การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

โดย
นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2551

การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

โดย
นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2551

FOURIER TRANSFORMS AND THE APPLICATION IN ELECTROMAGNETIC WAVE

By

Sirichai Rompotantong

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2008

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " การแปลงฟูเรียร์และการประยุกต์ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า " เสนอโดย นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

……..

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่.........เดือน................... พ.ศ..........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

............/......................../.............

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.กลศ พัฒนะรพีเลิศ)

............/......................../.............

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

............/......................../.............

48308306 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : อนุกรมฟูเรียร์, การแปลงฟูเรียร์, คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

สิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง : การแปลงฟูเรียร์ และการประยุกต์ ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รศ.ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง. 67 หน้า.

การค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้ได้นำเสนอ การศึกษาค้นคว้าอนุกรมฟูเรียร์ การแปลงฟูเรียร์ และได้นำการแปลงฟูเรียร์ไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาคุณสมบัติของสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นดินที่มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลง อย่างต่อเนื่อง แบบ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ในการศึกษาได้ใช้ระบบสมการของแมกซ์เวลล์อิงตัวแปรความถี่ และเมื่อดำเนินการแก้ระบบสมการพบว่าสามารถ หาคำตอบในรูปฟังก์ชันสนามไฟฟ้าที่อิงตัวแปรเวลาได้ ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อนำเสนอในรูปกราฟจะแสดงให้เห็นภาพการลดลงของปริมาณของสนามไฟฟ้าอย่างรวดเร็วเมื่อเวลาผ่านไป

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2551

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

48308306 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : FOURIER SERIES, FOURIER TRANSFORMS,ELECTROMAGNETRIC WAVE

SIRICHAI ROMPOTANTONG : FOURIER TRANSFORMS AND THE APPLICATION IN ELECTROMAGNETRIC WAVE. INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC. PROF. SUABSAGUN YOOYUANYONG, Ph.D. 67 pp.

In this study, we present Fourier series, Fourier transforms and their applications to the electric field that response from the ground. The conductivities of the ground are varied continuously as an exponential function. The system of Maxwell's equations are used and solved to get the time domain electric field. The results can be plotted to show that the electric field rapidly decreas as time increases.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2008

Student's signature ....

Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระ ฉบับนี้สำเร็จได้ เพราะความกรุณาของรองศาสตราจารย์ ดร .สืบสกุล อยู่ยืนยง ที่ให้คำปรึกษา และคำแนะนำ ทางด้านคณิตศาสตร์และธรณีฟิสิกส์ และแก้ไขส่วนต่างๆที่บกพร่อง ทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จได้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปาก ร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ขอขอบคุณเพื่อนๆ และรุ่นพี่ สาขาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ สำหรับความช่วยเหลือ คำแนะนำ ที่ให้กันตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบคุณ บิดา มารดา ที่ให้การสนับสนุนทางด้านการศึกษา จนมีความสำเร็จทางด้านการงานในทุกวันนี้ และขอขอบคุณ ภรรยา ที่เป็นกำลังใจที่ดีในการ ค้นคว้าอิสระฉบับนี้

สิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

20 พฤษภาคม 2552

สารบัญ

หน้า

สารบัญภาพประกอบ

บทที่ 1

บทนำ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้ได้นำเสนออนุ กรมที่สำคัญอนุกรมหนึ่งได้แก่ อนุกรมฟูเรียร์ ซึ่งมีประโยชน์มากนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆได้หลายแขนงผู้ศึกษาได้นำเสนอไว้ในบทที่ 2 และเมื่อได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมไปอีกพบว่ารูปทั่วไปของอนุกรมฟูเรียร์เขียนได้ใ นรูปของการแปลงฟูเรียร์ ซึ่งได้นำเสนอไว้ในบทที่ 3 สำหรับบทที่ 4 เป็นการนำเสนอการประยุกต์ใช้ การแปลงฟูเรียร์ ในแขนงวิชา คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยได้มีความพยายามใช้ การแปลงฟูเรียร์ ในการเปลี่ยนคำตอบของสนามไฟฟ้าที่อิงโดเมนความถี่ไปเป็นโดเมนเวลา และในบทที่ 5 เป็นการสรุปผลการศึกษา

บัญชีสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
σ	สภาพนำไฟฟ้าของตัวกลางใดๆ
σ_{air}	สภาพนำไฟฟ้าของอากาศ มีค่าโดยประมาณเป็น 0
ε	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของตัวกลางใดๆ
ε_0	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศมีค่าโดยประมาณ 8.8510×10^{-12} F/m
μ	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของตัวกลางใดๆ
μ_0	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศมีค่าโดยประมาณ 12.57×10^{-7} Wb/A-m
ω	ความถี่เชิงมุม
$I(\omega)$	ปริมาณของกระแสไฟฟ้าในขดลวด
a	รัศมีของขอลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
r	ระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าถึงเครื่องมือรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวระดับ

สัญลักษณ์	ความหมาย
z	ระยะความลึกของวัตถุใดๆจากระดับพื้นผิวโลก(metres) มีค่าเป็นลบเมื่อวัตถุอยู่เหนือพื้นผิวโลก มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อวัตถุอยู่ระดับผิวโลก และมีค่าเป็นบวกเมื่อวัตถุอยู่ลึก ลงไปจากระดับพื้นผิวโลก
h	ตำแหน่งของขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ
$\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง r, ϕ และ z ตามลำดับ
$\vec{E}$	เวกเตอร์สนามไฟฟ้า
E_r	องค์ประกอบของ $\vec{E}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_r$
E_ϕ	องค์ประกอบของ $\vec{E}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_\phi$
E_z	องค์ประกอบของ $\vec{E}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_z$
E_{air}	สนามไฟฟ้าในอากาศ
$\vec{H}$	เวกเตอร์สนามแม่เหล็ก
H_r	องค์ประกอบของ $\vec{H}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_r$
H_ϕ	องค์ประกอบของ $\vec{H}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_\phi$
H_z	องค์ประกอบของ $\vec{H}$ ในทิศทางของ $\hat{e}_z$
$\vec{J}_s$	เป็นความหนาแน่นของกระแสในแหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กไฟฟ้า

บทที่ 2

อนุกรมฟูเรียร์

บทนำ

อนุกรมอนันต์มีประโยชน์อย่างมาก เราสามารถ ประมาณฟังก์ชันต่างๆ ด้วยอนุกรมอนันต์ได้ อนุกรมอนันต์ที่น่าสนใจ ได้แก่ อนุกรมเทย์เลอร์ อนุกรมแมคลอรีน อนุกรม ฟูเรียร์ เป็นต้น สำหรับอนุกรมสองอนุกรมแรก ฟังก์ชันที่เขียนในรูปอนุกรมต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในทุกอันดับ แต่ถ้าฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้วจำเป็นต้องใช้อนุกรมอื่น ซึ่งในสัมมนาฉบับนี้จะเสนออนุกรมฟูเรียร์ซึ่งจะแทนฟังก์ชันบนช่วงใดช่วงหนึ่งได้ ถึงแม้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นจะหาไม่ได้ที่จุดบางจุดในช่วงนั้น อนุกร มฟูเรียร์เป็นอนุกรมที่ใช้กันมากในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ ในการศึกษาอนุกรมฟูเรียร์ เราจะเริ่มด้วยการกำหนดนิ ยาม และทฤษฎีที่จำเป็นก่อน

นิยามและทฤษฎีเบื้องต้น

บทนิยาม 2.1 : อนุกรมตรีโกณมิติบนช่วงปิด $[-L,L]$ คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \qquad (2\text{-}1)$$

เมื่อ $A_0, A_1, B_1, \ldots$ เป็นค่าคงตัว ■

ทฤษฎีบท 2.2 : ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่จำเป็นต้องใช้ในการศึกษาอนุกรมฟูเรียร์มีดังต่อไปนี้

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0 & ,n\neq m\\ L & ,n=m\neq 0\\ 2L & ,n=m=0\end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0 & ,n\neq m\\ L & ,n=m\neq 0\\ 0 & ,n=m=0\end{cases} \qquad (2\text{-}3)$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \text{สำหรับทุกๆ } m \text{ และ } n \qquad (2\text{-}4) \qquad \blacksquare$$

การพิสูจน์ความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้นทำได้โดยใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

บทพิสูจน์ สมการ(2-2) จะพิสูจน์ว่า $\displaystyle\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & ,n \neq m \\ L & ,n = m \neq 0 \\ 2L & ,n = m = 0 \end{cases}$

โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n \neq m$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)+\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$= \frac{L}{2\pi}\left\{\frac{\sin[(n-m)\pi x/L]}{(n-m)}\Bigg|_{-L}^{L} + \frac{\sin[(n+m)\pi x/L]}{(n+m)}\Bigg|_{-L}^{L}\right\}$$

$$= 0$$

กรณี 2 : $n = m \neq 0$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1+\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2L + \left[\left(\frac{L}{2n\pi}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L}\right\}$$

$$= L$$

กรณี 3 : $n = m = 0$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}1dx = 2L \qquad \bullet$$

บทพิสูจน์ สมการ(2-3) จะพิสูจน์ว่า $\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\begin{cases}0 & ,n\neq m\\ L & ,n=m\neq 0\\ 0 & ,n=m=0\end{cases}$

โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n\neq m$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)-\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]dx\\ &= \frac{L}{2\pi}\left\{\frac{\sin((n-m)\pi x/L)}{n-m}\Bigg|_{-L}^{L}-\frac{\sin((n+m)\pi x/L)}{n+m}\Bigg|_{-L}^{L}\right\}\\ &= \frac{L}{2\pi}\left(\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m}-\frac{\sin(n-m)\pi}{n-m}-\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

กรณี 2 : $n=m\neq 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= \int_{-L}^{L}\sin^{2}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{2L-\left(\frac{L}{2n\pi}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L}\right\}\\ &= L\end{aligned}$$

กรณี 3 : $n=m=0$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\int_{-L}^{L}0dx=0$$

●

บทพิสูจน์ สมการ (2-4) จะพิสูจน์ว่า $\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0$ สำหรับทุกๆ m และ n โดยพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี 1: $n \neq m$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)+\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right)dx$$

$$= \frac{L}{2\pi}\left\{\frac{-\cos((n-m)\pi x/L)}{n-m}\bigg|_{-L}^{L} - \frac{\cos((n+m)\pi x/L)}{n+m}\bigg|_{-L}^{L}\right\}$$

$$= 0$$

กรณี 2 : $n = m \neq 0$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin 0+\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{-L}{2n\pi}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\bigg|_{-L}^{L}\right\}$$

$$= 0$$

กรณี 3 : $n = m = 0$ จะได้

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\sin 0\cos 0\,dx = 0 \qquad \bullet$$

บทนิยาม 2.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[-L,L]$ แล้ว อนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ อนุกรมตรีโกณมิติ ดังสมการ (2-1) เมื่อ A_0, A_n และ B_n กำหนดโดย

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx \qquad (2\text{-}5)$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad ,n = 1,2,... \qquad (2\text{-}6)$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad ,n = 1,2,... \qquad (2\text{-}7) \quad \blacksquare$$

จากสมการ (2-1) เมื่อแทนค่า A_0, A_n และ B_n จะได้ อนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{2-8}$$

ในการหาอนุกรมฟูเรียร์ดังสมการ (2-8) ถ้าเราทราบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ เราสามารถลดรูปสมการ (2-8) ได้ ในที่นี้จึงจำเป็นต้องศึกษาเรื่องของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ก่อน

ฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่

บทนิยาม 2.4 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[-L, L]$ แล้ว เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันคู่ ถ้า $f(-x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ และ f เป็นฟังก์ชันคี่ ถ้า $f(-x) = -f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ ■

ข้อสังเกต 2.5 : สำหรับผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคู่ เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคี่ เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของฟังก์ชันคู่ กับ ฟังก์ชันคี่ เป็นฟังก์ชันคี่ ■

ตัวอย่าง 2.1 : จงแสดงว่า $x^2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 \cos x$

แล้ว $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$

ดังนั้น $x^2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่ ●

ตัวอย่าง 2.2 : จงแสดงว่า $x \sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่

วิธีทำ ให้ $f(x) = x\sin x$

แล้ว
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\sin(-x) \\ &= -x(-\sin x) \\ &= x\sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x\sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่ ●

จาก 2 ตัวอย่างข้างต้นเป็นตัวอย่างที่แสดงว่า ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคู่ เป็นฟังก์ชันคู่ และ ผลคูณของ 2 ฟังก์ชันคี่ เป็นฟังก์ชันคู่

ข้อสังเกต 2.6 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคี่ และให้ $x \in [-L, L]$

ถ้ากำหนดให้ $x = -t$ และ $dx = -dt$ แล้วจะได้

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(-t)dt$$

เนื่องจาก $\int_{0}^{L} fdx = -\int_{L}^{0} fdx$) และ f เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ว่า

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(-t)dt$$

$$= -\int_{0}^{L} f(t)dt$$

ดังนั้น

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$= -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$= 0$$ ●

ข้อสังเกต 2.7 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคู่ และให้ $x \in [-L, L]$

แล้ว

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = -\int_{L}^{0} f(-t)dt$$

$$= \int_{0}^{L} f(-t)dt$$

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx \qquad = \int_{0}^{L} f(t)dt$$

ดังนั้น
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$
$$\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$ ●

ทฤษฎีบท 2.8 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันคู่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $B_n = 0$ สำหรับ $n = 1,2,3,...$
และถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ แล้ว $A_n = 0$
สำหรับ $n = 0,1,2,3,...$ ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคู่ และให้ $x \in [-L, L]$

และ $$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

เนื่องจาก $\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $f(x)\,\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

จากข้อสังเกต 2.6 จะได้ว่า $$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$ ●

สำหรับกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันคี่ และให้ $x \in [-L, L]$

และ $$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

เนื่องจาก $\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $f(x)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

จากข้อสังเกต 2.6 จะได้ว่า $$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$ ●

ตัวอย่าง 2.3 : จงหาอนุกรมฟูเรียร์ ของ $f(x)=x$ สำหรับทุก $x\in[-L,L]$

วิธีทำ ให้ $x\in[-L,L]$ และเพราะว่า $f(x)=x$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $A_n=0$ สำหรับ $n=0,1,2,3,...$

และ $$B_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

เนื่องจาก $x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่

โดยข้อสังเกต 2.7 จะได้ว่า $$B_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

เมื่อทำการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

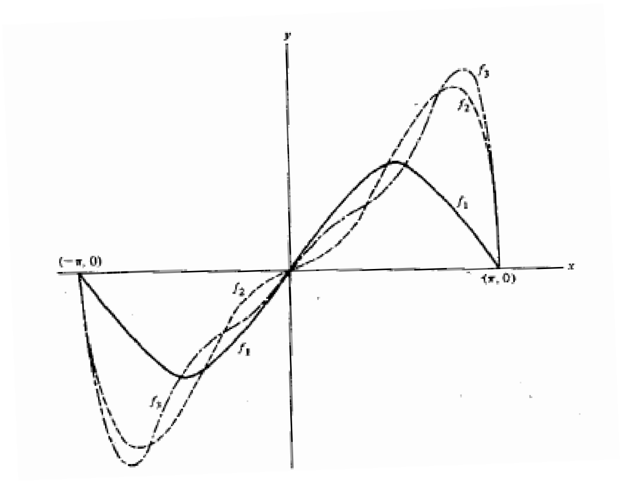
โดยให้ $u=x$ และ $dv=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\left(-x\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L+\frac{L}{n\pi}\int_0^L\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right)\\
&= \frac{-2L}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2}{n\pi}\left\{\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L\right\}\\
&= \frac{-2L}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2L}{(n\pi)^2}\sin n\pi\\
&= \frac{-2L}{n\pi}\cos n\pi\\
&= \frac{-2L}{n\pi}(-1)^n=\frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ f คือ

$$\begin{aligned}
A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0+\frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\\
&= \left(\frac{2L}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \bullet
\end{aligned}$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟเฉพาะกรณี $n=1,2,3$ จะได้กราฟดังนี้



ภาพที่ 2-1 : กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n=1,2,3$ ของอนุกรมฟูเรียร์ ของ $f(x)=x$ สำหรับทุก $x\in[-\pi,\pi]$ (Pinsky,1991)

ตัวอย่าง 2.4 : จงหา อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)=|x|$ สำหรับทุก $x\in[-L,L]$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น $B_n=0$ สำหรับ $n=0,1,2,\ldots$

และ $f(x)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อ $n\neq 0$

ดังนั้น
$$A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|x|\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}x\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$=\frac{2}{L}\left(x\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L-\frac{L}{n\pi}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right)$$
$$=\frac{-2}{n\pi}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$
$$=\frac{-2}{n\pi}\left(\frac{-L}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L$$
$$=\frac{2L}{(n\pi)^2}\left[\cos n\pi-1\right]$$
$$=\frac{2L}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]\text{ สำหรับ } n\neq 0$$

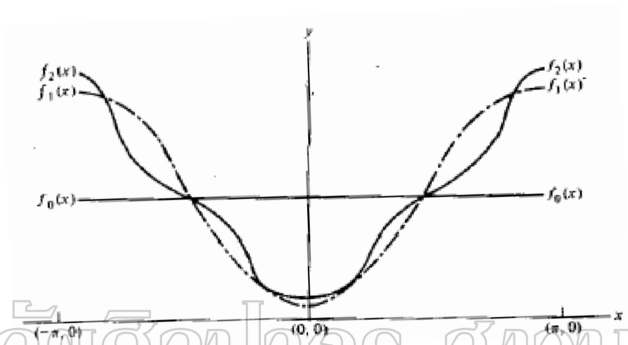
เมื่อ $n=0$ จะได้ $A_0=\frac{1}{2}\int_0^L xdx=\frac{L}{2}$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ ของ f คือ

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]=\frac{L}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$=\frac{L}{2}+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L} \quad \bullet$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟเฉพาะกรณี $n=0,1,2$ จะได้กราฟดังนี้



ภาพที่ 2-2 : กราฟผลรวมย่อยของ f สำหรับ $n=0,1,2$ ของอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)=|x|$ สำหรับทุก $x\in[-\pi,\pi]$ (Pinsky,1991)

บทนิยาม 2.9 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x\in[-\infty,\infty]$ และ f จะมีคาบเป็น $2L$

ถ้า $f(x+2L)=f(x)$ ■

ตัวอย่าง 2.5 : จงแสดงว่า $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ และ $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ มีคาบเป็น $2L$ สำหรับทุกๆ $n=1,2,3,...$

วิธีทำ ให้ $f(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ สำหรับทุกๆ $n=1,2,3,...$

แล้ว
$$f(x+2L)=\sin\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+2n\pi\right)$$
$$=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= f(x)$$

และให้ $g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ สำหรับทุกๆ $n = 1,2,3,...$

แล้ว
$$g(x+2L) = \cos\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad = g(x)$$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ และ $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ มีคาบเป็น $2L$ สำหรับทุกๆ $n = 1,2,3,...$ ●

ตัวอย่าง 2.6 : จงหาอนุกรมฟูเรียร์ ของฟังก์ชัน $f(x) = -1$ ถ้า $(2n-1)L \le x \le 2nL$ และ $f(x) = 1$ ถ้า $2nL \le x \le (2n+1)L$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $A_n = 0$

และ $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)\left(1-(-1)^n\right)$

ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ●$$

อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

บทนิยาม 2.10 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, L]$ และให้ f_O เป็นฟังก์ชันคี่ที่ถูกขยายมาจาก f กำหนดดังนี้

$$f_O(x) = \begin{cases} f(x) & ,0 < x \le L \\ -f(-x) & ,-L \le x < 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

เรียก f_O ว่า การขยายคี่ ของ f ไปบนช่วง $[-L,L]$ และ f_O เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ของ f_O เขียนได้ดังนี้

$$A_0 = 0 \text{ สำหรับ } n = 0,1,2,...$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_O(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

และอนุกรมฟูเรียร์ ที่ได้คือ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$ เมื่อ $0 \le x \le L$

เราจะเรียกอนุกรมฟูเรียร์ ที่ได้ว่า อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ■

บทนิยาม 2.11 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0,L]$ และให้ f_E เป็นฟังก์ชันคู่ที่ถูกขยายมาจาก f กำหนดดังนี้

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & ,0 < x \le L \\ -f(-x) & ,-L \le x < 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

เรียก f_E ว่า การขยายคู่ ของ f ไปบนช่วง $[-L,L]$ และ f_E เป็นฟังก์คู่ ดังนั้นจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ของ f_E เขียนได้ดังนี้

$$B_n = 0 \text{ สำหรับ } n = 0,1,2,...$$

และ

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_E(x)dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_E(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

และอนุกรมฟูเรียร์ที่ได้คือ $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right)$ เมื่อ $0 \le x \le L$

เราจะเรียก อนุกรมฟูเรียร์ ที่ได้ว่า อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ ■

ตัวอย่าง 2.7: จงหาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ของ $f(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in [0,L]$

วิธีทำ เนื่องจาก $B_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{-2L}{Ln\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ ●

ต่อไปจะกล่าวถึงการแทนฟังก์ชัน f ด้วย $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$ เมื่อ A_n และ B_n เป็นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ของฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับทุก $x \in [-L, L]$ เราสามารถเขียนได้ใหม่โดยให้ $L = \pi$ ซึ่งผลลัพท์ที่ได้สามารถเปลี่ยนกลับให้อยู่ในช่วง $[-L, L]$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $x' = \frac{\pi x}{L}$

ปกติแล้วอนุกรมฟูเรียร์จะมีทั้งอนุกรมที่ลู่เข้าและลู่ออกเราต้องศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชันที่ทำให้อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้า ดังนี้

บทนิยาม 2.12 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน สำหรับทุก $x \in [-a, b]$ เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous) ถ้ามีเซตจำกัดของจุด $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p < x_{p+1} = b$ ซึ่ง

f มีความต่อเนื่องที่ x ในทุกช่วงย่อย เมื่อ $x \neq x_i$ โดยที่ $i = 1, \ldots, p$ (2-9)

$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_i + \varepsilon)$ หาได้ $, i = 0, \ldots, p$ (2-10)

$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_i - \varepsilon)$ หาได้ $, i = 1, \ldots, p+1$ (2-11)

ในรูปแบบของ(2-10) เราเขียนแทนด้วย $f(x_i + 0)$ จะเรียกว่า ลิมิตขวา และรูปแบบของ(2-11) เราเขียนแทนด้วย $f(x_i - 0)$ จะเรียกว่า ลิมิตซ้าย ■

บทนิยาม 2.13 : ถ้า f และ อนุพันธ์ทั้งหมดของ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous) บนช่วง $[a, b]$ แล้ว ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth) ■

ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,b]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง แล้วอนุพันธ์ของ f หาได้สำหรับ $x = x_1,...,x_p$ โดย f' นี้คือฟังก์ชันเป็นช่วงของ f ส่วนในทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ยังคงสอดคล้องตามทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสโดยอยู่ในรูปแบบ

$$f(b-0) - f(a+0) = \int_a^b f'(x)dx + \sum_{i=1}^{p} \left[f\left(x_i + 0\right) - f\left(x_i - 0\right) \right]$$

และในแต่ละช่วง (x_i, x_{i+1}) จะได้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสที่มีรูปแบบ

$$f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)dx$$

ถ้าฟังก์ชัน f ปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องแล้ว ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสเขียนได้ดังนี้

$$f(b-0) - f(a+0) = \int_a^b f'(x)dx$$

ตัวอย่าง 2.8 : จงแสดงว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi,\pi]$

วิธีทำ ให้ $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0, x_2 = \pi$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องทุกๆค่าในช่วง $[-\pi,\pi]$

แล้ว f' ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ

โดยที่ $f'(0+0) = 1$, $f'(0-0) = -1$

ส่วนอนุพันธ์อันดับสูงมีค่าเท่ากับ 0

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi,\pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.9 : จงแสดงว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,-\pi \le x < 0 \\ x^2 + 1 & ,0 \le x \le \pi \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ยกเว้นที่จุด $x = 0$

เมื่อเรามี $f(0+0) = 1$ และ $f(0-0) = 0$

และอนุพันธ์อันดับสูงอื่นๆ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง บนช่วง$[-\pi,\pi]$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงๆ บนช่วง$[-\pi,\pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.10 : จงแสดงว่า $f(x)=x|x|$ บนช่วง $[-\pi,\pi]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ในกรณีนี้ f และ f' ต่อเนื่อง

และ f'' ต่อเนื่องที่จุด $x=0$ ซึ่ง $f''(0+0)=2$

และ $f''(0-0)=-2$ ซึ่งทั้งหมดนี้มีอนุพันธ์มากกว่าศูนย์

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi,\pi]$ ●

ตัวอย่าง 2.11 : จงแสดงว่า $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ บนช่วง $[-\pi,\pi]$ และ $f(0)=0$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ในกรณีนี้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi,\pi]$

และ f' ต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi,\pi]$

อย่างไรก็ตาม $f'(0+0)$ และ $f'(0-0)$ ไม่สามารถหาค่าได้

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ไม่ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ●

ตัวอย่าง 2.12 : จงแสดงว่า $f(x)=\dfrac{1}{x^2-\pi^2}$ บนช่วง $[-\pi,\pi]$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง

วิธีทำ ถึงแม้ว่าในกรณีนี้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-\pi,\pi]$

แต่ก็ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[-\pi,\pi]$

เนื่องจาก $f(-\pi+0)$ และ $f(\pi-0)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ใช่ ฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง ●

เมื่อศึกษาฟังก์ชันปรั บเรียบเป็นช่วง ยกเว้นที่ จุดแบ่ งย่อย $x_0,x_1,\ldots,x_{p+1}$ นั้นไม่ได้ส่งผลกระทบต่อการศึกษาอนุกรมฟูเรียร์ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ A_n, B_n ถูกนิยามในรูปของปริพันธ์ ซึ่งไม่มีผลกับค่าของ $f(x)$ ที่มีจำนวนจุดจำกัด ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $f_1(x)=f_2(x)$ ยกเว้นที่จุด

$x = x_0, x_1, ..., x_{p+1}$ แล้ว $\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx$ ดังนั้นเราจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ไม่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวน $f(x_0),..., f(x_{p+1})$

บทนิยาม 2.14 : สมมุติ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง$[a,b]$เรานิยามการยืดขยายเป็นคาบของ f โดย

$f(x+n(b-a)) = f(x)$ เมื่อ $x \in [a,b]$และ n เป็นจำนวนเต็ม ■

การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์

เนื่องจากการกำหนดช่วงของโดเมนเป็น $[-\pi, \pi]$ โดยการเปลี่ ยนตัวแปรทำให้สามารถเขียนแทน $\cos(m\pi x / L)$ และ $\sin(m\pi x / L)$ ด้วย $\cos mx$ และ $\sin mx$

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรมฟู เรียร์จำเป็นต้องศึกษาเกี่ยวกับบทตั้ง(Lemma) ต่อไปนี้

บทตั้ง 2.15(รีมันน์) : ถ้า f และ f' เป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง บนช่วง $[a,b]$แล้ว

(ก). $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin \lambda x dx = 0$

(ข). $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos \lambda x dx = 0$ ■

บทพิสูจน์ (ก). $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin \lambda x dx = 0$

เนื่องจาก $$\int_a^b f(x)\sin \lambda x dx = \sum_{i=0}^{p} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin \lambda x dx$$

ดังนั้นจะแสดงว่า $$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin \lambda x dx = 0$$

เมื่อหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u = f(x), dv = \sin \lambda x dx$

ดังนั้น $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin \lambda x dx = \left. \frac{-f(x)\cos \lambda x}{\lambda} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\lambda}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\cos \lambda x dx$$

ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นศูนย์เมื่อ $\lambda \to \infty$

ดังนั้น $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\lambda x dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=0}^{p}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\lambda x dx = 0$$ ●

บทพิสูจน์ (ข). $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0$

เนื่องจาก $$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \sum_{i=0}^{p}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx$$

ดังนั้นจะแสดงว่า $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = 0$$

เมื่อหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u = f(x), dv = \cos\lambda x dx$

ดังนั้น $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = \left.\frac{f(x)\sin\lambda x}{\lambda}\right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\lambda}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\cos\lambda x dx$$

ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นศูนย์เมื่อ $\lambda\to\infty$

ดังนั้น $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cos\lambda x dx = 0$$ ●

เราต้องการหาค่าของ

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{N}(A_m\cos mx + B_m\sin mx)$$ เมื่อ N มีค่ามากสู่อนันต์

เมื่อใช้นิยามของ A_o, A_m, B_m ที่มีใน บทนิยาม 2.3 จะได้

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin f(t)(\cos mt\cos mx + \sin mt\sin mx)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos m(t-x)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{N}\cos m(t-x)\right]dt \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นเพื่อความสะดวกในการใช้งานต่อไปเราจะเขียน $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{N}\cos m(t-x)$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยใช้บทตั้งที่ 2.16 ดังนี้

บทตั้ง 2.16 : จะแสดงว่า

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\ldots+\cos N\alpha=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{เมื่อ } \alpha\in\Re \text{ และ } \alpha\neq 0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\ldots \quad \blacksquare$$

บทพิสูจน์ ให้ $S=\frac{1}{2}+\cos\alpha+\ldots+\cos N\alpha$

คูณตลอดด้วย $\sin\alpha$ จะได้

$$S\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\ldots+\sin\alpha\cos N\alpha$$

จากเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

และ $$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

จะได้ว่า $$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(b-a)\right]$$

ดังนั้น $$S\sin\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin\alpha+\sin 2\alpha-0+\sin 3\alpha-\sin\alpha+\ldots+\sin(N+1)\alpha-\sin(N-1)\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin N\alpha+\sin(N+1)\alpha\right] \qquad (2\text{-}12)$$

ถ้ากำหนดให้ $a+b=(N+1)\alpha$, $a-b=N\alpha$

และ $a=(N+\frac{1}{2})\alpha$, $b=\frac{1}{2}\alpha$

ดังนั้นจากขวามือของสมการ (2-12) จะได้

$$\frac{1}{2}\left[\sin N\alpha+\sin(N+1)\alpha\right]=\sin(N+\frac{1}{2})\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$$

นั่นคือสมการ (2-12) เขียนได้เป็น

$$S=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}$$

เมื่อแทนเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ ลงในสมการข้างต้น

จะได้ $$S=\frac{1}{2}+\cos\alpha+...+\cos N\alpha=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$ ●

จาก $f_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{N}\cos m(t-x)\right]dt$ เมื่อใช้ บทตั้ง 2.16 จะได้

$$f_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt \qquad (2\text{-}13)$$

รูปแบบสมการ(2-13) นี้เป็นรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ที่ดี เนื่องจากไม่มีการอ้างถึงสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ A_n, และ B_n

บทนิยาม 2.17 : กำหนดให้

$$D_N(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{2\pi\sin(u/2)}, & u\neq 0,\pm2\pi,\pm4\pi,... \\[2ex] \dfrac{2N+1}{2\pi}, & u=0,\pm2\pi,\pm4\pi,...\end{cases}$$

จะกล่าวว่า D_N คือ แก่นกลางดีรีเคล ซึ่งเป็นฟังก์ชันคู่ที่มีคาบขนาดเท่ากับ 2π ■

เนื่องจาก $\int_{-\pi}^{\pi}D_N(u)du=1$ และเพราะว่า $D_N(u)$ เป็นฟังก์ชันคู่

จะได้ $\int_{-\pi}^{\pi}D_N(u)du=2\int_{0}^{\pi}D_N(u)du$

ดังนั้น $\int_{0}^{\pi}D_N(u)du=\frac{1}{2}=\int_{-\pi}^{0}D_N(u)du$

ทฤษฎีบท 2.18 : ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi,\pi]$

อนุกรมฟูเรียร์ของ f จะลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}\left[\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)\right]$ สำหรับทุกๆ x

เมื่อ $\bar{f}$ คือ การยืดขยายเป็นคาบ ของ f ■

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $[-\pi,\pi]$

และให้ $\bar{f}$ คือ การยืดขยายเป็นคาบ ของ f ที่มีคาบเท่ากับ 2π

ดังนั้นผลคูณ $D_N(t-x)\,\bar{f}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบเป็น 2π

นั่นคือจะได้ $$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) D_N(t-x)\,dt$$

เมื่อแทน $t-x=u$ จะได้

$$f_N(x) = \int_{\pi-x}^{\pi-x} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du$$

เนื่องจาก ฟังก์ชันเป็นคาบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du \\ &= \int_{-\pi}^{0} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du + \int_{0}^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du \end{aligned}$$

เราแบ่งพิจารณาเป็นสองปริพันธ์ ดังนี้

(ก). $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du = \frac{1}{2}\bar{f}(x+0)$

(ข). $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{0} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du = \frac{1}{2}\bar{f}(x-0)$

พิจารณา (ก) เราต้องการแสดงว่า $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{\pi} \bar{f}(x+u) D_N(u)\,du = \frac{1}{2}\bar{f}(x+0)$

ให้ $$g(u) = \frac{\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x+0)}{u}$$

และ $$U(u) = \frac{u}{2\sin(u/2)} \text{ โดยที่ } \quad u \neq 0$$

และ $$U(0) = 1$$

แล้ว $$\int_{0}^{\pi} \left[\bar{f}(x+u) - \bar{f}(x+0)\right] D_N(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})u\,du$$

ใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล เราจะเห็นว่าฟังก์ชัน U มีความต่อเนื่องและต่อเนื่องในช่วง $[-\pi,\pi]$

และ $$\lim_{u\to 0} g(u) = \bar{f}'(x+0)$$

$$\lim_{u\to 0} g'(u) = \frac{1}{2}\bar{f}''(x+0)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง และ มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ ฟังก์ชัน U มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

ดังนั้นผลคูณของฟังก์ชัน g และฟังก์ชัน U ก็มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง

และเมื่อใช้ บทตั้ง 2.15 เราพิสูจน์ไว้ว่า

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})u\,du = 0$$

เมื่อเขียนในรูปของ $\bar{f}$ จะได้

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\bar{f}(x+u)D_N(u)du = \bar{f}(x+0)\int_0^{\pi}D_N(u)du = \frac{1}{2}\bar{f}(x+0)$$ ●

พิจารณา (ข) เราต้องการ $\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\bar{f}(x+u)D_N(u)du = \frac{1}{2}\bar{f}(x-0)$

ให้ $g(u) = \dfrac{\bar{f}(x+u)-\bar{f}(x-0)}{u}$

และ $U(u) = \dfrac{u}{2\sin(u/2)}$ โดยที่ $u \neq 0$ และ $U(0) = 1$

แล้ว $\int_{-x}^{0}\left[\bar{f}(x+u)-\bar{f}(x-0)\right]D_N(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{0}g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})u\,du$

ใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล เราจะเห็นว่าฟังก์ชัน U ต่อเนื่องและต่อเนื่องในช่วง $[-\pi,\pi]$

และ $\lim_{u\to 0} g(u) = \bar{f}'(x-0)$

$$\lim_{u\to 0} g'(u) = \frac{1}{2}\bar{f}''(x-0)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง และ มีอนุพันธ์ต่อเนื่องเป็นช่วง

แต่ U มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง

ดังนั้นผลคูณของฟังก์ชัน g และฟังก์ชัน U ก็มีอนุพันธ์ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ

และเมื่อใช้ บทตั้ง 2.15 เราพิสูจน์ไว้ว่า

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-x}^{0} g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})u\,du = 0$$

เมื่อเขียนในรูปของ $\bar{f}$ จะได้

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-x}^{0}\bar{f}(x-u)D_N(u)du=\bar{f}(x-0)\int_{-x}^{0}D_N(u)du=\frac{1}{2}\bar{f}(x-0)$$ ●

เมื่อพิจารณาทั้ง (ก) และ (ข) แล้ว จะได้ว่า

$$\lim_{N\to\infty}f_N(x)=\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\bar{f}(x+u)D_N(u)du+\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{\pi}\bar{f}(x+u)D_N(u)du$$

$$=\frac{1}{2}\bar{f}(x-0)+\frac{1}{2}\bar{f}(x+0)$$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ f จะลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}\left[\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)\right]$ สำหรับทุกๆ x ●

การแสดงการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์เราสามารถแสดงได้ดังเช่นจาก ตัวอย่าง 2.3 และตัวอย่าง 2.4 และได้การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ดังนี้

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=x \qquad \text{บนช่วง } [-\pi,\pi]$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx=|x| \qquad \text{บนช่วง } [-\pi,\pi]$$

ทั้งสองตัวอย่างนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องตาม $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วง $[-\pi,\pi]$

บทที่ 3

การแปลงฟูเรียร์

การแปลงฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

จากภาคผนวก ค เราจะได้อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน บนช่วง $[-L, L]$ ซึ่งลู่เข้า ดังนี้ (Pinsky,1991)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/L} \tag{3-1}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx \tag{3-2}$$

กำหนดให้ μ_n เป็นตัวแปรวิยุต(discrete) โดย

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{เมื่อ} \quad n = 0, \pm 1, \ldots \quad \text{และ} \quad \Delta\mu_n = \frac{\pi}{L} = \mu_{n-1} - \mu_n$$

จากสมการ (3-1) และสมการ (3-2) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\mu_n) e^{i\mu_n x} \Delta\mu_n \tag{3-3}$$

$$F_L(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\mu x} dx \tag{3-4}$$

จากสมการข้างต้นให้ ลิมิต $L \to \infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงค่าจริง (real valued piecewise smooth function) และหาปริพันธ์ได้สัมบูรณ์(absolutely integrable)บนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้วสมการ (3-3) เป็นการประมาณผลรวมสำหรับ (ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ) ปริพันธ์แบบรีมันน์ ดังนั้นเราได้

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{i\mu x} d\mu \tag{3-5}$$

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \tag{3-6}$$

เราเรียก $f(x)$ และ $F(\mu)$ ว่า คู่ของการแปลงฟูเรียร์

โดย $F(\mu)$ ในสมการ (3-6) คือการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$

และสมการ (3-5) เป็นสูตรการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $F(\mu)$ ■

ทฤษฎีบท 3.1 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$ และให้ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ แล้วการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $F(\mu)$ จะหาค่าได้ สำหรับ $\mu \in (-\infty, \infty)$ ■

บทพิสูจน์ : เพราะว่า $\left| f(x)e^{-i\mu x} \right| = \left| f(x) \right|$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)e^{-i\mu x} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ นั่นคือ $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)e^{-i\mu x} \right| dx$ หาค่าได้

นั่นคือ $F(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx$ หาค่าได้ ●

จากการนำสมการ (3-1) และ (3-4) มารวมกันจะได้มาซึ่งรูปแบบของเอกลักษณ์ปาร์เซอวาล(Parseval's equality) ดังนี้

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) \right|^2 dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \alpha_n \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| F_L(\mu_n) \right|^2 \Delta\mu_n$$

เมื่อให้ลิมิต $L \to \infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วงค่าจริง (real valued piecewise smooth function)ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงและหาปริพันธ์ได้สัมบูรณ์(absolutely integrable)บนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้วเราจะได้ทฤษฎีบทปาร์เซอวาลสำหรับการแปลงฟูเรียร์ ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\mu) \right|^2 d\mu \qquad (3\text{-}7)$$

ทฤษฎีบทการลู่เข้าและคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงฟูเรียร์

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเงื่อนไขที่สำคัญของการหาปริพันธ์และตัวแทนฟูเรียร์ (Fourier representation) ตามสมการ (3-5)

ทฤษฎีบท 3.2 : ทฤษฎีบทการลู่เข้าสำหรับการแปลงฟูเรียร์

ให้ f เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง บนช่วง $(-\infty, \infty)$ สำหรับแต่ละช่วงจำกัด โดยที่ $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx$ ลู่เข้า และ นิยามการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$ ดังสมการ (3-6)

แล้วสำหรับแต่ละ x

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}F(\mu)e^{i\mu x}d\mu=\frac{1}{2}f(x+0)+\frac{1}{2}f(x-0) \qquad \blacksquare$$

การพิสูจน์ดูได้จาก(Pinsky,1991)

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงคุณสมบัติพื้นฐานบางประการของการแปลงฟูเรียร์

คุณสมบัติที่สำคัญ :

(ก) คุณสมบัติเชิงเส้น :

ถ้า F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_2 แล้ว $a_1F_1+a_2F_2$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $a_1f_1+a_2f_2$ เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว

(ข) สังวัตนาการ(convolution) :

ถ้า F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ f_2 แล้ว $(2\pi)F_1F_2$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ $f_1 * f_2$ ซึ่งการสังวัตนาการของสองฟังก์ชันได้นิยามโดยปริพันธ์ ดังนี้

$$(f_1*f_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)f_2(x-z)dz$$

(ค) การหาอนุพันธ์ :

ถ้า $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ แล้ว $i\mu F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f'(x)$ และ $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $-ixf(x)$

(ง) การเลื่อน :

ถ้า $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ แล้ว $e^{ia\mu}F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x-a)$ และ $F(\mu+b)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{ibx}f(x)$

(จ) การคงสภาพค่าเฉลี่ยกำลังสองของปริพันธ์ :

ถ้า F เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f แล้วทฤษฎีบทปาร์เซอวาล จริงนั่นคือ

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\mu)|^2d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx \qquad \blacksquare$$

บทพิสูจน์ (ก) : ให้ $F_1(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f_1(x)$ และ $F_2(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ ของ $f_2(x)$ และ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น
$$a_1F_1(\mu)+a_2F_2(\mu)=\frac{1}{2\pi}a_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu x}f_1(x)dx+\frac{1}{2\pi}a_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu x}f_2(x)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[a_1f_1(x)+a_2f_2(x)]e^{-i\mu x}dx \qquad \bullet$$

บทพิสูจน์ (ข) : ให้ F_1 เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f_1 และ F_2 เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f_2

ต้องการแสดงว่า $(2\pi)F_1(\mu)F_2(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $(f_1*f_2)(x)$

ดังนั้น
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu x}(f_1*f_2)(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)f_2(x-z)dz\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu z}e^{-i\mu(x-z)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)f_2(x-z)dz\right)dx$$

เปลี่ยนตัวแปรให้ $s=x-z$

แล้วจะได้
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu x}(f_1*f_2)(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu z}e^{-i\mu s}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z)f_2(s)dz\right)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu s}f_2(s)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu z}f_1(z)dz\right)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu s}f_2(s)\left(2\pi F_1(\mu)\right)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}2\pi F_1(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\mu s}f_2(s)ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}2\pi F_1(\mu)2\pi F_2(\mu)$$
$$=2\pi F_1(\mu)F_2(\mu) \qquad \bullet$$

บทพิสูจน์ (ค) : ให้ $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$

แล้ว
$$2\pi i\mu F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)i\mu e^{-i\mu x}dx$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left(\frac{d}{dx}\right)e^{-i\mu x}dx$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วน โดยให้ $u=f(x),\ dv=\left(\dfrac{d}{dx}\right)e^{-i\mu x}dx$

ดังนั้น
$$2\pi i\mu F(\mu)=-f(x)e^{-i\mu x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\mu x}dx$$

$$2\pi i\mu F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\mu x}\,dx$$

$$i\mu F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} f'(x)\,dx$$

ดังนั้น $i\mu F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f'(x)$

ต่อไปจะแสดงว่า $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $-ixf(x)$

จาก $$F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}\,dx$$

แล้ว $$\frac{d}{d\mu}F(\mu) = \frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}\,dx\right)$$

$$2\pi F'(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ixe^{-i\mu x})\,dx$$

$$F'(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)(e^{-i\mu x})f(x)\,dx$$

ดังนั้น $F'(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $-ixf(x)$ ●

บทพิสูจน์ (ง) : ให้ $F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$

เพราะว่า $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\mu x}\,dx = e^{ia\mu}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\mu(x-a)}\,d(x-a)$$

$$= e^{ia\mu}F(\mu)$$

ดังนั้น $e^{ia\mu}F(\mu)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x-a)$

และ $$F(\mu+b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\mu+b)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ibx}f(x)e^{-i\mu x}\,dx$$

ดังนั้น $F(\mu+b)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{-ibx}f(x)$ ●

บทพิสูจน์ (จ) : ให้ F เป็นการแปลงฟูเรียร์ของ f แล้ว ทฤษฎีบทปาร์เซอวาล จริง

จะได้ $$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|F(\mu)|^2\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$$ ●

ตัวอย่าง 3.1 : จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ "square wave"

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 \quad \text{เมื่อ} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

วิธีทำ จาก $F(\mu)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx=\dfrac{1}{2\pi}\int_{a}^{b} e^{-i\mu x}dx$

$$\mathrm{F}(\mu)=\begin{cases}\dfrac{e^{-i\mu b}-e^{-i\mu a}}{-2\pi i\mu}, \mu\neq 0\\ \dfrac{b-a}{2\pi} \quad, \mu=0\end{cases}$$

จากทฤษฎีบท 3.1 $\lim\limits_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} F(\mu)e^{i\mu x}d\mu=\dfrac{1}{2}f(x+0)+\dfrac{1}{2}f(x-0)$

จะได้ $$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{(e^{-i\mu b}-e^{-i\mu a})e^{i\mu x}}{-2\pi i\mu}d\mu=\begin{cases}0 & ,x<a\\ 1/2 & ,x=a\\ 1 & ,a<x<b\\ 1/2 & ,x=b\\ 0 & ,x>b\end{cases}$$

และโดยทฤษฎีบทปาร์เซอวาล $2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\mu)\right|^2 d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx$

จะได้ $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|e^{-i\mu b}-e^{-i\mu a}\right|^2}{\mu^2}d\mu=b-a$$ ●

ตัวอย่าง 3.2 : ให้ $f(x)=x^2e^{-x}$ สำหรับ $x>0$ และ $f(x)=0$ สำหรับ $x<0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า $F(\mu)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx$

จะได้
$$\begin{aligned}2\pi F(\mu)&=\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}e^{-i\mu x}dx\\ &=\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x(1+i\mu)}dx\\ &=\frac{2}{(1+i\mu)^3}\end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ $F(\mu)$ คือ $\dfrac{1}{\pi(1+i\mu)^3}$ ●

ตัวอย่าง 3.3 : ให้ $f(x)=(\sin x)e^{-x}$ สำหรับ $x>0$ และ $f(x)=0$ สำหรับ $x<0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า $F(\mu)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx$

จะได้ $$2\pi F(\mu) = \int_0^\infty (\sin x)e^{-x}e^{-i\mu x}dx$$

$$= (2i)^{-1}\int_0^\infty (e^{-x(1+i\mu-i)} - e^{-x(1+i\mu+i)})dx$$

$$= (2i)^{-1}\left(\frac{1}{(1+i\mu-i)} - \frac{1}{(1+i\mu+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+i\mu)^2+1}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$ คือ $\dfrac{1}{2\pi[(1+i\mu)^2+1]}$ ●

ตัวอย่าง 3.4 : ให้ $f(x) = e^{-x}$ สำหรับ $x > 0$ และ $f(x) = e^{2x}$ สำหรับ $x < 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$

วิธีทำ เพราะว่า $$F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx$$

จะได้ $$2\pi F(\mu) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-i\mu x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{2x}e^{-i\mu x}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x(1+i\mu)}dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(2-i\mu)}dx$$

$$= \frac{1}{1+i\mu} + \frac{1}{2-i\mu}$$

นั่นคือ $$F(\mu) = \frac{3}{2\pi(2+i\mu+\mu^2)}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $F(\mu)$ คือ $\dfrac{3}{2\pi(2+i\mu+\mu^2)}$ ●

ตัวอย่าง 3.5 : จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x) = e^{-|x|}$

วิธีทำ เพราะว่า $$F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx$$

จะได้ $$2\pi F(\mu) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-i\mu x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{x}e^{-i\mu x}dx$$

$$= \frac{1}{1+i\mu} + \frac{1}{1-i\mu} = \frac{2}{1+\mu^2}$$

ดังนั้นการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\dfrac{1}{\pi(1+\mu^2)}$ ●

ตัวอย่าง 3.6 : จงหาการแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.5 เราได้ว่าการแปลงฟูเรียร์ของ $e^{-|x|}$ คือ $\dfrac{1}{\pi(1+\mu^2)}$

ใช้ ทฤษฎีบท 3.1 คือ $\lim\limits_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}F(\mu)e^{i\mu x}d\mu=\frac{1}{2}f(x+0)+\frac{1}{2}f(x-0)$

จะได้ $$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\pi(1+\mu^2)}e^{i\mu x}d\mu=e^{-|x|}$$

นั่นคือ $$\pi e^{-|x|}=\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{1}{(1+\mu^2)}e^{i\mu x}d\mu$$

และเนื่องจากปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้าแบบสมบูรณ์ เปลี่ยนตัวแปร x และ μ

จะได้ $$\frac{1}{2\pi}\pi e^{-|\mu|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{1}{(1+x^2)}e^{i\mu x}dx$$

ดังนั้น การแปลงฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ $\dfrac{e^{-|\mu|}}{2}$ ●

การแปลงฟูเรียร์ไซน์และการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

ในสมการ (3-5) และ สมการ (3-6) เป็นการหาการแปลงฟูเรียร์ของ f ที่นิยามบนช่วง $(-\infty,\infty)$ ถ้าต้องการหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันที่นิยามเพียงครึ่งช่วง คือ $x>0$ เราสามารถขยายฟังก์ชันสำหรับค่า $x<0$ โดยแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณี 1 : ให้ f_E เป็นฟังก์ชันที่นิยาม โดย

$$f_E(x)=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ f(-x), & x<0 \end{cases}$$

แล้ว f_E เป็นฟังก์ชันคู่

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}2\pi F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx+\int_{-\infty}^{0} f(-x)e^{-i\mu x}dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx-\int_{\infty}^{0} f(x)e^{i\mu x}dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}dx+\int_0^{\infty} f(x)e^{i\mu x}dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x)(e^{-i\mu x}+e^{i\mu x})dx\end{aligned}$$

เพราะว่า $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

ดังนั้น $2\pi F(\mu) = 2\int_0^\infty f(x)\cos\mu x dx$

และเมื่อแทน $F_c(\mu) = 2F(\mu)$ จะได้

$$F_c(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\mu x dx \qquad (3\text{-}8)$$

และจาก สมการ (3-5)

จะได้
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^\infty F(\mu)e^{i\mu x} \\ &= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} + \int_{-\infty}^0 F(-\mu)e^{i\mu x}d\mu \\ &= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} - \int_\infty^0 F(\mu)e^{-i\mu x}d\mu \\ &= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} + \int_0^\infty F(\mu)e^{-i\mu x}d\mu \\ &= \int_0^\infty F(\mu)(e^{i\mu x} + e^{-i\mu x})d\mu \end{aligned}$$

เพราะว่า $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

ดังนั้น $f(x) = 2\int_0^\infty F(\mu)\cos\mu x d\mu$

และเมื่อแทน $F_c(\mu) = 2F(\mu)$ จะได้

$$f(x) = \int_0^\infty F_c(\mu)\cos\mu x d\mu \qquad (3\text{-}9)$$

เรียก $F_c(\mu)$ และ $f(x)$ เมื่อ $x \in (-\infty, \infty)$ ว่าคู่ของการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ ■

กรณี 2 : ให้ f_O เป็นฟังก์ชันที่นิยาม โดย

$$f_O(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

แล้ว f_O เป็นฟังก์ชันคี่

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} 2\pi F(\mu) &= \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\mu x}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)e^{-i\mu x}dx + \int_{-\infty}^0 -f(-x)e^{-i\mu x}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)e^{-i\mu x}dx + \int_\infty^0 f(x)e^{i\mu x}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)e^{-i\mu x}dx - \int_0^\infty f(x)e^{i\mu x}dx \end{aligned}$$

$$2\pi F(\mu) = -\int_0^\infty f(x)(-e^{-i\mu x} + e^{i\mu x})dx$$

เพราะว่า $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

ดังนั้น $2\pi F(\mu) = -2i\int_0^\infty f(x)\sin\mu x dx$

และเมื่อแทน $F_s(\mu) = 2iF(\mu)$

จะได้ $$F_s(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\mu x dx \qquad (3\text{-}10)$$

และจาก สมการ (3-5)

จะได้
$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\mu)e^{i\mu x}$$
$$= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} + \int_{-\infty}^0 -F(-\mu)e^{i\mu x}d\mu$$
$$= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} + \int_\infty^0 F(\mu)e^{-i\mu x}d\mu$$
$$= \int_0^\infty F(\mu)e^{i\mu x} - \int_0^\infty F(\mu)e^{-i\mu x}d\mu$$
$$= \int_0^\infty F(\mu)(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x})d\mu$$

เพราะว่า $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

ดังนั้น $f(x) = 2i\int_0^\infty F(\mu)\sin\mu x d\mu$

และเมื่อแทน $F_s(\mu) = 2iF(\mu)$

จะได้ $$f(x) = \int_0^\infty F_s(\mu)\sin\mu x d\mu \qquad (3\text{-}11)$$

และเรียก $F_s(\mu)$ และ $f(x)$ เมื่อ $x \in (-\infty,\infty)$ ว่าคู่การแปลงฟูเรียร์ไซน์ ■

ตัวอย่าง 3.7 : ให้ $f(x) = e^{-ax}$ สำหรับ $x > 0$ เมื่อ $a > 0$ จงหาการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ $F_c(\mu)$ และการแปลงฟูเรียร์ไซน์ $F_s(\mu)$

วิธีทำ $$\int_0^\infty e^{-ax}e^{i\mu x}dx = \int_0^\infty e^{-x(a-i\mu)}dx = \frac{1}{a-i\mu} = \frac{a+i\mu}{a^2+\mu^2}$$

แยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพจะได้

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\mu x dx = \frac{a}{a^2+\mu^2} \quad \text{และ} \quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin\mu x dx = \frac{\mu}{a^2+\mu^2}$$

ดังนั้น
$$F_c(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\mu x dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos\mu x dx$$
$$= \frac{2a}{\pi(a^2+\mu^2)}$$

และ
$$F_s(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\mu x dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\sin\mu x dx$$
$$= \frac{2\mu}{\pi(a^2+\mu^2)}$$

●

บทที่ 4

การประยุกต์ใช้การแปลงฟูเรียร์ในคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

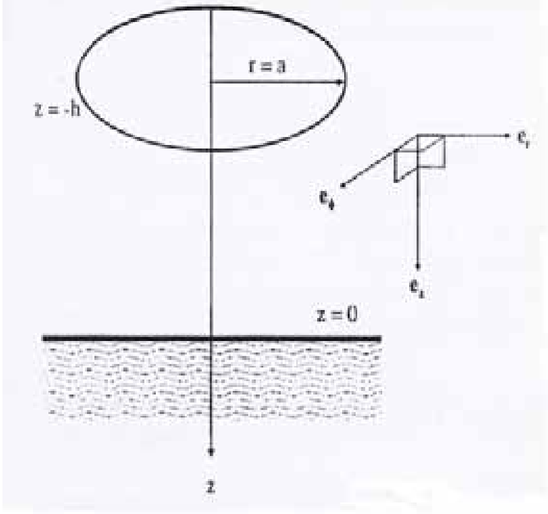
โดยทั่วไปวิธีการทางแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการสำรวจหาแหล่งทรัพยากรที่ฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลก เพราะว่าวิธีการดังกล่าวใช้ค่าใช้จ่ายในการสำรวจค่อนข้างต่ำกว่าวิธีการอื่น และสา มารถสำรวจหาแหล่งทรัพยากรที่ฝังตัวอยู่ตั้งแต่ระดับตื้นๆ จนไปถึงระดับที่ลึกมาก ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความถี่และเป้าหมายของการสำรวจ

หลักการสำคัญของวิธีการนี้คือการใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ปลดปล่อยจากแหล่งกำเนิด (source) (ซึ่งโดยทั่วไปแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ ใช้เป็นขดลวดวงแหวนกลมวางตัวอยู่ในแนวระดับหรือแนวดิ่งซึ่งถูกติดตั้งอยู่ในอากาศหรือที่ระดับพื้นผิวโลก) ไปเหนี่ยวนำตัวกลางอื่นๆ ที่อยู่โดยรอบทั้งในอากาศและในพื้นดิน แต่ตัวกลางที่สนใจคือตัวกลางที่เป็นพื้นดิน หลังจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าดังกล่าวเคลื่อนที่ทะลุเข้าไ ปในพื้นดิน พื้นดินจะถูกเหนี่ยวนำให้เกิดกระแสไหลวน (eddy currents) ซึ่งกระแสไหลวนนี้จะไปเหนี่ยวนำให้ตัวกลางต่างๆ ในพื้นดินให้สร้างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตอบสนองออกมา โดยสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตอบสนองออกมานี้จะถูกตรวจวัดด้วยเครื่องมือวัดปริมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถูกติดตั้ง ณ บริเวณพื้นผิวโลกหรือในอากาศ โดยเราจะเรียกสนามแม่เหล็กไฟฟ้ าที่ปลดปล่อยออกมาจากแหล่งกำเนิดว่าสนามปฐมภูมิ (primary fields) ส่วนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพื้นดินที่ถูกเหนี่ยวนำจากกระแสไหลวนถูกเรียกว่าสนามทุติยภูมิ (secondary fields)

เป้าหมายหลักที่สำคัญเป้าหมายหนึ่งในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการตอบสนองต่อสนามแม่เห ล็กไฟฟ้าของพื้นโลกคือการทำนายปริมาณและพฤติกรรมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในพื้นโลกหรือที่พื้นผิวโลก ในช่วงเวลา 30 ปีที่ผ่านมา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสำรวจด้วยวิธีทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ใช้สมมติฐานที่ว่าโครงสร้างของโลกสามารถแบ่งออกเป็นชั้นๆ ตามแนวระดับ โดยแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัดยกเว้นชั้นล่างสุดจะมีความลึกเป็นอนันต์ ตัวอย่างเช่น Ryu และ Ward (1970) ได้สร้าง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ของพื้นโลกที่มีโครงสร้างเป็นชั้นๆ ในลักษณะดังกล่าวข้างต้นโดยแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าถูกสร้างจากขดลวดวงแหวนกลมวางตัวขนานกับพื้นโลก (ดูรูปที่ 4-1) อย่างไรก็ตามแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สมมติฐานดังกล่าวข้างต้นมีความไม่สมจริงกับโครงสร้างทางธรณีวิทยาของพื้นโลกในบางบริเวณ เช่น ณ บางบริเวณของโลกซึ่งเปลือกโลกชั้นบนสุด (overburden) เป็นชั้นดินใหม่ทับถมอยู่บนเปลือกโลกที่เป็นชั้นดินที่เก่ามากๆ อายุหลายหมื่นหลายแสนปี สภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดของอาณาบริเวณดังกล่าวจะไม่เป็นค่าคงตัวเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ในทางตรงข้ามลักษณะของสภาพนำไฟฟ้าของเปลือกโลกชั้นบนสุดจะมีลักษณะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น

แบบจำลองของโลกที่มีโคลงสร้างเป็นชั้นๆ และน่าสนใจศึกษาเป็นพิเศษคือแบบจำลองที่มีชั้นบางชั้นมีลักษณะ ของสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องกับความลึกที่เพิ่มขึ้น (คงตัวในแนวระดับ) โดยเฉพาะกรณีที่การเปลี่ยนแปลงของสภาพนำไฟฟ้าเป็นแบบเอ็กซ์โปแนนเชียล ซึ่งเป็นกรณีหนึ่งที่มีการเปลี่ยนแปลงทางสภาพนำไฟฟ้าค่อนข้างสมจริง เหตุผลหนึ่งที่มาสนับสนุนแนวความคิดดังกล่าวคือ เหตุผลที่ได้รายงานไว้ในงานวิจัยของ Lee และ Ignetik (1994) พวกเขาได้พิจารณาการตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้าชั่วขณะต่อพื้นโลกที่มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบเอ็กซ์โปแนนเชียล และได้ชี้ให้เห็นถึงเหตุผลที่มาสนับสนุนว่ามีอาณาบริเวณบางแห่งในโลกที่มีลักษณะของสภาพนำไฟ ฟ้าของชั้นเปลือกโลกบางชั้นเปลี่ยนแปลงแบบเอ็กซ์โปแนนเชียลกับความลึกเพิ่มขึ้น



ภาพที่4-1 : แบบจำลองทางเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกที่มีแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สนามไฟฟ้าในบริเวณทั่วไป

สนามแม่เหล็กประกอบด้วยองค์ประกอบสองส่วนคือ H_r และ H_z สำหรับสนามไฟฟ้าประกอบด้วยองค์ประกอบในแนว ϕ เพื่อให้ง่ายจะใช้สัญลักษณ์ E จากงานของMorrison(1969)จะได้สมการที่สอดคล้องกับของแม็กซ์เวลส์(Maxwell's equation)ที่มีรูปแบบดังนี้

$$i\omega\mu H_r = -\frac{\partial E}{\partial z} \tag{4-1}$$

$$i\omega\mu H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rE)}{\partial r} \tag{4-2}$$

และ

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s \tag{4-3}$$

เมื่อ $J_s = I(\omega)\delta(r-a)\delta(z+h)$ คือ ตัวส่งกระแสสัญญาณ(source current density)

ω คือ ความถี่เชิงมุม

δ คือ ฟังก์ชันเดลต้า โดยที่ สำหรับทุก $x \in \Re, \delta(x) = \begin{cases} 1; x = 0 \\ 0; x \neq 0 \end{cases}$

$\sigma(z)$ คือ สภาพนำไฟฟ้า(electrical conductivity)

ε คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของตัวกลางใดๆ

μ คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของตัวกลางใดๆ

จากสมการ(4-1), (4-2) และ (4-3) เราสามารถหาสนามไฟฟ้าโดยใช้กระบวนการดังนี้

หาอนุพันธ์สมการ(4-1)เทียบกับ z จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z}(i\omega\mu H_r) = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$$

หรือ

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \tag{4-4}$$

หาอนุพันธ์สมการ(4-2) เทียบกับ r จะได้

$$\frac{\partial}{\partial r}(i\omega\mu H_z) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rE)}{\partial r}\right)$$

$$i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial E + E\partial r}{r\partial r}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r}\right)$$

$$i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{r}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{r\partial E - E\partial r}{r^2\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2}\right) \tag{4-5}$$

นำสมการ (4-4) และ (4-5) แทนในสมการ (4-3) จะได้

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \left(-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2}\right)\right)$$

$$= (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s$$

นั่นคือ $\frac{-1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2}\right) = (\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{E}{r^2} = -i\omega\mu\left[(\sigma(z) - i\omega\varepsilon)E + J_s\right]$$

$$= -(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E - i\omega\mu J_s$$

ดังนั้น $$i\omega\mu J_s = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \tag{4-6}$$

จากสมการ (4-6) ใช้การแปลงฮังเคิล(Hankel transform)ที่นิยามโดย

$$\widetilde{E}(\lambda, z, \omega) = \int_0^\infty rJ_1(\lambda r)E(r, z, \omega)dr$$

เมื่อ $J_1(\_)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1 (Bessel function of the first kind of order 1) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty r(i\omega\mu J_s)J_1(\lambda r)dr$$

$$= \int_0^\infty r\left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E\right)J_1(\lambda r)dr \tag{4-7}$$

ต่อไปจะพิจารณา

$$\int_0^\infty r\left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{E}{r^2}-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)E\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$=-\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty\frac{E}{r}J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)EJ_1(\lambda r)dr \tag{4-8}$$

และ $$-\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^\infty rEJ_1(\lambda r)dr$$

$$=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\widetilde{E}\right)=-\frac{\partial^2\widetilde{E}}{\partial z^2} \tag{4-9}$$

และ $$-\int_0^\infty r(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)EJ_1(\lambda r)dr=-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)\int_0^\infty rEJ_1(\lambda r)dr$$

$$=-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)\widetilde{E} \tag{4-10}$$

และ $$-\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr=-\int_0^\infty\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)+\frac{\partial E}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r}\right]J_1(\lambda r)dr$$

$$=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนโดยให้ $u=J_1(\lambda r)\,,dv=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)dr\,,du=\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)dr$

และ $v=r\frac{\partial E}{\partial r}$ จะได้

$$-\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$=-J_1(\lambda r)\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty r\frac{\partial E}{\partial r}\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\int_0^\infty r\frac{\partial E}{\partial r}\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)dr$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนโดยให้

$u=r\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)\ dv=\frac{\partial E}{\partial r}dr\,,du=\left(r\frac{d^2}{dr^2}J_1(\lambda r)+\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)\right)dr$ และ $v=E$ จะได้

$$-\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr=\int_0^\infty r\frac{\partial E}{\partial r}\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)dr$$

$$=r\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)E\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty E\left(r\frac{d^2}{dr^2}J_1(\lambda r)+\frac{d}{dr}J_1(\lambda r)\right)dr$$

$$-\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r)dr = -\int_0^\infty \left(rE\frac{d^2}{dr^2}J_1(\lambda r) + E\frac{d}{dr}J_1(\lambda r) \right) dr$$

$$= -\int_0^\infty \left(rE\frac{d(\lambda r)}{dr}\frac{d(\lambda r)}{dr}J_1''(\lambda r) + E\frac{d(\lambda r)}{dr}J_1'(\lambda r) \right) dr$$

$$= -\int_0^\infty \left(rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) \right) dr$$

และ $\quad -\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty \frac{E}{r}J_1(\lambda r)dr$

$$= -\int_0^\infty \left(rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) \right) dr + \int_0^\infty \frac{E}{r}J_1(\lambda r)dr$$

$$= -\int_0^\infty \left(rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r}J_1(\lambda r) \right) dr$$

เนื่องจาก $\quad J_1''(\lambda r) + \frac{1}{\lambda r}J_1'(\lambda r) + \left(1 - \frac{1}{\lambda^2 r^2} \right) J_1(\lambda r) = 0$

จะได้ว่า $\quad rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) + rE\lambda^2 J_1(\lambda r) - \frac{E}{r}J_1(\lambda r) = 0$

นั่นคือ $\quad rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r}J_1(\lambda r) = -rE\lambda^2 J_1(\lambda r)$

ดังนั้น $\quad -\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty \frac{E}{r}J_1(\lambda r)dr$

$$= -\int_0^\infty \left(rE\lambda^2 J_1''(\lambda r) + E\lambda J_1'(\lambda r) - \frac{E}{r}J_1(\lambda r) \right) dr$$

$$= -\int_0^\infty \left(-rE\lambda^2 J_1(\lambda r) \right) dr$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty rEJ_1(\lambda r)dr$$

$$= \lambda^2 \widetilde{E} \qquad (4\text{-}11)$$

แทนสมการ (4-9), (4-10) และ (4-11) ในสมการ (4-8) จะได้

$$\int_0^\infty r\left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E \right) J_1(\lambda r)dr$$

$$= -\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{\partial E}{\partial r} \right) J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty \frac{E}{r}J_1(\lambda r)dr$$

$$- \int_0^\infty r(i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)EJ_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty r\left(-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{E}{r^2}-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)E\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$=-\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial z^2}+\lambda^2\widetilde{E}-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)\widetilde{E}$$

$$=-\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial z^2}+[\lambda^2-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)]\widetilde{E} \qquad (4\text{-}12)$$

ต่อไปพิจารณา $\int_0^\infty r(i\omega\mu J_s)J_1(\lambda r)dr$

จะได้ $\int_0^\infty r(i\omega\mu J_s)J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\int_0^\infty rJ_sJ_1(\lambda r)dr$

$$= i\omega\mu\int_0^\infty r\big[I(\omega)\delta(r-a)\delta(z+h)\big]J_1(\lambda r)dr$$

$$= i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)\int_0^\infty r\delta(r-a)J_1(\lambda r)dr$$

และเพราะว่า $\int_0^\infty r\delta(r-a)J_1(\lambda r)dr = aJ_1(\lambda a)$

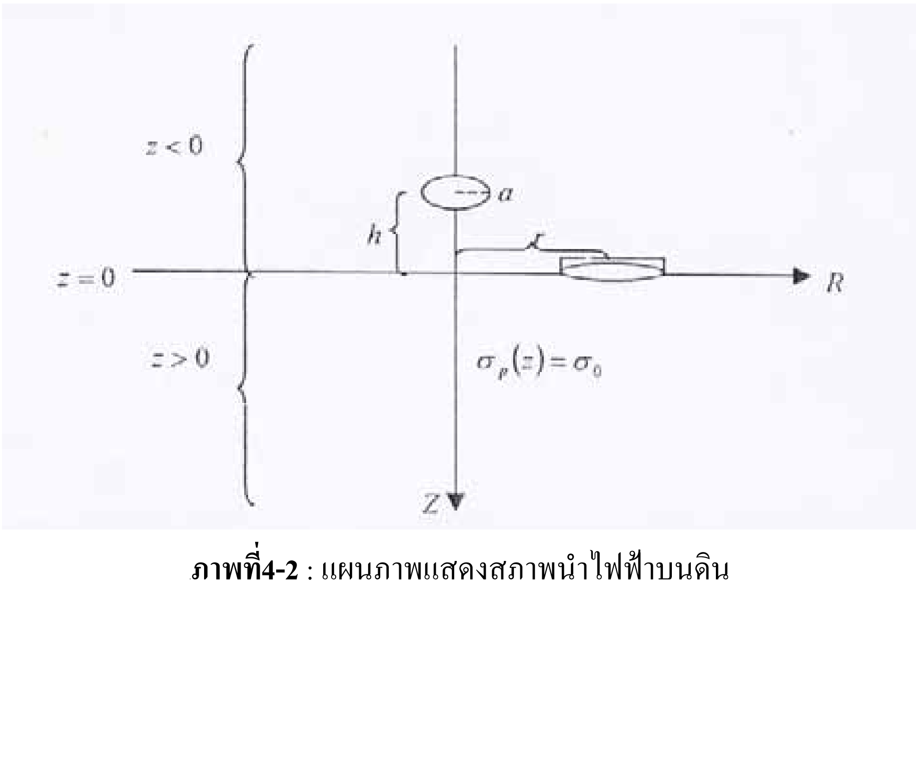
ดังนั้น $\int_0^\infty r(i\omega\mu J_s)J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)\int_0^\infty r\delta(r-a)J_1(\lambda r)dr$

$$= i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) \qquad (4\text{-}13)$$

แทนสมการ (4-12) และ (4-13) ในสมการ (4-7) จะได้

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial z^2}+[\lambda^2-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)]\widetilde{E} \qquad (4\text{-}14)$$

ต่อไปจะใช้สมการ (4-14) หาสนามไฟฟ้าในบริเวณต่างๆ



ภาพที่4-2 : แผนภาพแสดงสภาพนำไฟฟ้าบนดิน

สนามไฟฟ้าในอากาศ

สนามไฟฟ้าในอากาศแทนด้วยสัญลักษณ์ $\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega)$ ซึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ

$$\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega)=\widetilde{E}^{p}(\lambda,z,\omega)+\widetilde{E}^{s}(\lambda,z,\omega) \tag{4-15}$$

ในอากาศค่าของ $\sigma_{air}(z)\cong 0$, $\mu_{air}\approx\mu_0$ และ $\varepsilon_{air}\approx\varepsilon_0$

เมื่อ $\widetilde{E}^{p}(\lambda,z,\omega)$ คือ สนามไฟฟ้าปฐมภูมิ

$\widetilde{E}^{s}(\lambda,z,\omega)$ คือ สนามไฟฟ้าทุติยภูมิ

μ_0 คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ

ε_0 คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ

ดังนั้นจากสมการ (4-14)

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a)=-\frac{\partial^2\widetilde{E}}{\partial z^2}+[\lambda^2-(i\omega\mu\sigma(z)+\omega^2\mu\varepsilon)]\widetilde{E}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}i\omega\mu_0 aI(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a)&=-\frac{\partial^2\widetilde{E}^p}{\partial z^2}+[\lambda^2-(i\omega\mu_0\sigma_{air}(z)+\omega^2\mu_0\varepsilon_0)]\widetilde{E}^p\\&=-\frac{\partial^2\widetilde{E}^p}{\partial z^2}+[\lambda^2-(\omega^2\mu_0\varepsilon_0)]\widetilde{E}^p\end{aligned}$$

ให้ $k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$ และ $m_0^2=\lambda^2-k_0^2$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$i\omega\mu_0 aI(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a)=-\frac{\partial^2\widetilde{E}^p}{\partial z^2}+m_0^2\widetilde{E}^p \tag{4-16}$$

จะเห็นว่า สมการ (4-16) อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ordinary differential equation) และสามารถเขียนสมการ (4-16)ใหม่ได้เป็น

$$i\omega\mu_0 aI(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a)=-\frac{d^2\widetilde{E}^p}{dz^2}+m_0^2\widetilde{E}^p \tag{4-17}$$

ต่อไปจะหาผลเฉลยของสมการ (4-17) ซึ่งอยู่ในรูปที่ไม่เอกพันธุ์

ให้ผลเฉลย คือ $\widetilde{E}^{p}(\lambda,z,\omega)=\widetilde{E}_h^{p}(\lambda,z,\omega)+\widetilde{E}_p^{p}(\lambda,z,\omega)$ (4-18)

เมื่อ $\widetilde{E}_h^{p}(\lambda,z,\omega)$ คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์

และ $\widetilde{E}_p^{p}(\lambda,z,\omega)$ คือ ผลเฉลยเฉพาะ

และจะหาผลเฉลย $\widetilde{E}_h^{p}(\lambda,z,\omega)$ ได้จากสมการ $\dfrac{d^2\widetilde{E}_h^p}{dz^2}-m_0^2\widetilde{E}_h^p=0$

ผลเฉลยที่ได้คือ $\widetilde{E}_h^p(\lambda,z,\omega)=A_1e^{-m_0z}+A_2e^{m_0z}$

เมื่อ A_1,A_2 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบสำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะจะหาโดยใช้วิธีการกระจายพารามิเตอร์(method of variation of parameters)

$$\widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega)=\widetilde{E}_1\int\frac{i\omega\mu_0aI(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a)\widetilde{E}_2}{W\{\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2\}}dz-\widetilde{E}_2\int\frac{i\omega\mu_0aI(\omega)\delta(z+h)J_1(\lambda a)\widetilde{E}_1}{W\{\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2\}}dz$$

เมื่อ $\widetilde{E}_1$ และ $\widetilde{E}_2$ คือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์

และ $W\{\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2\}$ คือ รอนสเกียน

กำหนดให้ $g=-i\omega\mu_0aI(\omega)J_1(\lambda a)$, $\widetilde{E}_1=e^{-m_0z}$, $\widetilde{E}_2=e^{m_0z}$

และ

$$\begin{aligned}W\{\widetilde{E}_1,\widetilde{E}_2\}&=\widetilde{E}_1\widetilde{E}_2'-\widetilde{E}_2\widetilde{E}_1'\\&=e^{-m_0z}(m_0e^{m_0z})-e^{m_0z}(-m_0e^{-m_0z})\\&=m_0+m_0=2m_0\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$\widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega)=-e^{-m_0z}\int\frac{g\delta(z+h)e^{m_0z}}{2m_0}dz+e^{m_0z}\int\frac{g\delta(z+h)e^{-m_0z}}{2m_0}dz$$

ค่าลิมิตของการหาปริพันธ์เลือกกำหนดโดยใช้เงื่อนไขของบริเวณอากาศค่าสนามไฟฟ้าจาก $z=-\infty$ ถึง $z=0$ ทำให้เขียนสมการข้างบนได้เป็น

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega)&=-e^{-m_0z}\int_{-\infty}^{z}\frac{g\delta(x+h)e^{m_0x}}{2m_0}dx+e^{m_0z}\int_{0}^{z}\frac{g\delta(x+h)e^{-m_0x}}{2m_0}dx\\&=\frac{g}{2m_0}\left[-e^{-m_0z}\int_{-\infty}^{z}e^{m_0x}\delta(x+h)dx-e^{m_0z}\int_{z}^{0}e^{-m_0x}\delta(x+h)dx\right]\\&=-\frac{g}{2m_0}\left[\int_{-\infty}^{z}e^{-m_0(z-x)}\delta(x+h)dx+\int_{z}^{0}e^{m_0(z-x)}\delta(x+h)dx\right]\\&=-\frac{g}{2m_0}\int_{-\infty}^{0}G(z,x)dx\end{aligned}$$

เมื่อ $G(z,x)$ คือฟังก์ชันของกรีน(Green's function) ที่นิยามโดย

$$G(z,x)=e^{-m_0|z-x|}\delta(x+h)=\begin{cases}e^{-m_0(z-x)}\delta(x+h);z\ge x\\e^{m_0(z-x)}\delta(x+h);z<x\end{cases}$$

และเพราะว่า $\int_{-\infty}^{0}G(z,x)dx=\int_{-\infty}^{0}e^{-m_0|z-x|}\delta(x+h)dx=e^{-m_0|z+h|}$

ดังนั้น $$\widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega) = -\frac{g}{2m_0}\int_{-\infty}^{0} G(z,x)dx$$

$$= -\frac{g}{2m_0}e^{-m_0|z+h|}, z \le 0$$

แทนค่า $\widetilde{E}_h^p(\lambda,z,\omega)$ และ $\widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega)$ ในสมการ (4-18) จะได้

$$\widetilde{E}^p(\lambda,z,\omega) = \widetilde{E}_h^p(\lambda,z,\omega) + \widetilde{E}_p^p(\lambda,z,\omega)$$

$$= A_1e^{-m_0 z} + A_2 e^{m_0 z} - \frac{g}{2m_0}e^{-m_0|z+h|}$$

$$= A_1e^{-m_0 z} + A_2 e^{m_0 z} - \frac{[-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)]}{2m_0}e^{-m_0|z+h|}$$

เมื่อ $z \to -\infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim\limits_{z\to-\infty}\widetilde{E}^p \to 0$ ดังนั้นจะได้ $A_1 = 0$

ดังนั้น $$\widetilde{E}^p(\lambda,z,\omega) = A_2 e^{m_0 z} + \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} \qquad (4\text{-}19)$$

สำหรับสนามไฟฟ้าทุติยภูมิ($\widetilde{E}^s$) เนื่องจาก $I(\omega) = 0$ ดังนั้นจากสมการ (4-14)

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h)aJ_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2\widetilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)]\widetilde{E}$$

จะได้ $$0 = -\frac{\partial^2\widetilde{E}^s}{\partial z^2} + [\lambda^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0)]\widetilde{E}^s$$

$$0 = \frac{\partial^2\widetilde{E}^s}{\partial z^2} - m_0^2\widetilde{E}^s$$

จะเห็นว่า สมการข้างต้นอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญเอกพันธุ์และเขียนได้

$$\frac{d^2\widetilde{E}^s}{dz^2} - m_0^2\widetilde{E}^s = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\widetilde{E}^s(\lambda,z,\omega) = A_3 e^{-m_0 z} + A_4 e^{m_0 z}$$

เมื่อ A_3, A_4 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบ

ซึ่ง $z \to -\infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim\limits_{z\to-\infty}\widetilde{E}^s \to 0$ ดังนั้นจะได้ $A_3 = 0$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าทุติยภูมิ คือ

$$\widetilde{E}^s(\lambda,z,\omega) = A_4 e^{m_0 z} \qquad (4\text{-}20)$$

แทนสมการ (4-19) และ (4-20) ในสมการ (4-15) จะได้สนามไฟฟ้าในอากาศ คือ

$$\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega) = A_3 e^{m_0 z} + \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A_4 e^{m_0 z}$$

$$\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega) = \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + A e^{m_0 z}, z \le 0 \qquad (4\text{-}21)$$

เมื่อ $A = A_3 + A_4$

สนามไฟฟ้าในพื้นดิน

สนามไฟฟ้าในพื้นดินแทนด้วยสัญลักษณ์ $\widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega)$ หรือ $E_{gro}(r,z,\omega)$

ให้ $\sigma_{gro}(z) = \sigma_0$ คือ สภาพนำไฟฟ้าในพื้นดินซึ่งสมมติให้มีค่าคงตัว

ε_g คือ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของพื้นดิน

μ_g คือ ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของพื้นดิน

$k_g^2 = i\omega\mu_g\sigma_0 + \omega^2\mu_g\varepsilon_g$ และ $m_g^2 = \lambda^2 - k_g^2$

จากสมการ (4-6)

$$i\omega\mu J_s = -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r^2} - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)E$$

สำหรับในพื้นดิน ค่า J_s คือตัวส่งกระแสสัญญาณซึ่งมีค่าเป็น 0 จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{gro}}{\partial r} - \frac{E_{gro}}{r^2} + (i\omega\mu_g\sigma_0(z) + \omega^2\mu_g\varepsilon_g)E_{gro} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{gro}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{gro}}{\partial r} - \frac{E_{gro}}{r^2} + k_g^2 E_{gro} = 0$$

ใช้การแปลงฮังเคิล และ จากสมการ (4-14) จะได้

$$i\omega\mu I(\omega)\delta(z+h) a J_1(\lambda a) = -\frac{\partial^2 \widetilde{E}}{\partial z^2} + [\lambda^2 - (i\omega\mu\sigma(z) + \omega^2\mu\varepsilon)]\widetilde{E}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}_{gro}}{\partial z^2} - m_g^2 \widetilde{E}_{gro} = 0$$

จะเห็นว่า สมการข้างต้นอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์และสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2 \widetilde{E}_{gro}}{dz^2} - m_g^2 \widetilde{E}_{gro} = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega)=A_5e^{-m_gz}+A_6e^{m_gz}$$

เมื่อ A_5, A_6 คือ ตัวคงค่าที่ได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบ

ซึ่ง $z\to\infty$ แล้วสนามไฟฟ้าจะมีค่าเป็น 0 นั่นคือ $\lim_{z\to\infty}\widetilde{E}_{gro}\to 0$ ดังนั้นจะได้ $A_6=0$

ดังนั้นสนามไฟฟ้าในพื้นดิน คือ

$$\widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega)=A_5e^{-m_gz}, z\geq 0 \tag{4-22}$$

เงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้า

จากสมการ (4-21) และ (4-22) จะมีตัวคงค่า A และ A_5 ที่ไม่ทราบค่าติดอยู่ เราจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าในอากาศและในพื้นดิน โดยพิจารณาสนามไฟฟ้าบริเวณรอยต่อระหว่างอากาศกับพื้นดิน เพื่อหาตัวคงค่านั้น โดยการประมาณให้ $\mu_g=\mu_0$, $\varepsilon_g=\varepsilon_0$,

$$\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega)=\widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega)$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega)=\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega)$$

หาอนุพันธ์สมการ (4-21) และ (4-22) เทียบกับ z จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0}+Ae^{m_0z}\right)\\
&=\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)}{2m_0}\frac{\partial}{\partial z}(e^{-m_0|z+h|})+A\frac{\partial}{\partial z}(e^{m_0z})\\
&=\frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}m_0}{2m_0}+m_0Ae^{m_0z}\\
&=-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2}+m_0Ae^{m_0z}\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega) &= \frac{\partial}{\partial z}A_5e^{-m_gz}\\
&=A_5\frac{\partial}{\partial z}e^{-m_gz}\\
&=-m_gA_5e^{-m_gz}\end{aligned}$$

และที่บริเวณรอยต่อ $(z=0)$ จะได้

$$\widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega)=A_5$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega) = -m_g A_5$$

และ $\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega) = \dfrac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0} + A$

$$= \gamma + A \qquad \text{เมื่อ} \qquad \gamma = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2}\frac{m_0}{m_0} + m_0 A$$

$$= -m_0\gamma + m_0 A$$

ดังนั้นจาก $\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega) = \widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega)$

จะได้ $\gamma + A = A_5$

นั่นคือ $A = A_5 - \gamma$ (4-23)

และจาก $\dfrac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{air}(\lambda,0,\omega) = \dfrac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}_{gro}(\lambda,0,\omega)$

จะได้ $-m_0\gamma + m_0 A = -m_g A_5$

นั่นคือ $A = -\dfrac{m_g}{m_0}A_5 + \gamma$ (4-24)

จากสมการ (4-23) และ (4-24) จะได้ว่า

$$A_5 - \gamma = -\frac{m_g}{m_0}A_5 + \gamma$$

$$\frac{m_0 A_5 + m_g A_5}{m_0} = 2\gamma$$

นั่นคือ $A_5 = \dfrac{2m_0\gamma}{m_0 + m_g}$

แทนค่า A_5 ไปที่สมการ (4-23) จะได้

$$A = \frac{2m_0\gamma}{m_0 + m_g} - \gamma = \left(\frac{2m_0}{m_0 + m_g} - 1\right)\gamma$$

แทนค่า A และ A_5 ในสมการ (4-21) และ (4-22) จะได้

$$\widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega) = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + Ae^{m_0 z}$$

$$= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + \left(\frac{2m_0}{m_0+m_g} - 1\right)\gamma e^{m_0 z}, z \le 0 \qquad (4\text{-}25)$$

และ

$$\widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega) = A_5 e^{-m_g z}$$

$$= \frac{2m_0\gamma}{m_0+m_g}e^{-m_g z}, z \ge 0 \qquad (4\text{-}26)$$

จะหา $E_{air}(r,z,\omega)$ และ $E_{gro}(r,z,\omega)$ ได้โดยใช้การแปลงฮังเคิลผกผัน ในสมการ (4-25) และ (4-26) ดังนี้

$$E_{air}(r,z,\omega) = \int_0^\infty \lambda \widetilde{E}_{air}(\lambda,z,\omega)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0} + \left(\frac{2m_0}{m_0+m_g} - 1\right)\gamma e^{m_0 z}\right]J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0}\right]J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \int_0^\infty \lambda\left(\frac{2m_0}{m_0+m_g} - 1\right)\gamma e^{m_0 z}J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|z+h|}}{2m_0}\right]J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \int_0^\infty \lambda\left(\frac{2m_0}{m_0+m_g} - 1\right)\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0}e^{m_0 z}J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0}e^{-m_0|z+h|}J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \int_0^\infty \lambda\left(\frac{2m_0}{m_0+m_g}\right)\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0}e^{m_0 z}J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$- \int_0^\infty \lambda\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0}e^{m_0 z}J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} e^{-m_0|z+h|} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0+m_g}\right) i\omega\mu_0 aI(\omega) e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$- \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0} e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)}{2}\int_0^\infty \frac{\lambda}{m_0}\left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-|h|)}\right) J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ i\omega\mu_0 aI(\omega)\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0+m_g}\right) e^{m_0(z-|h|)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda \qquad (4\text{-}27)$$

และ $$E_{gro}(r,z,\omega) = \int_0^\infty \lambda \widetilde{E}_{gro}(\lambda,z,\omega) J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{2m_0 e^{-m_g z}}{m_0+m_g}\gamma\right) J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left(\frac{2m_0 e^{-m_g z}}{m_0+m_g}\cdot\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-m_0|h|}}{2m_0}\right) J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$E_{gro}(r,z,\omega) = i\omega\mu_0 aI(\omega)\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0+m_g}\right) e^{-(m_g z + m_0|h|)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda \qquad (4\text{-}28)$$

จากสมการ (4-27) และ (4-28) ถ้าแทน $z = 0$ จะได้สนามไฟฟ้าบริเวณรอยต่อ คือ

$$E_{sur}(r,0,\omega) = i\omega\mu_0 aI(\omega)\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{m_0+m_g}\right) e^{-m_0|h|} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda \qquad (4\text{-}29)$$

สนามไฟฟ้าในตัวแปรเวลา

จากสมการ (4-27) และ (4-28) ค่าสนามไฟฟ้าประกอบด้วยตัวแปรอิสระ ω เราต้องการทราบว่าสนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเวลาเปลี่ยนไป และจะใช้การแปลงฟูเรียร์เพื่อทำการหาสนามไฟฟ้าที่ขึ้นกับตัวแปรเวลาดังกล่าว โดย

$$E_{air}(r,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{air}(r,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)}{2}\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{m_0}\left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-|h|)}\right)J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda\right.$$

$$\left. + i\omega\mu_0 aI(\omega)\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{m_0+m_g}\right)e^{m_0(z-|h|)}J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda\right]e^{-i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{\mu_0 a}{2}\int_0^{\infty}\lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega I(\omega)}{m_0}\left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \mu_0 a\int_0^{\infty}\lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega I(\omega)}{m_0+m_g}\left(e^{m_0(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda \quad (4\text{-}30)$$

ต่อไปจะลดเทอมในสมการ (4-30) โดยพิจารณาต่อไปนี้

เมื่อ $\mu_0\varepsilon_0$ คือ จำนวนบวกขนาดเล็ก แล้ว $m_0^2 = \lambda^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \approx \lambda^2$ นั่นคือ $m_0 \approx \lambda$

และเมื่อเราปิดสวิตส์กระแสไฟฟ้าและให้ $t = 0$ จะหาค่า $I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(1-u(t))e^{-i\omega t}dt$

เมื่อ I_0 คือ แอมพลิจูดของกระแสไฟฟ้า

$u(t)$ คือ ฟังก์ชันขั้นบันไดของเฮบวีไซด์(step-function of Heaviside)

และการแปลงฟูเรียร์ฟังก์ชัน $u(t)$ จะได้ $U(\omega) = \dfrac{1}{i\omega}$

$\omega = \omega_0 + ib$ เมื่อ b คือส่วนจินตภาพ

เนื่องจาก ω คือจำนวนจริง จะได้ $\omega = \omega_0$

ดังนั้น
$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(1-u(t))e^{-i\omega t}dt$$
$$= \frac{I_0}{i\omega}$$

แสดงว่า $i\omega I(\omega) = I_0$

เนื่องจาก $e^{-i\omega t}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}d\omega = 0$ (Wunsch, 1994)

ดังนั้นจากสมการ (4-30) จะได้

$$E_{air}(r,z,t) = \frac{\mu_0 a}{2}\int_0^{\infty}\lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega I(\omega)}{m_0}\left(e^{-m_0|z+h|} - e^{m_0(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \mu_0 a\int_0^{\infty}\lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega I(\omega)}{m_0+m_g}\left(e^{m_0(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{\mu_0 a I_0}{2}\int_0^\infty \lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda|z+h|} - e^{\lambda(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \mu_0 a\int_0^\infty \lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{I_0}{\lambda + m_g}\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right)e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{\mu_0 a I_0}{2}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda|z+h|} - e^{\lambda(z-|h|)}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t}d\omega\right]J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$+ \mu_0 a I_0\int_0^\infty \lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g}e^{-i\omega t}d\omega\right]\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right)J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \mu_0 a I_0\int_0^\infty \lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g}e^{-i\omega t}d\omega\right]\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right)J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

ให้ $F_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g}e^{-i\omega t}d\omega$

ดังนั้น $E_{air}(r,z,t) = \mu_0 a I_0\int_0^\infty \lambda F_3\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right)J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$ (4-31)

ต่อไปจะใช้การประยุกต์การหาปริพันธ์ตามเส้นทาง(contour integration)ของ บอมวิส (Bromwich contour) และใช้ทฤษฎีบทส่วนตกค้าง(residue theorem) ใน ระนาบ φ เพื่อหา F_3

ให้ $\varphi = \lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_0$ และ $m_g = \sqrt{\varphi}$

จะได้ $\omega = \frac{\lambda^2 - \varphi}{i\mu_0\sigma_0}$ และ $d\omega = -\frac{1}{i\mu_0\sigma_0}d\varphi$

พิจารณา F_3 ในระนาบ φ จะได้

$$F_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\lambda + m_g}e^{-i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda^2 + i\infty}^{\lambda^2 - i\infty}\left(\frac{1}{\lambda + \sqrt{\varphi}}\right)e^{-i\left(\frac{\lambda^2-\varphi}{i\mu_0\sigma_0}\right)t}\left(-\frac{1}{i\mu_0\sigma_0}d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0\sigma_0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda^2 - i\infty}^{\lambda^2 + i\infty}\frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\frac{t}{\mu_0\sigma_0}}}{\lambda + \sqrt{\varphi}}d\varphi\right)$$

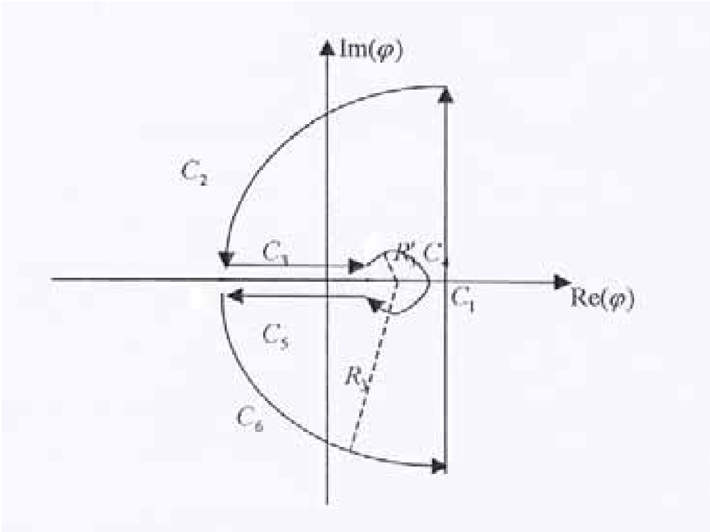
ให้ $\tau_3 = \frac{t}{\mu_0\sigma_0}$ และ $f_3(\varphi) = \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda + \sqrt{\varphi}}$ ดังนั้นจะได้

$$F_3 = \frac{1}{\mu_0\sigma_0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda^2 - i\infty}^{\lambda^2 + i\infty}f_3(\varphi)d\varphi\right)$$

ในกรณีที่ $\lambda+\sqrt{\varphi}=0$ แล้ว $f_3(\varphi)$ จะไม่นิยาม

ดังนั้นจะพิจารณา $\varphi=i^4\lambda^2$ ซึ่ง $\lambda+\sqrt{\varphi}=\lambda+\sqrt{i^4\lambda^2}=\lambda+i^2\lambda=0$

นั่นคือ เส้นทางของ $f_3(\varphi)$ ไม่รวมที่จุด $\varphi=i^4\lambda^2$



ภาพที่4-3 : เส้นทางการหาปริพันธ์

พิจารณา $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\lambda^2-i\infty}^{\lambda^2+i\infty} f_3(\varphi)d\varphi$ จะหา C_1 ได้จากการหาปริพันธ์ C_2 ถึง C_6

เส้นทาง C_2	$,\varphi=R_3e^{i\theta}$	$,d\varphi=iR_3e^{i\theta}d\theta$	$,\sqrt{\varphi}=\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}$	
C_3	$,\varphi=-r$	$,d\varphi=-dr$	$,\sqrt{\varphi}=i\sqrt{r}$	เมื่อ $\theta=\pi$
C_4	$,\varphi=R_3'e^{i\theta}$	$,d\varphi=iR_3'e^{i\theta}d\theta$	$,\sqrt{\varphi}=\sqrt{R_3'}e^{\frac{i\theta}{2}}$	
C_5	$,\varphi=-r$	$,d\varphi=-dr$	$,\sqrt{\varphi}=-i\sqrt{r}$	เมื่อ $\theta=-\pi$
C_6	$,\varphi=R_3e^{i\theta}$	$,d\varphi=iR_3e^{i\theta}d\theta$	$,\sqrt{\varphi}=\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}$	

ดังนั้นผลรวมของค่าการหาปริพันธ์ตามเส้นทางทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ $(2\pi i)\mathrm{Res}\left(f_3(\varphi),i^4\lambda^2\right)$

โดยที่
$$\mathrm{Res}\left(f_3(\varphi),i^4\lambda^2\right)=\lim_{\varphi\to i^4\lambda^2}(\varphi-i^4\lambda^2)\frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}$$
$$=\lim_{\varphi\to i^4\lambda^2}\left(-(\lambda-\sqrt{\varphi})e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}\right)$$
$$=-2\lambda e^{-\lambda_j\tau_3}$$

เมื่อ $\lambda_j=\lambda^2-\eta_j^2$ และ $\eta_j^2\to\lambda^2$ และให้ $\lambda_j=j$ เมื่อ j เป็นจำนวนบวก

นั่นคือ $\mathrm{Re}\,s\left(f_3(\varphi), i^4\lambda^2\right) = -2\lambda e^{-j\tau_3}$

แสดงว่า
$$\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}\limits_{C_1} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\limits_{C_2} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3e^{i\theta}d\theta)$$
$$+\int_{R_3}^{R_3'}\limits_{C_3} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}}(-dr) + \int_{\pi}^{-\pi}\limits_{C_4} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3'e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3'}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3'e^{i\theta}d\theta)$$
$$+\int_{R_3'}^{R_3}\limits_{C_5} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}}(-dr) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\limits_{C_6} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3e^{i\theta}d\theta)$$
$$=(2\pi i)(-2\lambda e^{-j\tau_3}) \tag{4-32}$$

ต่อไปจะหาปริพันธ์ในแต่ละเทอมของสมการ (4-32)

โดยพิจารณา I_{23} คือ ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_2

เมื่อ $\varphi = R_3e^{i\theta} = R_3(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad, d\varphi = iR_3e^{i\theta}d\theta$ $\quad, \sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}$

ดังนั้น
$$I_{23} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3e^{i\theta}d\theta)$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2\tau_3})(e^{\tau_3R_3\cos\theta})(e^{i\tau_3R_3\sin\theta})}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}iR_3e^{i\theta}d\theta$$

เนื่องจาก $|i|=1$ $\quad ,\left|e^{i\tau_3R_3\sin\theta}\right|=1$ และ $e^{\tau_3R_3\cos\theta}$ เป็นจำนวนบวก

และ $\cos\theta \le 1-\frac{2}{\pi}\theta$ สำหรับ $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$

เพราะฉะนั้น
$$|I_{23}| \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\frac{(e^{-\lambda^2\tau_3})(e^{\tau_3R_3\cos\theta})(e^{i\tau_3R_3\sin\theta})}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}\right|\left|iR_3e^{i\theta}\right|d\theta$$
$$\le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2\tau_3})(e^{\tau_3R_3\cos\theta})}{\lambda+\sqrt{R_3}}R_3d\theta$$
$$= \frac{R_3e^{-\lambda^2\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau_3R_3\cos\theta}d\theta$$
$$\le \frac{R_3e^{-\lambda^2\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau_3R_3(1-\frac{2}{\pi}\theta)}d\theta$$

$$\left|I_{23}\right| \le \frac{R_3 e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3}} \left(\frac{\pi}{2\tau_3 R_3} (1 - e^{-\tau_3 R_3}) \right)$$

ถ้ากำหนดให้ $R_3 \to \infty$ แล้ว $I_{23} \to 0$

ดังนั้น ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_2 มีค่าเท่ากับ 0

ในทำนองเดียวกัน ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_6 มีค่าเท่ากับ 0

และให้ I_{43} คือ ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_4

เมื่อ $\varphi = R_3' e^{i\theta} = R_3'(\cos\theta + i\sin\theta)$ $, d\varphi = iR_3' e^{i\theta} d\theta$ $, \sqrt{\varphi} = \sqrt{R_3'} e^{\frac{i\theta}{2}}$

ดังนั้น

$$I_{43} = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{-(\lambda^2 - R_3' e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3'} e^{\frac{i\theta}{2}}} (iR_3' e^{i\theta} d\theta)$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3' \cos\theta})(e^{i\tau_3 R_3' \sin\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3'} e^{\frac{i\theta}{2}}} iR_3' e^{i\theta} d\theta$$

เนื่องจาก $|i| = 1$ $, \left|e^{i\tau_3 R_3' \sin\theta}\right| = 1$ และ $e^{\tau_3 R_3' \cos\theta}$ เป็นจำนวนบวก

เพราะฉะนั้น

$$\left|I_{43}\right| \le \int_{\pi}^{-\pi} \left| \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3' \cos\theta})(e^{i\tau_3 R_3' \sin\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3'} e^{\frac{i\theta}{2}}} \right| \left| iR_3' e^{i\theta} \right| d\theta$$

$$\le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(e^{-\lambda^2 \tau_3})(e^{\tau_3 R_3' \cos\theta})}{\lambda + \sqrt{R_3'}} R_3' d\theta$$

$$= \frac{R_3' e^{-\lambda^2 \tau_3}}{\lambda + \sqrt{R_3'}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\tau_3 R_3' \cos\theta} d\theta$$

ถ้ากำหนดให้ $R_3' \to 0$ แล้ว $I_{43} \to 0$

ดังนั้น ปริพันธ์ภายใต้เส้นทาง C_4 มีค่าเท่ากับ 0

จากสมการ (4-32) กำหนดให้ ลิมิต $R_3' \to 0$ และ $R_3 \to \infty$ จะได้ว่า

$$\underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi + \underset{C_2}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3e^{i\theta}d\theta) + \underset{C_3}{\int_{R_3}^{R_3'}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}}(-dr)$$

$$+ \underset{C_4}{\int_{\pi}^{-\pi}} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3'e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3'}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3'e^{i\theta}d\theta) + \underset{C_5}{\int_{R_3'}^{R_3}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}}(-dr) + \underset{C_6}{\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}} \frac{e^{-(\lambda^2-R_3e^{i\theta})\tau_3}}{\lambda+\sqrt{R_3}e^{\frac{i\theta}{2}}}(iR_3e^{i\theta}d\theta)$$

$$= \underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi - \underset{C_3}{\int_{\infty}^{0}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}}\,dr - \underset{C_5}{\int_{0}^{\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}}\,dr$$

$$= \underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi + \underset{C_3}{\int_{0}^{\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}}\,dr - \underset{C_5}{\int_{0}^{\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}}\,dr$$

$$= \underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi + \underset{C_3}{\int_{0}^{\infty}} \left(\frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda+i\sqrt{r}}\right)-\left(\frac{e^{-(\lambda^2+r)\tau_3}}{\lambda-i\sqrt{r}}\right)dr$$

$$= \underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} f_3(\varphi)d\varphi = \underset{C_1}{\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}} \frac{e^{-(\lambda^2-\varphi)\tau_3}}{\lambda+\sqrt{\varphi}}\,d\varphi = (2\pi i)(-2\lambda e^{-j\tau_3})$

ดังนั้น $\displaystyle F_3 = \frac{1}{\mu_0\sigma_0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda^2-i\infty}^{\lambda^2+i\infty} f_3(\varphi)d\varphi\right)$

$$= \frac{-2\lambda e^{-j\tau_3}}{\mu_0\sigma_0}$$

เนื่องจาก j มีค่าน้อยมากเราจะให้ $j \cong \lambda$ และให้ $\varsigma_3 = |h| - z$

ดังนั้นจากสมการ (4-31) แทนค่า F_3 จะได้

$$E_{air}(r,z,t) = \mu_0 a I_0 \int_0^{\infty} \lambda F_3\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right) J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \mu_0 a I_0 \int_0^{\infty} \lambda\left(\frac{-2\lambda e^{-\lambda\tau_3}}{\mu_0\sigma_0}\right)\left(e^{\lambda(z-|h|)}\right) J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{-2aI_0}{\sigma_0}\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{\lambda(z-|h|-\tau_3)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{-2aI_0}{\sigma_0}\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(\varsigma_3+\tau_3)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda \qquad (4\text{-}33)$$

เนื่องจากรัศมีของวงแหวนของเครื่องส่งสนามไฟฟ้ามีขนาดเล็ก จะได้ $a \to 0$

ดังนั้นจะได้ $\displaystyle J_1(\lambda a) \cong \frac{\lambda a}{2}$

และ เมื่อ $r \rightarrow 0$ แสดงว่าระยะทางระหว่างเครื่องส่งสัญญาณและเครื่องรับสัญญาณมีขนาดเล็ก

ดังนั้นจะได้ $J_1(ra) \cong \frac{\lambda r}{2}$

ดังนั้นสมการ (4-33) เขียนได้ใหม่เป็น

$$E_{air}(r,z,t) = \frac{-2aI_0}{\sigma_0}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(\varsigma_3+\tau_3)} J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

$$= \frac{-2aI_0}{\sigma_0}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(\varsigma_3+\tau_3)} (\frac{\lambda a}{2})(\frac{\lambda r}{2})d\lambda$$

$$= \frac{-ra^2I_0}{2\sigma_0}\int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda(\varsigma_3+\tau_3)} d\lambda \qquad (4\text{-}34)$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนในสมการ (4-34) จะได้

$$E_{air}(r,z,t) = \frac{-6ra^2I_0}{\sigma_0(\varsigma_3+\tau_3)} \qquad (4\text{-}35)$$

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา

การค้นคว้าอิสระนี้มุ่ง ศึกษาสาระสำคัญของ อนุกรมฟูเรียร์ดังที่กล่าวในบทที่ 2 ซึ่งเป็นการหารูปแบบทางคณิตศาสตร์ ในรูปของอนุกรม เพื่อแทนฟังก์ชันบนช่วงใดช่วงหนึ่ง โดยที่ฟังก์ชันนั้นอาจหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่บางจุดในช่วงนั้นก็ตาม และยังศึกษาความเป็ นฟังก์ชันคู่ , ฟังก์ชันคี่ ,อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ และอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ พร้อมพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์

ส่วนในบทที่ 3 นั้นเราศึกษารูปแบบของ การแปลงฟูเรียร์ ทฤษฎีการลู่ เข้า และคุณสมบัติบางประการของการแปลงฟูเรียร์ รวมทั้งการแปลงฟูเรียร์ไซน์และการแปลงฟูเรียร์โคไซน์

ในการศึกษาสองบทที่กล่าวไปนั้นเพื่อเป็นพื้นฐานในการนำการแปลงฟูเรียร์ไปประยุกต์ใช้หาค่าสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองจากโครงสร้างพื้นโลกซึ่งขึ้นกับโดเมนเวลา

บรรณานุกรม

[1] สมชาย จิตะพันธ์กุล. การแปลงฟูริเยร์และการประยุกต์. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547.

[2] Albert Boggess and Francis J. Narcowich, “A First Course in Wavelets with Fourier Analysis” , Prentice Hell, Upper Saddle River.

[3] Chumchob, N. “Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular cylinder body embedded in a conducting half-space” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2000.

[4] Ketchanwit, P. “Time domain electromagnetic response in heterogeneous media.” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2001.

[5] Khongkha,P. “A mathematical model of electromagnetic response on a multilayered earth with layers having exponentially varying conductivities.”Department of Mathematics,Faculty of science, Silpakorn University, 2005.

[6] Lee, T. J. and Ignetik, R., 1994, Transient Electromagnetic Response of a half-space with Exponential Conductivity Profile and Its Applications to Salinity mapping, *Exploration Geophysics* **25**, 39-51.

[7] Murray R. Spiegel , “Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems” , Schaum’s outline series , McGraw-Hell Book Company.

[8] Pinsky, Mark A., 1991, Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications, McGraw-Hill, Inc., Second Edition.

[9] Sripunya, W. “Magmetic field of direct current in homogeneous media.” M.Sc. Thesis, Silpakorn University, 2005.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \ldots + b_n(x)y = R(x)$$

เมื่อ $b_0(x), b_1(x), \ldots, b_n(x), R(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น สมการข้างต้นจะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีอันดับ n

บทนิยาม : สมการเบสเซลที่มีอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีรูปแบบดังนี้

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad \text{(ก-1)}$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการ (ก-1) คือ

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \qquad \text{(ก-2)}$$

เมื่อ $J_n(x)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 ของอันดับ n

$Y_n(x)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 ของอันดับ n หรือฟังก์ชันนอยมันน์

และ $\Gamma(x)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา

โดยที่ $$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k!\Gamma(k+n+1)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\pi} e^{-y} y^{x-1} dy$$

$$Y_n(x) = \cot(n\pi)J_n(x) - \operatorname{cosec}(n\pi)J_{-n}(x)$$ เมื่อ n ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก

$$Y_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\phi x)}{\sqrt{1+\phi^2}} d\phi$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\log(\frac{x}{2}) + \gamma\right) - \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_0^{\pi} \frac{(-1)^k}{(n-k)!k!}\left((\Omega_k + \Omega_{k+n})\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\right)$$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\Omega_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \qquad ;\Omega_0 = 0$$

$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log(n)\right)$ มีชื่อว่า ค่าคงตัวออยเลอร์หรือค่าคงตัวของมาเชโรนี มีค่าประมาณ 0.5772157

นอกจากนี้ยังมีรูปแบบที่ถูกดัดแปลงเพื่อความเหมาะสมของฟังก์ชันเบสเซลชนิดต่าง ดังต่อไปนี้

$$I_n(x) = j^{-n}J_n(jx) = j^n J_n(-jx)$$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$I_{-n}(x) = I_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\frac{d(x^n J_n(x))}{dx} = x^n J_{n-1}(x)$$

ภาคผนวก ข

การแปลงฮังเคิล

บทนิยาม : ให้ $I=[0,\infty)$ และ $f:I\to\Re$ เป็นฟังก์ชันแล้ว การแปลงฮังเคิล (Hankel Transforms) ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_0^\infty xf(x)J_v(\lambda x)dx \tag{ข-1}$$

และ

$$f(x)=\int_0^\infty \lambda\tilde{f}(\lambda)J_v(\lambda x)d\lambda \tag{ข-2}$$

โดยที่ $J_v(\lambda)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ v

และ λ คือ ตัวแปรฮังเคิล

โดยทั่วไปเราเรียกสมการ (ข-1) ว่าการแปลงฮังเคิล

และเรียกสมการ (ข-2) ว่าการแปลงฮังเคิลผกผัน

ตัวอย่าง : พิจารณากฎของแอมแปร์

$$H(r,z)=\frac{I}{2\pi r}$$

โดยบทนิยามของการแปลงฮังเคิลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\lambda,z)&=\int_0^\infty rH(r,z)J_1(\lambda r)dr\\&=\int_0^\infty r\left(\frac{I}{2\pi r}\right)J_1(\lambda r)dr\\&=\frac{I}{2\pi\lambda}\end{aligned}$$

เมื่อ $J_1(\_)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1

ในทางกลับกัน โดยบทนิยามของการแปลงฮังเคิลผกผันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}H(r,z)&=\int_0^\infty \lambda\tilde{H}(\lambda,z)J_1(\lambda r)dr\\&=\int_0^\infty \lambda\left(\frac{I}{2\pi\lambda}\right)J_1(\lambda r)dr\\&=\frac{I}{2\pi r}\end{aligned}$$

ภาคผนวก ค

อนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อน

เราสามารถหาอนุกรมฟูเรียร์เชิงซ้อนได้โดยการใช้สูตรของเดอมัวฟวร์ (De Moivre's formula)และจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนในสูตรของอนุกรมฟูเรียร์ซึ่งลู่เข้า

เมื่อ สูตรของเดอมัวฟวร์ คือ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

และ $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$

จากอนุกรมฟูเรียร์บนช่วง $[-L, L]$ คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \\ &= A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) - iB_n(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L})\right] \\ &= A_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n - iB_n)e^{in\pi x/L} + (A_n + iB_n)e^{-in\pi x/L}\right] \end{aligned}$$

ให้ $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_n - iB_n), & n = 1,2,... \\ A_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(A_{-n} + iB_{-n}), & n = -1,-2,... \end{cases}$

ดังนั้น $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{in\pi/L} \qquad \text{(ค-1)}$$

พิจารณากรณี 1 : $n = 1,2,...$

จาก $\alpha_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n)$ และโดยนิยาม A_n, B_n ในสมการ (2-6) และ (2-7)

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2}(A_n - iB_n) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - i\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx \end{aligned}$$

กรณี 2 : $n = -1, -2, \ldots$

จาก $\alpha_n = \frac{1}{2}(A_{-n} - iB_{-n})$ และโดยนิยาม A_n, B_n ในสมการ (2-6) และ (2-7)

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{2}(A_{-n} - iB_{-n}) \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - i\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx\end{aligned}$$

และกรณี 3 : $n = 0$ แล้ว $\alpha_n = A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณี

จะได้ว่า $\alpha_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ค-2)

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล นายสิริชัย ร่มโพธิ์ธารทอง

ที่อยู่ 24 ถนนกมลโกวิโท ตำบลบางแขม อำเภอเมืองนครนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000

ที่ทำงาน ห้างหุ้นส่วนจำกัด กิจอรุณชัยรัตน์ 24 ถนนกมลโกวิโท ตำบลบางแขม อำเภอเมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2546 สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม

พ.ศ. 2548 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม