นครปฐม (2540).

บัญชีสัญลักษณ์

$O_n(A)$	แทน	เซตของ n-ary operation ทั้งหมดบน A
$O(A)$	แทน	เซตของ operations ทั้งหมดบน A
$Pol(\leq)$	แทน	เซตของ operation ทั้งหมดบน A ที่ยืนยง $\leq$
$\overline{P} = (P;\leq)$	แทน	เซตอันดับ
$\overline{A} = (P;F^{\overline{A}})$	แทน	พีชคณิต
$V(\overline{A})$	แทน	วาไรตีที่ก่อกำเนิดโดยพีชคณิต $\overline{A}$
$A\lg(\tau)$	แทน	class ของพีชคณิต แบบ τ
$T(\overline{A})$	แทน	เซตของ term operation ทั้งหมดบน A
$L(A)$	แทน	เซตของ clone ทั้งหมดบน A
$Eq(A)$	แทน	เซตของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบน A
$Con(\overline{A})$	แทน	เซตของคอนกรูเอนซ์ทั้งหมดของ $\overline{A}$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล นางสาวมยุรี ห้าวสุด

ที่อยู่ 34/1 หมู่ 6 ตำบลคลองขวาง อำเภอไทรน้อย จังหวัดนนทบุรี 11150

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542 สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

พ.ศ. 2543 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม