ฟังก์ชันฮาร์โมนิก

โดย

นายประพล เปรมทองสุข

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-464-991-7

HARMONIC FUNCTIONS

By

Prapon Premthongsuk

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2005

ISBN 974-464-991-7

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง "ฟังก์ชันฮาร์โมนิก" เสนอโดย นายประพล เปรมทองสุข เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....
(รองศาสตราจารย์ ดร. วิสาข์ จัติวัตร์)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ รักษาราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)
………../……………/……….

....ผู้ควบคุมสารนิพนธ์
(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)
………../……………/……….

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)
………../……………/……….

K 45308205 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ฟังก์ชันฮาร์โมนิก

ประพล เปรมทองสุข : ฟังก์ชันฮาร์โมนิก (Harmonic Functions)
อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.วารี เกรอต. 59 หน้า. ISBN 974-464-991-7

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ เราจะศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิกและสมบัติที่เกี่ยวข้อง และจะประยุกต์ฟังก์ชันฮาร์โมนิกในการแก้ปัญหาดิริกเลต์ ปัญหาหลายปัญหาทางฟิสิกส์ เช่น ปัญหาการกระจายอุณหภูมิ ปัญหาการไหลของของเหลว และปัญหาทางไฟฟ้า เป็นปัญหาดิริกเลต์ นอกจากนี้ เราจะหาคำตอบของปัญหาการกระจายอุณหภูมิ โดยใช้อินทิกรัลของปัวส์ซอง ซึ่งจะได้คำตอบเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2548
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์..

K 45308205 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : HARMONIC FUNCTIONS

PRAPON PREMTHONGSUK : HARMONIC FUNCTIONS. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 59 pp. ISBN 974-464-991-7

In this project we study harmonic functions and their related properties. We will apply harmonic functions to solve Dirichlet's Problem. Many physical problems such as Temperature Distribution, Fluid Flow and Electrostatics are Dirichlet's Problems. Finally we solve Temperature Distribution problem by Poisson's Integral and obtain the solution which is harmonic function.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2005

Student's signature ………………………………………………..………..……….

Master's Report Advisor's signature ……………………………………..…………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ดี ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์วารี เกรอต อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในระดับปริญญาตรีและปริญญาโท จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณรุ่นพี่ และเพื่อน ๆ ในภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ

สุดท้ายกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ ที่คอยเคี่ยวเข็ญ และสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ลูกมีวันนี้ได้

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

Introduction

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก ซึ่งเป็นแนวคิดหนึ่งของการวิเคราะห์เชิงซ้อน โดยฟังก์ชันฮาร์โมนิกเป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร สมมติให้เป็นฟังก์ชัน $u(x,y)$ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} และ u_{yx} มีความต่อเนื่องบน D (D เป็นโดเมนใน R^2)

(2) $u_{xx} + u_{yy} \equiv o$ บน D

เราจะศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันฮาร์โมนิก พร้อมทั้งศึกษาสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้สำหรับหาค่าของฟังก์ชันที่จุดภายในของเส้นโค้งปิด โดยมีข้อกำหนดว่าต้องทราบค่าของฟังก์ชันที่จุดบนเส้นโค้งปิดนี้

ต่อมาเราจะทำการศึกษาปัญหาของดิริกเลต์ โดยนำสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซองมาใช้แก้หาคำตอบของปัญหา ซึ่งปัญหาดิริกเลต์มีลักษณะดังนี้

กำหนดให้ $D \subset R^2$ เป็นโดเมน และ $f : B(D) \to R$

ปัญหาของดิริกเลต์ คือ ปัญหาในการหาฟังก์ชัน u ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $u \in H(D)$

(2) $u \equiv f$ บน $B(D)$

(3) u มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน $B(D)$ เมื่อ f มีความต่อเนื่องที่จุดเหล่านั้น

โดยที่คำตอบของปัญหาจะเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ซึ่งในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราแบ่งปัญหาดิริกเลต์ตามลักษณะของโดเมนออกเป็น 2 แบบ ดังต่อไปนี้

(1) ปัญหาดิริกเลต์สำหรับจาน

(2) ปัญหาดิริกเลต์สำหรับครึ่งระนาบ

เพื่อให้เห็นถึงประโยชน์ของฟังก์ชันฮาร์โมนิก เราจะนำความรู้ที่ได้จากการศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก และปัญหาดิริกเลต์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางฟิสิกส์ ซึ่งสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาได้หลายปัญหา แต่ในสารนิพนธ์ฉบับนี้จะแสดงให้เห็นเฉพาะปัญหาการกระจายอุณหภูมิ และเพื่อให้

เข้าใจเนื้อหาทั้งหมดได้โดยง่าย เราจะทำการศึกษาตั้งแต่บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานต่าง ๆ ที่ใช้ในการศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก จนกระทั่งถึงการประยุกต์ใช้กับปัญหาทางฟิสิกส์ ซึ่งเนื้อหาในแต่ละบทมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก

บทที่ 3 : ศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิกและสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง

บทที่ 4 : กล่าวถึงปัญหาดิริกเลต์ ซึ่งเป็นปัญหาที่มีคำตอบเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ซึ่งเราจะนำปัญหานี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางฟิสิกส์

บทที่ 5 : กล่าวถึงปัญหาทางฟิสิกส์ นั่นคือ ปัญหาการกระจายความร้อน ซึ่งจะนำความรู้ที่ได้จากปัญหาดิริกเลต์ในบทที่ 4 มาประยุกต์ใช้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างปัญหาการกระจายอุณหภูมิ

บทที่ 2
บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน
Basic Definitions and Theorems

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่ใช้ในการศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก โดยละการพิสูจน์ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

บทนิยาม 2.1: กำหนดให้ $p\in R^2$ และ ε เป็นจำนวนจริงบวก เราจะเรียกเซต $\{x\in R^2 : |x-p|<\varepsilon\}$ ว่า**อาณาเขต** p **รัศมี** ε (ε-neighborhood of p) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $N(p,\varepsilon)$ หรือ $N_\varepsilon(p)$ และในกรณีที่จะกล่าวถึง $N_\varepsilon(p)$ ซึ่งไม่รวมจุด p เราจะเขียนแทนเซตนี้ด้วยสัญลักษณ์ $N'_\varepsilon(p)$

บทนิยาม 2.2: กำหนดให้ $S\subset R^2$ และให้ $p\in R^2$

(1) จุด p เป็น**จุดลิมิตของ** S (limit point of S) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N'_\varepsilon(p)$ จะมีจุดใน S อย่างน้อย 1 จุด นั่นคือ

p เป็นจุดลิมิตของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะได้ว่า $S\cap N'_\varepsilon(p)\neq\phi$

(2) ให้ S^* แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S เราจะเรียกเซต $S\cup S^*$ ว่า**โคลเชอร์ของ** S (closure of S) เขียนแทนด้วย $\overline{S}$

(3) เซต S เป็น**เซตปิด** (closed set) ก็ต่อเมื่อ $S^*\subset S$ นั่นคือ แต่ละจุดลิมิตของ S อยู่ใน S

(4) จุด p เป็น**จุดภายในของ** S (interior point of S) ก็ต่อเมื่อ มี $r>0$ ซึ่ง $N_r(p)\subset S$ และจะเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ S ด้วย S°

(5) เซต S เป็น**เซตเปิด** (open set) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิก p ใน S เป็นจุดภายในของ S

(6) จุด p เรียกว่า**จุดขอบของ** S (boundary point of S) ก็ต่อเมื่อ $N_\varepsilon(p)$ มีสมาชิกของ S และสมาชิกของ R^2-S ทุก $\varepsilon>0$

(7) เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S เรียกว่า**ขอบของ** S (boundary of S) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(S)$

(8) เซต S เป็น**เซตมีขอบเขต** (bounded set) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $r>0$ ซึ่ง $S\subset N_r((0,0))$

(9) เซต S เป็น**เซตเชื่อมโยง** (connected set) ถ้าไม่มีสับเซต A,B ของ R^2 ซึ่งสอดคล้อง $S=A\cup B$, $A\neq\phi$, $B\neq\phi$ และ $\overline{A}\cap B=\phi=A\cap\overline{B}$

(10) เซต S เป็น**โดเมน** (domain) ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตเปิดซึ่งเป็นเซตเชื่อมโยงและไม่เป็นเซตว่าง

ทฤษฎีบท 2.3 : ถ้า A และ B เป็นเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $A\cap B=\phi$ แล้ว $A\cup B$ ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง

บทนิยาม 2.4 : กำหนดให้ $E\subset R^2$ และให้ C เป็นแฟมิลีเซตของสับเซตของ R^2

(1) เราจะเรียก $\{z:$ มี $A\in C$ ซึ่ง $z\in A\}$ ว่า**ยูเนียนของ** C (union of C) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\cup C$

(2) C เป็นเซต**ปกคลุมสำหรับ** E **หรือปกคลุม** E (cover for E or covers E) ก็ต่อเมื่อ $E\subset\cup C$

(3) C เป็นเซตปกคลุมเปิดสำหรับ E ก็ต่อเมื่อ C ปกคลุม E และแต่ละสมาชิกของ C เป็นเซตเปิด

(4) เราจะเรียก D ว่า**เซตปกคลุมย่อยของ** C (subcover of C) สำหรับ E ก็ต่อเมื่อ D เป็นเซตปกคลุม E และ $D\subset C$

(5) เซต E เป็น**เซตคอมแพก**(compact set) ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตปกคลุมเปิดของ E มีเซตปกคลุมย่อยสำหรับ E ซึ่งเป็นเซตจำกัด

บทนิยาม 2.5: ให้ $D\subset R^2$ เราจะเรียก $f:D\to R^2$ ว่า**ฟังก์ชันเชิงซ้อนบน** D (complex function on D)

สำหรับแต่ละ $z=(x,y)\in D$ จำนวนเชิงซ้อน $f(z)$ มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $R(f(z))=u(x,y)$ และ $I(f(z))=v(x,y)$ ดังนั้น $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

บทนิยาม 2.6: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D

ให้ $z_0\in D^*$ และ $w_0\in R^2$ แล้วจะเรียก w_0 ว่า**ลิมิตของ** $f(z)$ **เมื่อ** z **เข้าใกล้** z_0 (limit of $f(z)$ as z approaches z_0) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่ง ถ้า $z\in N'_\delta(z_0)\cap D$ แล้ว $f(z)\in N_\varepsilon(w_0)$ และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$

บทนิยาม 2.7: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และให้ $z_0 \in D$ แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องที่** z_0 (f is continuous at z_0) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $z \in N_\delta(z_0) \cap D$ แล้ว $f(z) \in N_\varepsilon(f(z_0))$

นั่นคือ $$f[N_\delta(z_0) \cap D] \subset N_\varepsilon(f(z_0))$$

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ทุก $z \in D$ แล้วเราจะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องบน D และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in C(D)$

ข้อสังเกต 2.8: ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน $D \subset R^2$ และ $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ u มีความต่อเนื่องที่ z_0 และ v มีความต่อเนื่องที่ z_0

บทนิยาม 2.9: กำหนดให้ $f : [a,b] \to R^2$ แล้วกล่าวว่า f มี**ความต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ มี $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เมื่อ $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ ซึ่งสำหรับทุก $i = 1,2,...,n$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องบน (x_{i-1}, x_i) โดยที่ $\lim\limits_{x \to x_{i-1}^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to x_i^-} f(x)$ หาค่าได้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in PC[a,b]$

บทนิยาม 2.10: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน** D (f is uniformly continuous on D) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $z_1, z_2 \in D$ และ $|z_1 - z_2| < \delta$ แล้ว $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in UC(D)$

ทฤษฎีบท 2.11 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งมีความต่อเนื่องบนเซตคอมแพก S แล้วจะได้ว่า

(1) f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน S

(2) f เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน S

บทนิยาม 2.12 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบนโดเมน D และให้ $z_0 \in D^{\circ}$

$$\text{ถ้า } \lim_{t \to z_0} \frac{f(t) - f(z_0)}{t - z_0} \text{ หาค่าได้}$$

แล้วจะเรียกลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ f ที่** z_0 (derivative of f at z_0) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(z_0)$ หรือ $\frac{d}{dz} f(z_0)$ และกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่** z_0 (differentiable at z_0)

หมายเหตุ 2.13: ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $E = \{z : f'(z) \text{ หาค่าได้}\} \neq \phi$ ดังนั้น เราสามารถพิจารณาฟังก์ชันเชิงซ้อนกำหนดบน E ด้วยค่า $f'(z)$ และจะเขียนแทนฟังก์ชันนี้โดย f' และเรียก f' ว่า**อนุพันธ์ของ** f (derivative of f) ในทำนองเดียวกันสัญลักษณ์ $f^{(n)}$ แทนอนุพันธ์ของ $f^{(n-1)}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ เมื่อหา $f^{(n-1)}$ ได้

ทฤษฎีบท 2.14: ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ z

ทฤษฎีบท 2.15: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $z = x + iy$ แล้ว ที่จุด (x, y) จะได้ว่า

(1) อนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x และ v_y หาค่าได้

(2) อนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x และ v_y สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ต่อไปนี้

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x$$

และ
$$f'(z) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = v_y(x, y) - i u_y(x, y)$$

ทฤษฎีบท 2.16: กำหนดให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D$ ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง u_x, u_y, v_x และ v_y หาค่าได้ที่ทุกจุดใน $N_\varepsilon(z_0)$ และ u_x, u_y, v_x , v_y มีความต่อเนื่องและสอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ที่ z_0 แล้ว $f'(z_0)$ หาค่าได้

บทนิยาม 2.17: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D แล้ว จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันวิเคราะห์ที่** z_0 (analytic function at z_0) ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่ง f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน $N_r(z_0)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(z_0)$

จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันวิเคราะห์ใน** S (analytic function in S) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดใน S และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(S)$

ทฤษฎีบท 2.18: กำหนดให้ S เป็นโดเมน และ $f \in A(S)$

(1) ถ้า $f'(z) \equiv 0$ บน S แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่บน S

(2) ถ้าฟังก์ชันหนึ่งฟังก์ชันใดต่อไปนี้

$$R(f),\ I(f),\ |f| \text{ และ } Arg\ f$$

เป็นฟังก์ชันคงที่บน S แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่บน S

ทฤษฎีบท 2.19: ถ้า $f \in A(S)$ เมื่อ S เป็นโดเมน ซึ่ง $R(f) = 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่บน S

ทฤษฎีบท 2.20: กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D เมื่อ D เป็นโดเมน

ให้ $$T \subset D \text{ ซึ่ง } T^* \cap D \neq \phi$$

ถ้า $f \equiv g$ บน T แล้ว $f \equiv g$ บน D

ทฤษฎีบท 2.21: กำหนดให้ $f \in A(z_0)$ และ $f'(z_0) \neq 0$ แล้วจะมี $\rho > 0$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $N_\rho(z_0)$

ทฤษฎีบท 2.22: กำหนดให้ $f \in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนใน R^2 และ f ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บน D ถ้า $G \subset D$ และ G เป็นเซตเปิด แล้ว $f[G]$ เป็นเซตเปิด เมื่อ $f[G] = \{ f(g) : g \in G \}$

ทฤษฎีบท 2.23: ทฤษฎีฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในเซตเปิด $G \subset R^2$ แล้ว จะได้ว่า

(1) f^{-1} เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $f[G]$

(2) ถ้า $w \in f[G]$ แล้ว $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ เมื่อ $z = f^{-1}(w)$

ทฤษฎีบท 2.24: กำหนดให้ $f \in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนใน R^2 ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บน D แล้ว $f[D]$ เป็นโดเมน

บทนิยาม 2.25: กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงและมีขอบเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ ให้

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

เมื่อ $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$

แล้ว $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ เมื่อ $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ และ $k \in \{1,2,...,n\}$

คือ**ผลบวกรีมันน์**(Riemann sum) สำหรับ P

ถ้า
$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \qquad \text{.........(*)}$$

หาค่าได้ เมื่อ

$$|P| = \max\{\Delta x_k : k = 1,2,...,n\}$$

แล้วกล่าวว่า f เป็น**รีมันน์อินทิเกรเบิลบน** $[a,b]$ (Riemann integrable on $[a,b]$) และจะเรียกค่าลิมิต (*) ว่า**รีมันน์อินทิกรัล** (Riemann integral of f over $[a,b]$)และใช้สัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.26:

(1) ถ้า $f \in PC[a,b]$ แล้ว $\int_a^x f(t)dt$ หาค่าได้สำหรับ $x \in [a,b]$

(2) (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)ถ้า $f \in C([a,b])$ และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{แล้ว } g'(x) = f(x) \quad \text{สำหรับ } x \in [a,b]$$

(3) กำหนดให้ f และ h เป็นรีมันน์อินทิเกรเบิลบน $[a,b]$ และให้ $f(x) \le h(x)$ บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$$

และจะได้ว่า $|f|$ เป็นรีมันน์อินทิเกรเบิลบน $[a,b]$ และ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

บทนิยาม 2.27: กำหนดให้ $f:[a,b] \to R^2$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$ และ $u = R(f)$, $v = I(f)$ นิยาม**อินทิกรัลจำกัดเขตของ** f **บน** $[a,b]$ (definite integral of f on $[a,b]$) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(t)dt$ ดังนี้

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

หมายเหตุ 2.28: กำหนดให้ $z(t)=x(t)+iy(t)$ ทุก $t\in[a,b]$ แล้วสำหรับ $t\in(a,b)$ ซึ่ง $x'(t)$, $y'(t)$ หาค่าได้ จะกำหนด $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$

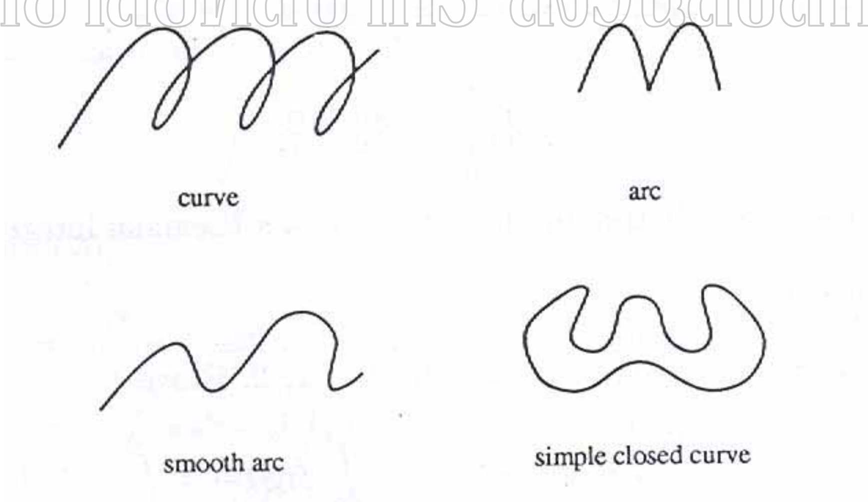
บทนิยาม 2.29:

(1) กำหนดให้ $C\subset R^2$ แล้ว C เป็น**เส้นโค้ง** (curve) ก็ต่อเมื่อ C เป็นเรนจ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:[a,b]\to R^2$ และจะเรียก $f(t)=x(t)+iy(t)$ ทุก $t\in[a,b]$ ว่า**พาราเมทไทรเซชัน** (parametrization) ของ C

(2) เส้นโค้ง C เป็น**อาร์ก** (arc) ก็ต่อเมื่อ พาราเมทไทรเซชันของ C เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(3) เส้นโค้ง C ใน R^2 เป็น**เส้นโค้งเรียบ** (smooth curve) ก็ต่อเมื่อ C มีพาราเมทไทรเซชัน f โดยที่ $f(t)=x(t)+iy(t)$ ซึ่ง x' และ y' มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f'(t)\neq 0$ บน (a,b)

(4) เส้นโค้ง C เป็น**เส้นโค้งปิดอย่างง่ายหรือเส้นโค้งจอร์แดน** (simple closed curve or Jordan curve) ก็ต่อเมื่อ มีพาราเมทไทรเซชัน f ของ C ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $f(b)=f(a)$



รูปที่ 1 : แสดงเส้นโค้งแบบต่างๆ

ทฤษฎีบท 2.30(The Jordan Curve Theorem):

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่ายใน R^2 แล้ว $R^2-C=A\cup B$ เมื่อ A,B เป็นโดเมน โดยที่เซตใดเซตหนึ่งมีขอบเขต และอีกเซตหนึ่งไม่มีขอบเขต ยิ่งไปกว่านั้น C เป็นขอบของทั้ง Aและ B

โดเมนที่มีขอบเขตเรียกว่า**เซตของจุดภายใน**(interior) ของ C เขียนแทนด้วย $I(C)$ และโดเมนที่ไม่มีขอบเขตเรียกว่า**เซตของจุดภายนอก**(exterior) ของ C เขียนแทนด้วย $E(C)$

บทนิยาม 2.31:
(1) เส้นโค้งพาราเมทไทรซ์ (parametrized curve) คือ คู่อันดับ $(C,z(t))$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งและ $z(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของ C
(2) **คอนทัวร์** (contour) คือ เส้นโค้งพาราเมทไทรซ์ $(C,z(t))$ เมื่อสามารถแบ่งโดเมน $[a,b]$ ของ $z(t)=x(t)+iy(t)$ ออกเป็นช่วงย่อยจำนวนจำกัด ซึ่ง $x'(t), y'(t)$ มีความต่อเนื่องบนทุกช่วงย่อยปิดและ $z'(t)\neq 0$ ที่ทุกจุดภายในของช่วงย่อยปิด

นั่นคือ C เป็นยูเนียนของเส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัด $C_1,C_2,...,C_n$ เมื่อจุดปลายของ C_i เป็นจุดเริ่มต้นของ C_{i+1} สำหรับ $i=1,2,...,n-1$
(3) คอนทัวร์ $(C,z(t))$ เป็น**คอนทัวร์ปิดอย่างง่าย** (simple closed contour) ก็ต่อเมื่อ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $[a,b)$ และ $z(a)=z(b)$ เมื่อ $[a,b]$ คือ โดเมนของ $z(t)$
(4) คอนทัวร์ปิดอย่างง่าย $(C,z(t))$ มี**ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา** (counterclockwise oriented: cco) ก็ต่อเมื่อ t แปรค่าบนโดเมนจาก a ถึง b เราได้ว่า $z(t)$ เคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ $I(C)$ อยู่ทางซ้ายของการเคลื่อนที่

ต่อไปนี้เมื่อพูดถึงคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่นจะหมายถึงคอนทัวร์ที่มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเท่านั้น

บทนิยาม 2.32: กำหนด $(C,z(t))$ เป็นคอนทัวร์ เมื่อโดเมนของ $z(t)$ คือ $[a,b]$ และ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บน C เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมี**ความต่อเนื่องเป็นช่วงบน** C (piecewise continuous on C) ถ้าสามารถแบ่ง C เป็นอาร์กจำนวนจำกัด คือ $(C_1,z_1(t))$, $(C_2,z_2(t))$, ..., $(C_n,z_n(t))$ เมื่อ z_i กำหนดบนช่วงย่อย (a_i,b_i) แล้ว $f \circ z_i$ มีความต่อเนื่องบน (a_i,b_i) สำหรับ $i=1,2,...,n$

บทนิยาม 2.33: กำหนดให้ $(C,z(t))$ เป็นคอนทัวร์ และ $[a,b]$ เป็นโดเมนของ $z(t)$ และ $f:C\rightarrow R^2$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C นิยาม**คอนทัวร์อินทิกรัลของ** f **บน** C (contour integral of f over C) เขียนแทนโดย $\int_C f(z)dz$ ดังนี้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

บทนิยาม 2.34 : กำหนดให้คอนทัวร์ C มีพาราเมทไทรเซชัน

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{สำหรับแต่ละ } t \in [a,b]$$

แล้ว คอนทัวร์ $-C$ เป็นคอนทัวร์ที่นิยามโดย

$$-C : z_1(t) = z(-t) \qquad \text{สำหรับแต่ละ } t \in [-b,-a]$$

เราจะเห็นได้ว่าจุดเริ่มต้นของ $-C$ คือ $z(-(-b)) = z(b)$ ซึ่งเป็นจุดปลายของ C และจุดปลายของ $-C$ คือ $z(-(-a)) = z(a)$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของ C

บทนิยาม 2.35: กำหนดให้ $f(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของคอนทัวร์ C_1 ซึ่งมี $[a,b]$ เป็นโดเมน และให้ $g(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของคอนทัวร์ C_2 ซึ่งมี $[b,c]$ เป็นโดเมน เมื่อ $f(b) = g(b)$ แล้วเราจะเรียก คอนทัวร์ C นิยามโดย

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{สำหรับแต่ละ } t \in [a,b] \\ g(t) & \text{สำหรับแต่ละ } t \in [b,c] \end{cases}$$

ว่า**ผลบวกของ** C_1 **และ** C_2 (sum of C_1 and C_2) และเขียนแทนคอนทัวร์ C ด้วย $C_1 + C_2$ นอกจากนี้เราสามารถนิยาม $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ ได้ในทำนองเดียวกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.36 : กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ และพาราเมทไทรเซชัน $z(t) = x(t) + iy(t)$ บน $[a,b]$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

(2) $\displaystyle\int_C Kf(z)dz = K\int_C f(z)dz$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใน R^2

(3) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

(4) $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ โดยที่ $C = C_1 + C_2$

(5) $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$

บทนิยาม 2.37: กำหนดให้ D เป็นโดเมนใน R^2 แล้ว เราจะเรียก D ว่า**โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว** (simply connected domain) ก็ต่อเมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน D แล้ว $I(C) \subset D$

ทฤษฎีบท 2.38(Cauchy's Integral Theorem):

กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 และให้ $D = C \cup I(C)$ ถ้า $f \in A(D)$ แล้ว $\int_C f(z)dz = 0$

ทฤษฎีบท 2.39: กำหนดให้ $f \in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวใน R^2 และ C_1, C_2 เป็นคอนทัวร์ใน D ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดปลายที่ z_1 และ z_2 ตามลำดับ แล้ว

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

ในกรณีที่ C เป็นคอนทัวร์ ที่มีจุดเริ่มที่ z_1 และจุดปลายที่ z_2 จะแทนคอนทัวร์อินทิกรัลของ f บน C ด้วย

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

ทฤษฎีบท 2.40: กำหนดให้ $f \in A(D)$ และ $z_0 \in D$ เมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวใน R^2 ถ้านิยามฟังก์ชัน $F : D \to R^2$ ดังนี้

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)dz^* \qquad \text{สำหรับแต่ละ } z \in D$$

แล้ว $F \in A(D)$ และ $F'(z) = f(z)$ สำหรับแต่ละ $z \in D$

ทฤษฎีบท 2.41(The Cauchy Integral Formula):

กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 และ $D = C \cup I(C)$ ถ้า $f \in A(D)$ และ $z_0 \in I(C)$ แล้ว

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

ทฤษฎีบท 2.42: ให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 และ $f\in A(D)$ เมื่อ $D=C\cup I(C)$ แล้ว $f^{(n)}\in A(I(C))$ ทุก $n=1,2,3,...$ และ $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt$ ทุก $z\in I(C)$

ผลจากทฤษฎีบท 2.42 จะได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้

ข้อสังเกต 2.43:

(1) ถ้า $f\in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนใน R^2 แล้ว $f^{(n)}\in A(D)$ ทุก $n=1,2,3,...$

(2) ถ้า $f=u+iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D แล้ว $u_{xx},u_{xy},u_{yx},u_{yy},v_{xx},v_{xy},v_{yx},v_{yy}$ มีความต่อเนื่องบน D

ทฤษฎีบท 2.44: กำหนดให้ $0\le g(x)\le M$ สำหรับแต่ละ $x\in[a,b]$ ถ้า $g\in C([a,b])$ และมี $x_0\in[a,b]$ ซึ่ง $g(x_0)<M$ แล้ว

$$\int_a^b g(x)dx<M(b-a)$$

บทนิยาม 2.45: กำหนดให้ $A,B\subset R^2$ และ $F:A\times B\to R^2$ แล้ว F **มีความต่อเนื่องบน** $A\times B$ (F is continuous on $A\times B$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(z_0,w_0)\in A\times B$ และสำหรับ $\varepsilon>0$ มีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่ง $|F(z,w)-F(z_0,w_0)|<\varepsilon$ เมื่อ $(z,w)\in A\times B$ และ $|z-z_0|<\delta$ และ $|w-w_0|<\delta$

ทฤษฎีบท 2.46: กำหนดให้ $f(z,w)$ มีความต่อเนื่องบน $D\times K$ เมื่อ K เป็นคอนทัวร์ และ D เป็นโดเมนใน R^2 ถ้า สำหรับแต่ละ w บน K เราได้ว่า $f(z,w)\in A(D)$ ถ้านิยาม g บน D ดังนี้

$$g(z)=\int_K f(z,w)dw \quad \text{สำหรับแต่ละ } z\in D$$

แล้ว $g\in A(D)$

บทนิยาม 2.47:

(1) **ลำดับใน** R^2 (sequence in R^2) คือ ฟังก์ชัน z ซึ่งมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ N และมีเรนจ์เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน R^2 ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์

$$\{z_n\} \text{ หรือ } z_1, z_2, z_3, \ldots$$

(2) ลำดับ $\{z_n\}$ **ลู่เข้าสู่** b (converges to b) ใน R^2 ก็ต่อเมื่อ

สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็ม M ซึ่ง ถ้า $n > M$ แล้ว $|z_n - b| < \varepsilon$

(3) ลำดับ**ลู่ออก**(diverges) ก็ต่อเมื่อ ลำดับไม่ลู่เข้าสู่จุดใด ๆ ใน R^2

บางครั้งเราจะใช้สัญลักษณ์

$$b = \lim z_n \quad \text{หรือ} \quad z_n \to b \text{ ขณะที่ } n \to \infty \text{ หรือ } z_n \to b$$

แทนลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

บทนิยาม 2.48 : ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ เป็น**ลำดับโคชี**(Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็ม M ซึ่ง ถ้า $m \geq M$ และ $n \geq M$ แล้ว $|z_m - z_n| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.49 : ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{z_n\}$ เป็นลำดับโคชี

บทนิยาม 2.50:

(1) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ f เป็นรีมันน์อินทิเกรเบิลบน $[a,t)$ สำหรับทุก $t \geq a$ แล้ว **อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ** f **บน** $[a,\infty)$ (improper integral over $[a,+\infty)$) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^\infty f(x)dx$ นิยามดังนี้

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

ถ้า $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ หาค่าได้เป็นค่าจำกัด เรากล่าวว่า $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่เข้า ถ้าไม่เป็นเช่นนั้น เรากล่าวว่า $\int_a^\infty f(x)dx$ ลู่ออก

(2) กำหนดให้ b เป็นจำนวนจริง และ f เป็นรีมันน์อินทิเกรเบิลบน $[t,b)$ สำหรับทุก $t \leq b$ แล้ว **อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ** f **บน** $(-\infty,b]$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ นิยามดังนี้

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$$

ถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$ หาค่าได้เป็นค่าจำกัด เรากล่าวว่า $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ลู่เข้า ถ้าไม่เป็นเช่นนั่น เรากล่าวว่า $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ ลู่ออก

(3) กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริง และ f เป็นรีมันน์อินทิเกรเบิลบน $(-t,t)$ สำหรับทุกจำนวนจริง t แล้ว**อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน** $(-\infty,\infty)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ นิยามดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_{c}^{t} f(x)dx$$

ถ้า $\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)dx$ และ $\lim_{t\to\infty}\int_{c}^{t} f(x)dx$ หาค่าได้เป็นจำนวนจำกัดทั้งคู่ เรากล่าวว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า ถ้าไม่เป็นเช่นนั่น เรากล่าวว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

(4) (The Cauchy principal value integral) $P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ นิยามโดย

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx$$

ถ้าลิมิตสามารถหาค่าได้

หมายเหตุ 2.51: ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ หาค่าได้ แล้ว $P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ หาค่าได้ และทั้งสองจะมีค่าเท่ากัน

บทที่ 3
ฟังก์ชันฮาร์โมนิกและสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง
Harmonic Functions and Poisson’s Integral Formula

ในบทนี้จะศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิก พร้อมทั้งทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นหัวข้อที่สำคัญและเป็นจุดมุ่งหมายในการทำสารนิพนธ์ฉบับนี้ นอกจากนี้ยังศึกษาสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง ซึ่งจะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาดิริกเลต์ที่จะกล่าวถึงในบทต่อไป

บทนิยาม 3.1: กำหนดให้ D เป็นโดเมนใน R^2 และ $u: D \to R$ กล่าวว่า u เป็น**ฟังก์ชันฮาร์โมนิก** (harmonic function) ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} และ u_{yx} มีความต่อเนื่องบน D และสอดคล้องกับ**สมการลาปลาซ** (Laplace equation)

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv o \quad \text{บน } D$$

จะเขียนแทน u ที่สอดคล้องกับบทนิยามนี้ด้วยสัญลักษณ์ $u \in H(D)$ และเขียนแทนสมการลาปลาซด้วย $\nabla^2 u = 0$ เมื่อ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ คือตัวดำเนินการลาปลาซ(Laplacian operator)

ทฤษฎีบท 3.2: ถ้า $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D เมื่อ $u: D \to R$ และ $v: D \to R$ แล้ว u และ v เป็นฮาร์โมนิกบน D

พิสูจน์: ให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนโดเมน D
เมื่อ $u: D \to R$ และ $v: D \to R$
โดยทฤษฎีบท 2.15 จะได้ว่า $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$ ทุก $(x, y) \in D$
จะได้ $u_{xx} = v_{yx}$ และ $u_{yy} = -v_{xy}$
โดยข้อสังเกต 2.43 จะได้ว่า $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}, v_{xx}, v_{yy}, v_{xy}, v_{yx}$
มีความต่อเนื่องบน D
ดังนั้น $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$
ทำให้ได้ว่า $u_{xx} + u_{yy} = o$ บน D

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกบน D

ในทำนองเดียวกัน v เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกบน D ■

บทนิยาม 3.3: กำหนดให้ $u \in H(D)$ แล้ว $v : D \to R$ เป็น**ฮาร์โมนิกคอนจูเกต** (harmonic conjugate) ของ u บน D ก็ต่อเมื่อ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D

นั่นคือ v เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D ก็ต่อเมื่อ v เป็นส่วนจินตภาพของบางฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ซึ่งมี u เป็นส่วนจริง

หมายเหตุ 3.4:

(1) ถ้า v เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D แล้ว $-u$ เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ v บน D

(2) ถ้า v เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D แล้ว $v + k$ เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D เมื่อ k เป็นค่าคงที่

(3) ถ้า v และ w เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บนโดเมน D แล้ว $v - w$ เป็นฟังก์ชันคงที่บน D

พิสูจน์(1): ให้ v เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D

ดังนั้นจะมี $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

ทำให้ได้ว่า $(-i)f = -iu + v$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D

นั่นคือ $-u$ เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ v บน D

(2): ให้ v เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D

ดังนั้น จะมี $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D

ซึ่งทำให้ได้ว่า $f + ik = u + i(v + k)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D

นั่นคือ $v + k$ เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D

(3): ให้ v, w เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บนโดเมน D

ดังนั้น จะมี $f = u + iv$ และ $g = u + iw$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนโดเมน D

ทำให้ได้ว่า $f - g = i(v - w)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนโดเมน D

โดย ทฤษฎีบท 2.19 จะได้ว่า $f - g$ เป็นฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น $v - w$ เป็นฟังก์ชันคงที่บน D ■

เมื่อกำหนด $u \in H(D)$ ซึ่ง D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว เราหาฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน D ได้ตามทฤษฎีบท 3.5 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5: กำหนดให้ $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวใน R^2 แล้ว จะมี $f \in A(D)$ ซึ่ง $u = R(f)$ และ $f = u + iv$ เมื่อ $v(z) = I\left(\int_{z_0}^{z} [u_x(w) - iu_y(w)]dw\right)$

เมื่อ $z_0 \in D$

พิสูจน์: ให้ $h = u_x - iu_y$

เนื่องจาก $u \in H(D)$ ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial x}R(h) = u_{xx} = -u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}I(h)$

และ $\frac{\partial}{\partial y}R(h) = u_{xy} = u_{yx} = -\frac{\partial}{\partial x}I(h)$

โดยทฤษฎีบท 2.16 จะได้ว่า $h \in A(D)$

เลือก $z_0 \in D$

สำหรับทุก $z \in D$ นิยาม $g(z) = \int_{z_0}^{z} [u_x(w) - iu_y(w)]dw = \phi(z) + i\nu(z)$

โดยทฤษฎีบท 2.40 จะได้ว่า $g \in A(D)$

และทำให้ได้ว่า $g'(z) = u_x - iu_y$

โดย ทฤษฎีบท 2.15 จะได้ว่า $g'(z) = \phi_x + i\nu_x$

ดังนั้น $u_y = -\nu_x$ และ $u_x = \phi_x$

เนื่องจาก $g \in A(D)$ โดย ทฤษฎีบท 2.15 จะได้ว่า $\phi_x = \nu_y$

นั่นคือ $u_x = v_y$

โดยข้อสังเกต 2.43 (1) จะได้ว่า $g' \in A(D)$ ดังนั้น $g' \in C(D)$

เนื่องจาก $g'(z) = u_x - iu_y = \phi_x + i\nu_x = v_y - i\phi_y$

โดยข้อสังเกต 2.8 u_x, u_y, v_x, v_y มีความต่อเนื่องบน D

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u, v มีความต่อเนื่องบน D

ให้ $f = u + iv$ โดยทฤษฎีบท 2.16 สามารถสรุปได้ว่า $f \in A(D)$ ■

หมายเหตุ 3.6: ในทฤษฎีบท 3.5 ข้อสรุปเป็นจริงเมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว แต่ในกรณีที่ D ไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว ข้อสรุปอาจไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้

$$u(z)=Log|z| \text{ สำหรับ } z\in D$$

เมื่อ

$$D=\{\, z : |z|>0 \,\}$$

พิสูจน์ : ให้ $u(z)=Log|z|$ สำหรับ $z\in D$ เมื่อ $D=\{\, z : |z|>0 \,\}$

จะเห็นได้ว่า $\nabla^2 u=0$ บน D ดังนั้น $u\in H(D)$

ต่อไปนี้จะแสดงว่า u ไม่มีฮาร์โมนิกคอนจูเกตบน D

ให้ $E=D-L$ เมื่อ $L=\{\, z : z=x<0 \,\}$

จะได้ว่า $Log\, z=Log|z|+iArg\, z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน E เมื่อ $-\pi<Arg\, z<\pi$

ดังนั้น $v=Arg\, z$ เป็นฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน E

โดยหมายเหตุ 3.4(2) จะได้ว่าฮาร์โมนิกคอนจูเกตของ u บน E ทั้งหมด คือ $v+k$

สำหรับ $x\in L$ ถ้า $z\to x$ เหนือ L แล้ว $v(z)\to\pi$

และถ้า $z\to x$ ใต้ L แล้ว $v(z)\to-\pi$

เพราะฉะนั้น v ไม่มีความต่อเนื่องบน D

ดังนั้น $v+k$ ไม่มีความต่อเนื่องบน D

ดังนั้น u ไม่มีฮาร์โมนิกคอนจูเกตบน D ■

ทฤษฎีบท 3.7: กำหนดให้ $u\in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน ถ้ามี $r>0$ ซึ่ง u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_0)$ เมื่อ $N_r(z_0)\subset D$ แล้ว u เป็นฟังก์ชันคงที่บน D

พิสูจน์: ให้ $u\in H(D)$ ให้ $u|_{N_r(z_0)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่

ให้ $E=\{\, z : z\in D$ และ $u|_{N_r(z)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่ $\}$

เห็นได้ว่า $E\neq\phi$

Cliam 1: E เป็นเซตเปิด

ให้ $z_1\in E$ (ต้องการแสดงว่ามี $r>0$ ซึ่ง $N_r(z_1)\subset E$)

จากนิยามของ E จะมี $r_1>0$ ซึ่ง $u|_{N_{r_1}(z_1)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่

ให้ $z_2\in N'_{r_1}(z_1)$

เลือก $r_2=\frac{1}{2}\min\{|z_1-z_2|, r_1-|z_1-z_2|\}$

ดังนั้นจะได้ว่า $N_{r_2}(z_2)\subset N_{r_1}(z_1)$ และ $u|_{N_{r_1}(z_1)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่

ดังนั้น $u|_{N_{r_2}(z_2)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่ แสดงว่า $z_2\in E$

ดังนั้น $N_{r_1}(z_1) \subset E$

แสดงว่า E เป็นเซตเปิด

cliam 2: $D = E$

สมมติ $D - E \neq \phi$

ให้ $z_1 \in (D - E)$ ดังนั้น จะมี $r > 0$ ซึ่ง $N_r(z_1) \subset D$

เราจะแสดงว่า $N_r(z_1) \subset D - E$

โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า $f \in A(N_r(z_1))$ ซึ่ง $R(f) = u$ บน $N_r(z_1)$

สมมติ $N_r(z_1) \cap E \neq \phi$

ให้ $z' \in N_r(z_1) \cap E$

ดังนั้น จะมี $r_1 > 0$ ซึ่ง $N_{r_1}(z') \subseteq N_r(z_1)$

และมี $r_2 > 0$ ซึ่ง $u|_{N_{r_2}(z')}$ เป็นฟังก์ชันคงที่

ให้ $r' = \min\{r_1, r_2\}$

ให้ $D_0 = N_{r'}(z')$ ซึ่ง $u|_{D_0}$ เป็นฟังก์ชันคงที่ และ $D_0 \subset N_r(z_1)$

โดยทฤษฎีบท 2.18(2) f เป็นฟังก์ชันคงที่บน D_0

เนื่องจาก $f \in A(N_r(z_1))$ และ $D_0^* \cap N_r(z_1) \neq \phi$

โดยทฤษฎีบท 2.20 จะได้ f เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_1)$

เพราะฉะนั้น u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_1)$

ทำให้ได้ว่า $z_1 \in E$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $N_r(z_1) \cap E = \phi$ นั่นคือ $N_r(z_1) \subset D - E$

ดังนั้น $D - E$ เป็นเซตเปิด

ทำให้ได้ว่า $D = E \cup (D - E)$

โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า D ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $D - E = \phi$ นั่นคือ $D = E$

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันคงที่บน D ■

ทฤษฎีบท 3.8: (Maximum-Minimum Principle for Harmonic functions)

กำหนดให้ $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน ถ้า u มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดใน D แล้ว u เป็นฟังก์ชันคงที่ บน D

พิสูจน์: กรณีที่ 1: ถ้า u มีค่าสูงสุดใน D

ให้ $z_0 \in D$ ซึ่ง $u(z_0) \geq u(z)$ ทุก $z \in D$

เนื่องจาก D เป็นโดเมนดังนั้นจะมี $r>0$ ซึ่ง $N_r(z_0)\subset D$

จะแสดงว่า u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_0)$

สมมติ u ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_0)$

โดย ทฤษฎีบท 3.5 จะมี $f\in A(N_r(z_0))$ ซึ่ง $u=R(f)$ บน $N_r(z_0)$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_0)$

และจากทฤษฎีบท 2.22 จะได้ว่า $f[N_r(z_0)]$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $\delta>0$ ซึ่ง $N_\delta(f(z_0))\subset f[N_r(z_0)]$

ให้ S เป็นส่วนของเส้นตรงตามแนวราบบน R^2 ที่มีจุดปลายซ้ายเป็น

$$f(z_0)=u(z_0)+iv_0 \text{ และ } S\subset N_\delta(f(z_0))$$

แล้วจะได้ว่า $w\in S-\{f(z_0)\}$ จะมี $z\in N_r(z_0)$ ซึ่ง $w=f(z)=u(z)+i(I(z))$

จะเห็นได้ว่า $u(z)>u(z_0)$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นค่าสูงสุดของ $u(z_0)$

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $N_r(z_0)$

โดยทฤษฎีบท 3.7 จะทำให้ได้ว่า u เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ บน D

กรณีที่2: ถ้า u มีค่าต่ำสุดใน D

เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า u เป็นฟังก์ชันคงที่บน D ■

บทแทรก 3.9: กำหนดให้ $u\in H(D)$ และให้ $u\in C(\overline{D})$ เมื่อ D เป็นโดเมนมีขอบเขต แล้วจะได้ว่า u มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $B(D)$

พิสูจน์: โดยทฤษฎีบท 2.11(2) จะได้ว่า u มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $\overline{D}$

กรณีที่1: u ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บน D

โดย ทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า u ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน D

ดังนั้น u มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $B(D)$

กรณีที่2: u เป็นฟังก์ชันคงที่บน D

จะแสดงว่า u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $\overline{D}$

ให้ $u(z)=k$ เมื่อ $z\in D$

ให้ $a\in B(D)$ ดังนั้น $N_\delta(a)\cap D\neq\phi$ ทุก $\delta>0$

สมมติ $u(a)\neq k$

เลือก $\varepsilon=|u(a)-k|$ สำหรับทุก $\delta>0$ จะมี $z\in N_\delta(a)\cap D$ ซึ่งสอดคล้องกับ

ถ้า $|z-a|<\delta$ แล้ว $|u(z)-u(a)|=|u(a)-k|=\varepsilon$

ดังนั้น u ไม่มีความต่อเนื่องที่ a ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $u(a)=k$

นั่นคือ u เป็นฟังก์ชันคงที่บน $\overline{D}$

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันที่ให้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $B(D)$ ■

บทแทรก 3.10: กำหนดให้ $u,v \in H(D)$ และให้ $u,v \in C(\overline{D})$ เมื่อ D เป็นโดเมนที่มีขอบเขต ถ้า $u \equiv v$ บน $B(D)$ แล้ว $u \equiv v$ บน $\overline{D}$

พิสูจน์: ให้ $u \equiv v$ บน $B(D)$

จะได้ว่า $u - v \equiv 0$ บน $B(D)$

โดยบทแทรก 3.9 จะได้ว่าค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $u - v$ เกิดขึ้นบน $B(D)$

เนื่องจาก ค่าสูงสุดของ $u - v$ บน $\overline{D}$ = 0 = ค่าต่ำสุดของ $u - v$ บน $\overline{D}$

ดังนั้น $u - v \equiv 0$ บน $\overline{D}$ นั่นคือ $u \equiv v$ บน $\overline{D}$ ■

ทฤษฎีบท 3.11(Mean-value Property for Analytic Functions):

ถ้า $f \in A(\overline{N_r(a)})$ เมื่อ $a \in R^2$ แล้ว $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$

พิสูจน์: ให้ C เป็นวงกลม นิยามโดย $C = \{ w : |w - a| = r \}$ เมื่อ $w = a + re^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi]$

โดยทฤษฎีบท 2.41

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w - a}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta
\end{aligned}
$$

■

ทฤษฎีบท 3.12(Mean-value Property for Harmonic functions):

ให้ $u \in H(D)$ และ $a \in D$ เมื่อ D เป็นโดเมน แล้วจะมี $\rho > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $0 < r < \rho$ แล้ว $u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$

พิสูจน์: ให้ $\rho > 0$ ซึ่ง $N_\rho(a) \subset D$ และให้ $0 < r < \rho$

เนื่องจาก $N_\rho(a)$ เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่ามี $f \in A\left(N_\rho(a)\right)$ ซึ่ง $u = R(f)$

และโดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$$u(a) = R(f(a)) = R\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta \qquad \blacksquare$$

บทนิยาม 3.13: ให้ $u : D \to R$ และ $u \in C(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน เรากล่าวว่า u **สอดคล้องกับคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน** D (satisfies the mean-value property in D) ถ้าแต่ละ $a \in D$ จะมี $\rho > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $0 < r < \rho$ แล้ว

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta$$

ทฤษฎีบท 3.14: กำหนดให้ $u \in C(D)$ เมื่อ D โดเมน และ u สอดคล้องกับคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน D นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a \in D$ มี $\rho > 0$ ซึ่ง

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta \qquad \text{สำหรับ} \quad 0 < r < \rho$$

แล้วได้ว่า

(1) ถ้า u มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดใน D แล้ว u เป็นฟังก์ชันคงที่บน D

(2) ถ้า D มีขอบเขตและ $u \in C(\overline{D})$ แล้ว u มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบน $B(D)$

พิสูจน์(1): ในกรณีที่ u มีค่าสูงสุดใน D สมมติค่าสูงสุดเท่ากับ M

ให้ $G = \{z \mid z \in D \wedge u(z) = M\}$ แล้ว $G \neq \phi$

Claim1: G เป็นเซตเปิด

เนื่องจาก u สอดคล้องกับคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน D

ให้ $a \in G$ ดังนั้นมี $\rho > 0$ ซึ่ง

$$M = u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta \text{ สำหรับ } 0 < r < \rho$$

สมมติ $u(z) < M$ บาง z ซึ่ง $z \in \{ z : |z-a| = r \}$

โดยทฤษฎีบท 2.44 จะได้ว่า ถ้ามี θ ซึ่ง $u(a + re^{i\theta}) < M$ แล้ว

$$\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta < M(2\pi)$$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta < M \quad \text{ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $u(z) = M$ สำหรับทุก z ซึ่ง $|z-a| = r$

และจะได้ว่า $u(z) = M$ สำหรับทุก $z \in N_\rho(a)$

นั่นคือ $N_\rho(a) \subset G$ ดังนั้น G เป็นเซตเปิด

ต่อไปจะแสดงว่า $D = G$ (แล้วจะได้ว่า u จะเป็นฟังก์ชันคงที่บน D)

สมมติ $D - G \neq \phi$

Cliam2: $D-G$ เป็นเซตเปิด

ให้ $z_0 \in D - G$ และ $\varepsilon = \frac{1}{2}[M - u(z)]$

เนื่องจาก $u \in C(\{z_0\})$ ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$N_\delta(z_0) \subset D \quad \text{และ} \quad u(N_\delta(z_0)) \subset N_\varepsilon(u(z_0))$$

เนื่องจาก $M \notin N_\varepsilon(u(z_0))$

ดังนั้น ทุก $z \in N_\delta(z_0)$ จะได้ว่า $u(z) < M$

เราสรุปได้ว่า $N_\delta(z_0) \subset (D-G)$

เพราะฉะนั้น $D-G$ เป็นเซตเปิด

เนื่องจาก ทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $D = G \cup (D-G)$ ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $D - G = \phi$ ทำให้ได้ว่า $D = G$

นั่นคือ ทุก $z \in D$ $\quad u(z) = M$

(2) การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์บทแทรก 3.10 ■

ทฤษฎีบท 3.15: ให้ D เป็นโดเมนและ $f \in A(D)$ โดยที่ $f' \neq 0$ ทุก $z \in D$

ให้ $E = f[D]$ และ $g : E \to R$ โดยที่ $g_{xx}, g_{yy}, g_{yx}, g_{xy}$ มีความต่อเนื่องบน E

ให้ $h(z) = g(f(z))$ สำหรับแต่ละ $z \in D$ แล้ว

$$\nabla^2 h = |f'(z)|^2 \nabla^2 g \text{ บน } D$$

พิสูจน์: ให้ $f = u + iv$ แล้ว

$$h(x,y) = g(u,v) \quad \text{เมื่อ} \quad u = u(x,y)\ ,\ v = v(x,y)$$

ดังนั้น $h_x = g_u u_x + g_v v_x$

$$h_{xx} = (g_{uu}u_x + g_{uv}v_x)u_x + g_u u_{xx} + (g_{vu}u_x + g_{vv}v_x)v_x + g_v v_{xx}$$

$$= g_{uu}u_x^2 + g_{uv}v_x u_x + g_u u_{xx} + g_{vu}u_x v_x + g_{vv}v_x^2 + g_v v_{xx}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$h_{yy} = g_{uu}u_y^2 + g_{uv}v_y u_y + g_u u_{yy} + g_{vu}u_y v_y + g_{vv}v_y^2 + g_v v_{yy}$$

ดังนั้น

$$h_{xx} + h_{yy} = g_u(u_{xx} + u_{yy}) + g_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + g_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + g_v(v_{xx} + v_{yy})$$
$$+ g_{vu}(u_x v_x + u_y v_y) + g_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

เนื่องจาก $f \in A(D)$ ดังนั้น $u, v \in H(D)$

ทำให้ได้ว่า $u_{xx} + u_{yy} = 0 = v_{xx} + v_{yy}\ , u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$

ดังนั้นจะได้ว่า $u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_x^2 + v_y^2$ และ $u_x v_x + u_y v_y = 0$

ทำให้ได้ว่า $h_{xx} + h_{yy} = g_{uu}(u_x^2 + v_y^2) + g_{vv}(u_x^2 + v_y^2)$

$$= (g_{uu} + g_{vv})(u_x^2 + v_y^2)$$

เนื่องจาก $f \in A(D)$ ดังนั้น $f'(z) = u_x + iv_x$

เพราะฉะนั้น $|f'(z)| = \sqrt{u_x^2 + v_x^2}$

ดังนั้น $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2$

นั่นคือ $h_{xx} + h_{yy} = |f'(z)|^2 \nabla^2 g$ ■

บทแทรก 3.16: ให้ $f \in A(D)$ โดยที่ $f' \neq 0$ ทุก $z \in D$ ให้ $E = f[D]$ และ $g : E \to R$ และ ให้ $h : D \to R$ โดย $h(z) = g(f(z))$ สำหรับแต่ละ $z \in D$ แล้ว

$$h \in H(D) \text{ ก็ต่อเมื่อ } g \in H(E)$$

พิสูจน์: $(\leftarrow)$ ให้ $g \in H(E)$ ดังนั้น $\nabla^2 g = 0$ บน E

โดย ทฤษฎีบท 3.15 จะได้ว่า $\nabla^2 h = |f'(z)|^2 \nabla^2 g = 0$ บน D

เพราะฉะนั้น $h \in H(D)$

$(\rightarrow)$ ให้ $h \in H(D)$

ให้ $w_0 \in E$ และ $z_0 \in D$ ซึ่ง $f(z_0) = w_0$

โดยทฤษฎีบท 2.21 จะได้ว่า มี $\rho > 0$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน 1-1 บน $N_\rho(z_0)$

ให้ $G = f[N_\rho(z_0)]$

โดยทฤษฎีบท 2.24 จะได้ว่า $G = f[N_\rho(z_0)]$ เป็นโดเมน

สำหรับแต่ละ $w \in G$ จะมี $z \in N_\rho(z_0)$ ซึ่ง $f(z) = w$

ให้ $F(w) = z$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.23 (1) ได้ว่า $F \in A(G)$

ดังนั้น $g(w) = h(F(w))$ สำหรับทุก $w \in G$

โดย ทฤษฎีบท 2.23(2) จะได้ว่า $F' \neq 0$ ทุก $w \in G$

โดยทฤษฎีบท 3.15 จะได้ว่า $\nabla^2 g = |F'(w)|^2 \nabla^2 h$

และเนื่องจาก $h \in H(D)$

ดังนั้น $\nabla^2 g = 0$ นั่นคือ $g \in H(E)$ ■

ทฤษฎีบทประกอบ 3.17:

(1) ถ้า $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว แล้ว $u \in C(D)$

(2) ถ้า $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน แล้ว $u \in C(D)$

พิสูจน์(1) : ให้ $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า มี $f \in A(D)$ เมื่อ $u = R(f)$

และดังนั้น f มีอนุพันธ์ทุกจุดใน D

โดยทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า $f \in C(D)$

โดยทฤษฎีบท 2.8 จะได้ว่า $u \in C(D)$

(2) : ให้ $z_0 \in D$

จะได้ว่ามี $r > 0$ ซึ่ง $N_r(z_0) \subset D$

เนื่องจาก $u \in H(D)$ ดังนั้น $u \in H(N_r(z_0))$

และโดย(1) จะได้ว่า $u \in C(N_r(z_0))$

ดังนั้น $u \in C(D)$ ■

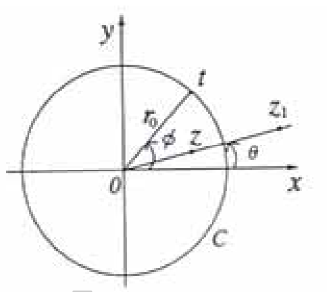
(3) กำหนดให้ $r_0 > 0$ และให้ C เป็นวงกลม $|t| = r_0$ เมื่อ $t = r_0 e^{i\phi}$; $\phi \in [0, 2\pi]$

ให้ $z = re^{i\theta} \in I(C)$ ซึ่ง $r > 0$ และ $z_1 = \frac{r_0^2}{r}e^{i\theta}$ ซึ่งจะเรียก z_1 ว่าเป็น**จุดผกผันของ z เทียบกับวงกลม** C (inverse point of z with respect to the circle C) และแสดงได้ดังรูป(2) แล้วได้ว่า

(3.1) $\arg z_1 = \theta = \arg z$, $|z_1| = \frac{r_0^2}{r}$ และ $|z||z_1| = r_0^2$ เนื่องจาก $r_0 > r$ ดังนั้น $z_1 \in E(C)$

(3.2) $\bar{z}z_1 = r_0^2 = t\bar{t}$ ทุก $t \in C$

(3.3) $\frac{\bar{z}z_1}{t} = \bar{t}$ ทุก $t \in C$



รูป 2: $z_1 = \frac{r_0^2}{r}e^{i\theta}$ เป็นจุดผกผันของ $z = re^{i\theta} \in I(C)$

ในหัวข้อต่อไปนี้จะศึกษาสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง ซึ่งเป็นส่วนสำคัญที่ใช้ในการศึกษาปัญหาดิริกเลต์ที่จะกล่าวถึงในบทที่ 4

จากสูตรอินทิกรัลของโคชี เราทราบว่าถ้า $f \in A\left(\overline{I(C)}\right)$ เมื่อ C เป็นวงกลม แล้ว

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \text{สำหรับแต่ละ } z \in I(C)$$

ในทำนองเดียวกันถ้า f เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก เราสามารถหาค่า $f(z)$ เมื่อ $z \in I(C)$ ได้โดยสูตรอินทิกรัลของปัวส์ซอง

ทฤษฎีบท 3.18: ให้ $u \in H(D)$ และ $\overline{I(C)} \subset D$ เมื่อ C เป็นวงกลม นิยามโดยสมการ $|t| = r_0$ เมื่อ $t = r_0 e^{i\phi}$; $\phi \in [0, 2\pi]$ ถ้า $z = re^{i\theta} \in I(C)$ แล้ว

$$u(z) = u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)u(r_0,\phi)}{r_0^2 - 2rr_0\cos(\phi-\theta) + r^2}d\phi$$

(เรียกอินทิกรัลที่กล่าวข้างบนนี้ว่า **อินทิกรัลของปัวส์ซอง**(Poisson's integral))

พิสูจน์: โดยทฤษฎีบท 3.5 จะมี $f \in A\left(\overline{I(C)}\right)$ ซึ่ง $R(f) = u$

ให้ $z = re^{i\theta} \in I(C)$ โดยที่ $r \geq 0$

กรณีที่ 1: $r > 0$

โดยสูตรอินทิกรัลของโคชีจะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad \text{เมื่อ} \quad t = r_0 e^{i\phi}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{t-z} it\,d\phi \qquad dt = ir_0 e^{i\phi}d\phi = it\,d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t}{t-z} f(t)\,d\phi \qquad \text{..........(*)}$$

ให้ z_1 เป็นจุดผกผันของ z เทียบกับ C แล้ว $z_1 = \frac{r_0^2}{r}e^{i\theta}$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.17(3.3) จะได้ว่า $\bar{t} = \frac{\bar{z}z_1}{t}$ ทุก $t \in C$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.17(3.1) จะได้ว่า $z_1 \in E(C)$

ให้ $g(t) = \frac{f(t)}{t-z}$ ทุก $t \in C$ แล้ว $g \in A\left(\overline{I(C)}\right)$

โดย ทฤษฎีบท 2.38

จะได้ว่า

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z_1}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{t-z_1} it\,d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t}{t-z_1} f(t)\,d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}}{\bar{z}-\frac{\bar{z}z_1}{t}} f(t)\,d\phi \qquad \left(\text{นำ } \frac{\bar{z}}{t} \text{ คูณทั้งเศษและส่วน}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{t}} f(t)\,d\phi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}} f(t)\,d\phi$$

ดังนั้น

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}}f(t)d\phi \qquad \ldots\ldots\ldots(**)$$

เมื่อนำ (*) บวกกับ (**) จะได้ว่า

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{t-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}}\right)f(t)d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t(\bar{t}-\bar{z})+\bar{z}(t-z)}{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})}\right)f(t)d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{t\bar{t}-t\bar{z}+\bar{z}t-\bar{z}z}{t\bar{t}-(t\bar{z}+\bar{t}z)+z\bar{z}}f(t)d\phi$$

เนื่องจาก $t\bar{z}+\overline{t\bar{z}}=2R(t\bar{z})=2R(r_0re^{i(\phi-\theta)})=2r_0r\cos(\phi-\theta)$

เพราะฉะนั้น $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}f(r_0e^{i\phi})d\phi$

ดังนั้น $u(z)=R(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)u(r_0e^{i\phi})}{r_0^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)+r^2}d\phi$

กรณีที่ 2: $r=0$

ทำให้ได้ว่า $z=0$ โดยสูตรอินทิกรัลของโคชี ได้ว่า

$$f(z)=f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-0}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{t}itd\phi$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r_0e^{i\phi})d\phi$$

ดังนั้น

$$u(z)=R(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_0e^{i\phi})d\phi$$

เนื่องจาก เมื่อ $r=0$ จะได้ $\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)+r^2}=1$

เพราะฉะนั้น $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)u(r_0e^{i\phi})}{r_0^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)+r^2}d\phi$ ■

หมายเหตุ 3.19: จากทฤษฎีบท 3.18 เราจะเรียกพจน์ $\dfrac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0\cos(\phi-\theta) + r^2}$ ว่า**ปัวส์ซองเคอเนิล** (Poisson kernel) ซึ่งเขียนแทนด้วย $P(r_0,r,\theta-\phi)$ หรือ $K(z,t)$ และเราได้ความสัมพันธ์ของปัวส์ซองเคอเนิล

(1) $P(r_0,r,\theta-\phi) = \dfrac{t}{t-z} - \dfrac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}} = \dfrac{|t|^2 - |z|^2}{|t-z|^2}$

(2) $P(r_0,r,\theta-\phi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta-\phi)$ สำหรับ $0 \le r \le r_0$

(3) $P(r_0,r,\theta-\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\phi)}$ สำหรับ $0 \le r \le r_0$

(4) $0 < \dfrac{|t|^2 - |z|^2}{|t-z|^2} = P(r_0,r,\theta-\phi) = P(r_0,r,\phi-\theta)$

(5) ให้ $u(r,\theta) \equiv 1$ จะได้ว่า $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\theta-\phi)\,d\phi = 1$

(6) ให้ $t \in C$ เมื่อ $t = r_0 e^{i\phi}$; $\phi \in [0,2\pi]$ แล้วจะได้ว่า $K(z,t) \in H(I(C))$

พิสูจน์(1):

$$
\begin{aligned}
P(r_0,r,\theta-\phi) &= \frac{t}{t-z} - \frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}} \\
&= \frac{t(\bar{t}-\bar{z}) + \bar{z}(t-z)}{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})} \\
&= \frac{t\bar{t} - t\bar{z} + \bar{z}t - \bar{z}z}{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})} \\
&= \frac{t\bar{t} - \bar{z}z}{(t-z)\overline{(t-z)}} \\
&= \frac{|t|^2 - |z|^2}{|t-z|^2}
\end{aligned}
$$

(2):

$$
\begin{aligned}
P(r_0,r,\theta-\phi) &= \frac{t}{t-z} - \frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{z}{t}} - \frac{\overline{\left(\frac{z}{t}\right)}}{1-\overline{\left(\frac{z}{t}\right)}}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{z}{t}\right| = \dfrac{|z|}{|t|} = \dfrac{r_0}{r} < 0$ และ $\left|\overline{\left(\dfrac{z}{t}\right)}\right| = \dfrac{|z|}{|t|} = \dfrac{r_0}{r} < 0$

ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(r_0, r, \theta - \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\left(\frac{z}{t}\right)^n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\left(\frac{z}{t}\right)^n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{t}\right)^n + \overline{\left(\frac{z}{t}\right)^n}\right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2R\left[\left(\frac{z}{t}\right)^n\right]
\end{aligned}
$$

$$
P(r_0, r, \theta - \phi) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta - \phi)
$$

(3):

$$
\begin{aligned}
P(r_0, r, \theta - \phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\left(\frac{z}{t}\right)}^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{in(\theta-\phi)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{-in(\theta-\phi)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{in(\theta-\phi)} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} e^{in(\theta-\phi)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\phi)}
\end{aligned}
$$

(6): โดย (1) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
K(z,t) = \frac{r_0^2 - r}{|t-z|^2} &= R\left(\frac{r_0^2 - r}{|t-z|^2}\right) \\
&= R\left(\frac{t}{t-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}}\right) \\
&= R\left(\frac{t}{t-z}\right) + R\left(\frac{\bar{z}}{\bar{t}-\bar{z}}\right) \\
&= R\left(\frac{t}{t-z}\right) + R\left(\frac{z}{t-z}\right) \\
&= R\left(\frac{t+z}{t-z}\right)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\dfrac{t+z}{t-z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $I(C)$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $K(z,t) \in H(I(C))$ ■

บทที่ 4
ปัญหาดิริกเลต์
Dirichlet's Problem

ในบทนี้จะศึกษาปัญหาดิริกเลต์ ซึ่งเป็นแนวคิดที่สำคัญที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประยุกต์และทางฟิสิกส์ ลักษณะของปัญหาดิริกเลต์มีดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $D \subset R^2$ เป็นโดเมน และ $f : B(D) \to R$

ปัญหาของดิริกเลต์ คือ ปัญหาในการหาฟังก์ชัน u ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $u \in H(D)$

(2) $u = f$ บน $B(D)$

(3) u มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดบน $B(D)$ เมื่อ f มีความต่อเนื่องที่จุดเหล่านั้น

ในที่นี้จะแบ่งปัญหาดิริกเลต์ตามลักษณะของโดเมน ซึ่งสามารถแบ่งได้ 2 แบบดังต่อไปนี้

(1) ปัญหาดิริกเลต์สำหรับจาน(Dirichlet's Problem for Disks)

(2) ปัญหาดิริกเลต์สำหรับครึ่งระนาบ (Dirichlet's Problem for a Half-Plane)

4.1 ปัญหาดิริกเลต์สำหรับจาน(Dirichlet Problem for Disks)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงคำตอบของปัญหาดิริกเลต์บนอาณาบริเวณที่เป็นจานแบบต่างๆ ซึ่งจะกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4.1.1 และทฤษฎีบท 4.1.2

ทฤษฎีบท 4.1.1: (Dirichlet's Problem for the Disk $N_{r_0}(0)$)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนวงกลม C นิยามโดยสมการ $|t| = r_0$ เมื่อ $t = r_0 e^{i\phi}$; $\phi \in [0, 2\pi]$ และสำหรับแต่ละ $z \in I(C)$

ให้
$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,t)\, f(t)\, d\phi$$

แล้ว $u \in H(I(C))$

และ ถ้า f มีความต่อเนื่องบน C แล้ว $\lim_{z\to t} u(z) = f(t)$ ทุก $t \in C$

พิสูจน์(1): จะแสดงว่า $u \in H(I(C))$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องเป็นช่วง C

ดังนั้น สามารถแบ่ง C ออกเป็นอาร์กจำนวนจำกัดตามบทนิยาม 2.9

ให้ H เป็นอาร์กของ C กำหนดโดย $t = r_0 e^{i\phi}$,$\phi \in [a,b]$ ซึ่ง $f \in C(H)$

สำหรับ $z \in I(C)$ ให้ $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_H K(z,t)\frac{f(t)}{ti}dt$

จากการพิสูจน์ในหมายเหตุ 3.19(6) เราจะได้ว่า

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b R\left(\frac{t+z}{t-z}\right) f(t)d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}R\left(\int_a^b \frac{t+z}{t-z} f(t)d\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}R\left(\int_H \frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)}{ti}dt\right)$$

โดยทฤษฎีบท 2.46 จะได้ว่า $\int_H \frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)}{ti}dt \in A(I(C))$

และโดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า $g \in H(I(C))$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนวงกลม C

และ u เป็นผลบวกจำนวนจำกัดของฟังก์ชันฮาร์โมนิก g

ดังนั้น $u \in H(I(C))$

(2): จะแสดงว่า ถ้า f มีความต่อเนื่องบน C แล้ว $\lim_{z\to t} u(z) = f(t)$ ทุก $t \in C$

ให้ f มีความต่อเนื่องบน C และ $t_0 = r_0 e^{i\alpha} \in C$

โดยบทนิยาม 2.7 ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $0 < \delta < \pi$ ซึ่งถ้า $|\phi - \alpha| < \delta$ จะได้ว่า

$$|f(t) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ เมื่อ } t_0 = r_0 e^{i\alpha} \in C$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C

จะได้ว่า มี $M > 0$ ซึ่ง $|f(t) - f(t_0)| < M$ ทุก $t \in C$

พิจารณา $|u(z) - f(t_0)|$

จะเห็นว่า $|u(z) - f(t_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,t) f(t)d\phi - \frac{f(t_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,t)d\phi\right|$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right|$$

เนื่องจาก $\delta < \pi$ ดังนั้น $2\delta < 2\pi$ หรือ $\delta < 2\pi - \delta$ นั่นคือ $\alpha + \delta < \alpha - \delta + 2\pi$

$$\left| u(z) - f(t_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi + \int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right|$$

จะเห็นได้ว่า

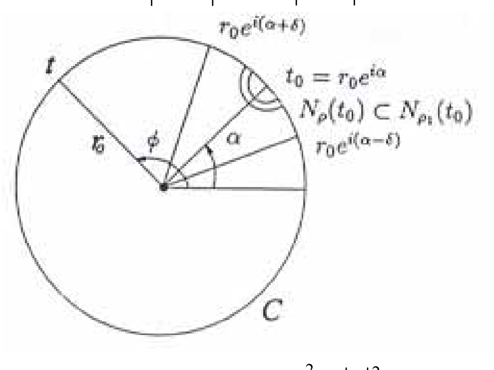
$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} K(z,t)\left[f(t) - f(t_0) \right] d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \left| K(z,t) \right| \left| f(t) - f(t_0) \right| d\phi$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \left| K(z,t) \right| \frac{\varepsilon}{2} d\phi$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} K(z,t) d\phi \right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} K(z,t) d\phi \right] = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก } z \in I(C)$$

โดยหมายเหตุ 3.19 (1) เราจะได้ว่า $K(z,t) = \dfrac{|t|^2 - |z|^2}{|t-z|^2} = \dfrac{r_0^2 - |z|^2}{|t-z|^2}$ (จากรูปที่3)



รูปที่ 3 : แสดง $K(z,t) = \dfrac{r_0^2 - |z|^2}{|t-z|^2}$

ดังนั้น จะมี $\rho_1 > 0$ และ $\eta > 0$ ซึ่ง $|t-z| > \eta$

สำหรับทุก $z \in N_{\rho_1}(t_0) \cap I(C)$ และสำหรับทุก $t = r_0 e^{i\phi}$

โดยที่ $\alpha + \delta \le \phi \le \alpha - \delta + 2\pi$

ให้ $0 < \rho \le \rho_1$ ซึ่ง $r_0^2 - |z|^2 < \dfrac{\eta^2 \varepsilon}{2M}$ ทุก $z \in N_\rho(t_0) \cap I(C)$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} K(z,t)\left[f(t)-f(t_0)\right]d\phi\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} \frac{r_0^2-|z|^2}{|t-z|^2}\left[f(t)-f(t_0)\right]d\phi\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} \left|\frac{r_0^2-|z|^2}{|t-z|^2}\right|\left|f(t)-f(t_0)\right|d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} \frac{r_0^2-|z|^2}{|t-z|^2}\left|f(t)-f(t_0)\right|d\phi \\
&< \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} \frac{\varepsilon}{2M}\left|f(t)-f(t_0)\right|d\phi \\
&= \frac{\varepsilon}{2M}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} \left|f(t)-f(t_0)\right|d\phi \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\alpha-\delta+2\pi} M\,d\phi \\
&< \frac{\varepsilon}{2M}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} M\,d\phi = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ทุก } z \in N_{\rho_1}(t_0) \cap I(C)
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $\left|u(z) - f(t_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ สำหรับ $z \in N_{\rho_1}(t_0) \cap I(C)$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.2:(Dirichlet's Problem for the Disk $N_{r_0}(a)$)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และมีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนวงกลม C_a ซึ่งกำหนดโดยสมการ $|\tau - a| = r_0$ เมื่อ $\tau = a + r_0 e^{i\phi}$; $\phi \in [0,2\pi]$ แล้วคำตอบของปัญหาดิริกเลต์ใน $I(C_a)$ คือ

$$
u(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} K(z-a, \tau-a)\, f(\tau)\, d\phi & \text{ถ้า } z \in I(C_a) \\ f(z) & \text{ถ้า } z \in C_a \end{cases}
$$

พิสูจน์: ให้ C เป็นวงกลม $|t| = r_0$ เมื่อ $t = r_0 e^{i\phi}$, $\phi \in [0,2\pi]$

และทุก $t \in C$ นิยาม $g(t) = f(t+a)$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C_a

ดังนั้นจะได้ว่า g มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C

โดย ทฤษฎีบท 4.1.1 คำตอบของปัญหาดิริกเลต์ ของ g บน $I(C)$ คือ

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,t)g(t)d\phi \qquad \text{สำหรับ } z \in I(C)$$

จะเห็นได้ว่า $v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,t)f(\tau)d\phi$ เมื่อ $\tau = a+t$

สำหรับ $z \in I(C_a)$

ให้ $$u(z) = v(z-a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z-a,t)f(\tau)d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z-a,\tau-a)f(\tau)d\phi$$

เนื่องจาก $v \in H(I(C))$

โดยบทนิยาม 3.1 จะได้ว่า $u \in H(I(C_a))$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.3: กำหนดให้ $u \in H(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน ให้ $a \in D$ และให้ C_a เป็นวงกลมนิยามโดยสมการ $|\tau - a| = r_0$ เมื่อ $\tau = a + r_0 e^{i\phi}$;$\phi \in [0,2\pi]$ และ $\overline{I(C_a)} \subset D$

แล้วสำหรับ $z \in I(C_a)$ จะได้ว่า

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z-a,\tau-a)u(\tau)d\phi \quad \text{เมื่อ} \quad \tau : a + r_0 e^{i\phi}$$

พิสูจน์: เนื่องจาก $u \in H(D)$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.17(2) ทำให้ได้ว่า $u \in C\left(\overline{I(C_a)}\right)$

โดย ทฤษฎีบท 4.1.2 จะได้ว่า คำตอบของปัญหาดิริกเลต์ของ u ใน $I(C_a)$ คือ

$$\nu(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} K(z-a, \tau-a)u(\tau)d\phi & \text{ถ้า } z \in I(C_a) \\ u(z) & \text{ถ้า } z \in C_a \end{cases}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.17(2) จะได้ว่า $\nu \in C\left(I(C_a)\right)$

และโดยบทแทรก 3.10 จะได้ว่า $u = \nu$ ใน $\overline{I(C_a)}$

ดังนั้นจะได้ว่า $u(z) = \nu(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} K(z-a, \tau-a)u(\tau)d\phi$ ทุก $z \in I(C_a)$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.4: กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง และมีความต่อเนื่องในโดเมน D แล้ว

$u \in H(D)$ ก็ต่อเมื่อ u สอดคล้องกับคุณสมบัติค่าเฉลี่ย ใน D

(นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a \in D$ จะมี $\rho > 0$ ซึ่ง $u(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$ สำหรับ $0 < r < \rho$)

พิสูจน์: $(\rightarrow)$ พิสูจน์แล้วใน ทฤษฎีบท 3.12

$(\leftarrow)$ ให้ u สอดคล้องกับคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน D และ $a \in D$ ดังนั้น

จะมี $\rho > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ทุก $0 < r_0 < \rho$ และ $\overline{I(C_a)} \subset D$

เมื่อ $C_a = \{z : |z-a| = r_0\}$

โดย ทฤษฎีบท 4.1.2 ให้ ν เป็นคำตอบของปัญหาดิริกเลต์ใน $I(C_a)$

ซึ่ง $\nu \in H\left(I(C_a)\right)$, $u \equiv \nu$ บน C_a และ $\nu \in C\left(\overline{I(C_a)}\right)$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.12 ได้ว่า ν สอดคล้องคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน $I(C_a)$

เนื่องจาก u สอดคล้องคุณสมบัติค่าเฉลี่ย ใน $I(C_a)$

ดังนั้น $u-v$ สอดคล้องคุณสมบัติค่าเฉลี่ยใน $I(C_a)$

โดย ทฤษฎีบท 3.14(2) จะได้ว่า $u-v$ มีค่าสูงสุด M และค่าต่ำสุด m บน C_a

เนื่องจาก $u \equiv v$ บน C_a เพราะฉะนั้น $u-v \equiv 0$ บน C_a

ทำให้ได้ว่า $0 = m \leq u-v \leq M = 0$ บน $I(C_a)$

นั่นคือ $u-v \equiv 0$ ทุกจุดใน $I(C_a)$

เพราะฉะนั้น $u \equiv v$ บน $I(C_a)$ นั่นคือ $u \in H(I(C_a))$

นั่นคือ แต่ละ $a \in D$ จะได้ว่า $u \in H(I(C_a))$

ดังนั้น $u \in H(D)$ ■

4.2 ปัญหาดิริกเลต์สำหรับครึ่งระนาบ(Dirichlet's Problem for a Half-Plane)

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงปัญหาดิริกเลต์บนอาณาบริเวณซึ่งอยู่เหนือแกนจริงบนระนาบเชิงซ้อน ก่อนอื่นเราจำเป็นต้องกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่สำคัญดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.1: กำหนดให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปรที่นิยามบน

$$S = \{ (x,y) : a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y < +\infty \}$$

และให้ $\int_c^\infty f(x,y)dy = g(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ แล้วเราจะได้ว่า $\int_c^\infty f(x,y)dy$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน** $[a,b]$ (converges uniformly to g on $[a,b]$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวน r ซึ่ง ถ้า $d \geq r$ แล้ว $\left| g(x) - \int_c^d f(x,y)dy \right| < \varepsilon$ และเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_c^\infty f(x,y)dy \xrightarrow{u[a,b]} g(x)$$

ทฤษฎีบท 4.2.2 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่ง $f \in C(S)$ และ $\int_c^\infty f(x,y)dy \xrightarrow{u[a,b]} g(x)$

เมื่อ $$S = \{ (x,y) : a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y < +\infty \}$$

แล้วจะได้ว่า

(1) g มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ

(2) $\int_a^b \left[\int_c^\infty f(x,y)dy \right] dx = \int_c^\infty \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$

พิสูจน์(1) : ให้ $x_0 \in [a,b]$ และ $\varepsilon > 0$ โดยบทนิยาม 4.2.1 ให้ $d \geq r > c$ ซึ่ง

$$\left| \int_d^\infty f(x,y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{บน } [a,b]$$

โดยทฤษฎีบท 2.11(1) จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบนเซตปิดที่มีขอบเขต

$$T = \{ (x,y) : a \leq x \leq b \text{ และ } c \leq y \leq d \}$$

ดังนั้น ให้ $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $(x,y),(t,y) \in T$ และ $|x-t| < \delta$ แล้ว

$$|f(x,y) - f(t,y)| < \frac{\varepsilon}{3(d-c)}$$

สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ ซึ่ง $|x - x_0| < \delta$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \left(g(x) - \int_c^d f(x,y)dy \right) + \left(\int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d f(x_0,y)dy \right) \right. \\ &\qquad \left. + \left(\int_c^d f(x_0,y)dy - g(x_0) \right) \right| \\ &\leq \left| g(x) - \int_c^d f(x,y)dy \right| + \left| \int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d f(x_0,y)dy \right| \\ &\qquad + \left| \int_c^d f(x_0,y)dy - g(x_0) \right| \end{aligned}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

ดังนั้น $g\in C([a,b])$

(2) : ให้ $\varepsilon>0$ โดยบทนิยาม 4.2.1 ให้ $r\in R$ ซึ่ง ถ้า $d\geq r$ แล้ว

$$\left|g(x)-\int_c^d f(x,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{บน } [a,b]$$

จะได้ว่า

$$\left|\int_a^b g(x)dx-\int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy\right|=\left|\int_a^b g(x)dx-\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b\left(g(x)-\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\right|$$

$$\leq\int_a^b\left|g(x)-\int_c^d f(x,y)dy\right|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon \qquad \text{สำหรับแต่ละ } d>r$$

นั่นคือ
$$\int_a^b g(x)dx=\int_c^\infty\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

โดยที่
$$g(x)=\int_c^\infty f(x,y)dy$$
■

ทฤษฎีบท 4.2.3 : ถ้า

(1) $f\in C(S)$ และ $f_x\in C(S)$ เมื่อ $S=\{(x,y):a\leq x\leq b \text{ และ } c\leq y<+\infty\}$

(2) $\int_c^\infty f(x,y)dy=g(x)$ บน $[a,b]$

(3) $\int_c^\infty f_x(x,y)dy\xrightarrow{u[a,b]}h(x)$

แล้วจะได้ว่า $g'(x)=h(x)$ บน $[a,b]$

พิสูจน์ :

$$\int_a^x h(t)dt = \int_a^x \left[\int_c^\infty f_t(t,y)dy \right] dt$$

$$= \int_c^\infty \left[\int_a^x f_t(t,y)dt \right] dy \qquad \text{โดยทฤษฎีบท 4.2.2 (2)}$$

$$= \int_c^\infty [f(x,y) - f(a,y)]dy$$

$$= \int_c^\infty f(x,y)dy - \int_c^\infty f(a,y)dy$$

$$= g(x) - g(a) \quad \text{บน } [a,b]$$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dx}\int_a^x h(t)dt = \frac{d}{dx}\big(g(x) - g(a)\big)$$

$$h(x) = g'(x) \qquad \text{บน } [a,b]$$

■

ทฤษฎีบท 4.2.4 : (1) เงื่อนไขโคชีสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Cauchy Condition for Improper Integrals)

กำหนดให้ $\int_c^d f(t)dt$ หาค่าได้ สำหรับแต่ละ $d > c$ แล้ว $\int_c^\infty f(t)dt$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวน $B > c$ ซึ่ง ถ้า $b > a > B$ แล้ว $\left|\int_a^b f(t)dt\right| < \varepsilon$ ....(*)

(2) การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ สำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ(Weierstrass M-Test for Improper Integrals)

กำหนดให้ $\int_c^r f(x,t)dt$ หาค่าได้ สำหรับแต่ละ $r \geq c$ และ สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$

ถ้า $|f(x,t)| \leq M(t)$ สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$, $t \in [c,+\infty)$ และ $\int_c^\infty M(t)dt$ หาค่าได้ แล้ว

$$\int_c^\infty f(x,t)dt \xrightarrow{u[a,b]} g(x) \qquad \text{เมื่อ } g(x) = \int_c^\infty f(x,t)dt$$

พิสูจน์(1) : $(\rightarrow)$ สมมติ $\int_c^\infty f(t)dt = L$ เมื่อ $L \in R$

ให้ $\varepsilon > 0$ และ $B > c$ ซึ่ง ถ้า $b > a > B$ แล้ว

$$\left|\int_c^a f(t)dt - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{และ} \quad \left|\int_c^b f(t)dt - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt\right|$$

$$= \left|\left(\int_c^b f(t)dt - L\right) + \left(L - \int_c^a f(t)dt\right)\right|$$

$$\le \left|\int_c^b f(t)dt - L\right| + \left|L - \int_c^a f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\leftarrow$) กำหนดให้ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวน $B > c$ ซึ่ง

$$\text{ถ้า } b > a > B \text{ แล้ว } \int_a^b f(t)dt < \varepsilon$$

ให้ $a_n = \int_c^n f(t)dt$ สำหรับ $n \in N$ ซึ่ง $n > c$

เนื่องจาก $\left|a_m - a_n\right| = \left|\int_c^m f(t)dt - \int_c^n f(t)dt\right| = \left|\int_n^m f(t)dt\right| < \varepsilon$ ถ้า $m, n > B$

ดังนั้น จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี

และโดยทฤษฎีบท 2.49 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ ....(**)

ให้ $\varepsilon > 0$ โดย (*) และ (**) ให้ $B > c$ ซึ่ง ถ้า $n > B$ และ $b > a > B$ แล้ว

$$\left|a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{และ} \quad \left|\int_a^b f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้น ถ้า $n > B$ และ $b > B$ แล้ว

$$\left|\int_c^b f(t)dt - A\right| = \left|\int_c^n f(t)dt - A + \int_n^b f(t)dt\right|$$

$$\le \left|a_n - A\right| + \left|\int_n^b f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

(2) : ให้ $\varepsilon > 0$ โดยที่ $\int_c^{\infty} M(t)dt$ หาค่าได้

โดยทฤษฎี 4.2.4(1) ให้ $B > c$ ซึ่ง

$$\left|\int_r^d M(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ถ้า} \quad d > r > B$$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ และ $d > r > B$

จะได้ว่า
$$\left|\int_r^d f(x,t)dt\right| \le \int_r^d |f(x,t)|dt \qquad \text{......}(***)$$

$$\le \int_r^d M(t)dt < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{โดยทฤษฎีบท 2.26(3)}$$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.4(1) สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ จะมี $g(x)$ ซึ่ง

$$g(x) = \int_c^{\infty} f(x,t)dt$$

จาก(***) เมื่อพิจารณา $d \to \infty$ จะได้ว่า $\left|\int_r^{\infty} f(x,t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก
$$\left|g(x) - \int_c^r f(x,t)dt\right| = \left|\int_r^{\infty} f(x,t)dt\right|$$

$$\le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{สำหรับ } x \in [a,b] \text{ และ } r > B$$

ดังนั้นโดยบทนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า $\int_c^{\infty} f(t)dt \xrightarrow{u[a,b]} g(x)$ ■

กำหนดให้ H แทนระนาบที่อยู่เหนือแกนจริง นั่นคือ $H = \{ z : I(z) \ge 0 \}$

ทฤษฎีบท 4.2.5 : สูตรอินทิกรัลของโคชีสำหรับครึ่งระนาบ (The Cauchy Integral Formula for the Half-Plane)

กำหนดให้ $f \in A(H)$ ซึ่ง $|z|^k |f(z)| < M$ บน H สำหรับบาง $k > 0$
ถ้า $z \in H^{o}$ แล้ว

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt$$

พิสูจน์ : ให้ $z = r_0 e^{i\theta}$ เมื่อ $r_0 > 0$

ให้ C_r เป็นวงกลม มีรัศมี $r > r_0$ ซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกานิยามโดย

$$C_r : \ t = re^{i\phi} \quad \text{สำหรับ } \phi \in [0,\pi]$$

โดยสูตรอินทิกรัลของโคชี จะได้ว่า

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t-z}dt + \int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt\right]$$

จาก

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt\right| &\le \int_0^{\pi} \left|\frac{f(t)}{t-z}\right|\left|rie^{i\phi}\right|d\phi \\
&< \int_0^{\pi} \frac{M}{r^k(|t|-|z|)}\left|rie^{i\phi}\right|d\phi \\
&= \frac{M}{r^k(r-|z|)}\int_0^{\pi} r d\phi \\
&= \frac{M}{r^k\left(1-\frac{|z|}{r}\right)}\int_0^{\pi} d\phi \\
&= \frac{M\pi}{r^k\left(1-\frac{|z|}{r}\right)} \to 0 \quad \text{ขณะที่ } r \to \infty
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt = 0$$

และเนื่องจาก $$2\pi i f(z) = \lim_{r\to\infty}\left[\int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t-z}dt + \int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt\right] \qquad \text{.............(*)}$$

และ $$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \text{หาค่าได้}$$

ทำให้ได้ว่า $$p\int_{C_r} \frac{f(t)}{t-z}dt \quad \text{หาค่าได้}$$

พิจารณา

ให้ $a > r_0$ แล้วสำหรับ $b > a$

$$\left|\int_a^b \frac{f(t)}{t-z}dt\right| \le M\int_a^b \frac{dt}{t^k(t-r_0)}$$

$$< M\int_a^b \frac{dt}{(t-r_0)^{k+1}}$$

$$= M\left[-\frac{1}{k(t-r_0)^k}\right]_a^b \to \frac{M}{k}\frac{1}{(a-r_0)^k} \text{ ขณะที่ } b \to \infty$$

ดังนั้น $\int_a^\infty \frac{f(t)}{t-z}dt$ หาค่าได้ ในทำนองเดียวกัน $\int_{-\infty}^{-a} \frac{f(t)}{t-z}dt$ หาค่าได้

และเนื่องจาก $\frac{f}{t-z}$ มีความต่อเนื่องบน $[-a,a]$ ดังนั้น $\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{t-z}dt$ หาค่าได้

ดังนั้นจะได้ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt = \int_{-\infty}^{-a} \frac{f(t)}{t-z}dt + \int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{t-z}dt + \int_{a}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt$ หาค่าได้

และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt = p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt$

ดังนั้น $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt$ ■

ทฤษฎีบท 4.2.6: ให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน H ซึ่ง

$$|z|^k |f(z)| < M \quad \text{บน } H \text{ สำหรับบาง } k > 0$$

แล้วสำหรับแต่ละ $z \in H^{\circ}$

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t,0)}{|t-x|^2}dt = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt \qquad \text{.......(**)}$$

และ $$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)v(t,0)}{|t-x|^2}dt$$

สมการ (**) เรียกว่า **สูตรอินทิกรัลของปัวส์ซองสำหรับครึ่งระนาบ**(Poisson's Integral Formula for Half-Plane)

พิสูจน์ : ให้ $z \in H^{\circ}$ แล้ว $\bar{z}$ อยู่ในระนาบใต้แกนจริง และ $\bar{z} \in E(S_r)$

โดยที่ $S_r = C_r \cup [-r,r]$

เมื่อ $C_r : t = re^{i\phi}$ และโดย Cauchy-Goursat Theorem

จะได้ว่า $$\int_{-r}^{r}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt+\int_{C_r}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt=0$$

จากการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ว่า $\int_{C_r}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt\to 0$ ขณะที่ $r\to\infty$

ดังนั้น $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt=0$$

เนื่องจาก $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

ทำให้ได้ว่า
$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\bar{z}}\right]f(t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{t-\bar{z}-t+z}{(t-z)(t-\bar{z})}\right]f(t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2yi}{|t-z|^2}\right]f(t)dt\end{aligned}$$

ดังนั้น $$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)}{|t-z|^2}dt$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)}{|t-z|^2}dt$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-\bar{z}}dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-\bar{z}}\right]f(t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{t-\bar{z}+t-z}{(t-z)(t-\bar{z})}\right]f(t)dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2(t-x)}{|t-z|^2}\right]f(t)dt\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$v(x,y)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-x)v(t,0)}{|t-z|^2}dt$$ ■

โดยทฤษฎีบท 4.2.6 เราจะได้ว่า $u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)}{|t-z|^2}dt$ เป็นคำตอบของปัญหาดิริกเลต์ เมื่อให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีความต่อเนื่อง และมีขอบเขตบนแกนจริง ซึ่งจะแสดงให้เห็นจริงดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2.7 : ปัญหาดิริกเลต์สำหรับครึ่งระนาบ (A Dirichlet's Problem for the Half-Plane)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีความต่อเนื่อง และมีขอบเขตบนแกนจริง

ถ้ากำหนดให้ $$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)}{|t-z|^2}dt$$

แล้วจะได้ว่า $$u\in H\left(H^{o}\right)$$

และ $$\lim_{y\to 0}u(x,y)=f(x) \quad \text{สำหรับแต่ละ } x\in\Re$$

พิสูจน์: ให้ $r>1$ และ $Q_r=\left\{(x,y):|x|<r \text{ และ } \frac{1}{r}<y<r\right\}$

สำหรับแต่ละ $z\in Q_r$

จะได้ว่า $$\nabla^2 u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^2\left(\frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}\right)dt \text{ [1]}$$

$$=0$$

เนื่องจาก $\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=I\left(\frac{1}{t-z}\right)^2$ และ $\frac{1}{t-z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน Q_r

ดังนั้น $u\in H(Q_r)$ สำหรับแต่ละ $r>1$

และทำให้ได้ว่า $u\in H\left(H^{o}\right)$

(ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\lim_{y\to 0}u(x,y)=f(x)$ สำหรับแต่ละ $x\in R$)

ให้ $\varepsilon>0$ และ $x\in R$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ x ให้ $\delta>0$ ซึ่ง

---

[1] แสดงใน Ex.9 ใน 9.4.8 ของหนังสืออ้างอิง [4]

[2] แสดงใน Ex.10 ใน 9.4.8 ของหนังสืออ้างอิง [4]

$$\text{ถ้า} \quad |t-x|<\delta \quad \text{แล้ว} \quad |f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

จาก
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt=\left[\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}=\pi$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} u(x,y)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y[f(t)-f(x)]}{(t-x)^2+y^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(I_1+I_2+I_3\right) \end{aligned}$$

เมื่อ
$$I_1=\int_{-\infty}^{x-\delta}Gdt\,,\ I_2=\int_{x-\delta}^{x+\delta}Gdt \ \text{ และ } \ I_3=\int_{x+\delta}^{\infty}Gdt \quad \text{โดยที่} \ G=\frac{y[f(t)-f(x)]}{(t-x)^2+y^2}$$

กำหนดให้ M เป็นขอบเขตบนของ $|f|$ บน R แล้วจะได้ว่า
$$|f(t)-f(x)|\le 2M \quad \text{สำหรับแต่ละ } t\in R$$

ดังนั้น
$$|I_1|\le 2My\int_{-\infty}^{x-\delta}\frac{dt}{(t-x)^2}=\frac{2My}{\delta}<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ถ้า } 0<y<\frac{\delta\varepsilon}{6M}$$

$$|I_3|\le 2My\int_{x+\delta}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2}=\frac{2My}{\delta}<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ถ้า } 0<y<\frac{\delta\varepsilon}{6M}$$

และ
$$\begin{aligned} |I_2| &\le \frac{\varepsilon}{3}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_{x-\delta}^{x+\delta} \\ &= \frac{2\varepsilon}{3}\tan^{-1}\frac{\delta}{y} \\ &< \frac{2\varepsilon}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\varepsilon}{3} \qquad \text{ถ้า } y>0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า
$$|u(x,y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \quad \text{ถ้า } 0<y<\frac{\delta\varepsilon}{6M}$$

นั่นคือ
$$\lim_{y\to 0}u(x,y)=f(x)$$
■

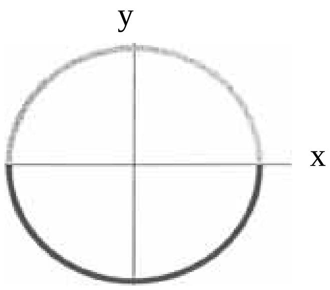
บทที่ 5
ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันฮาร์โมนิก
Applications of Harmonic Functions

จากที่กล่าวมาข้างต้นว่าการศึกษาฟังก์ชันฮาร์โมนิกมีประโยชน์มากในวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และฟิสิกส์ ดังนั้นเราจะจบสารนิพนธ์ฉบับนี้ด้วยการยกตัวอย่างการนำฟังก์ชันฮาร์โมนิกมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางฟิสิกส์ นั่นคือ ปัญหาการกระจายอุณหภูมิ

ปัญหาการกระจายอุณหภูมิ (Temperature Distribution Problem)

ปัญหาการกระจายอุณหภูมิ เป็นการศึกษาอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนแผ่นโลหะ(มีความบางมากๆ) โดยให้อุณหภูมิที่ขอบของแผ่นโลหะมีอุณหภูมิที่แตกต่างกัน ซึ่งจะอธิบายลักษณะของปัญหาโดยยกตัวอย่าง ดังนี้

พิจารณาแผ่นโลหะบาง ดังรูปที่ 1



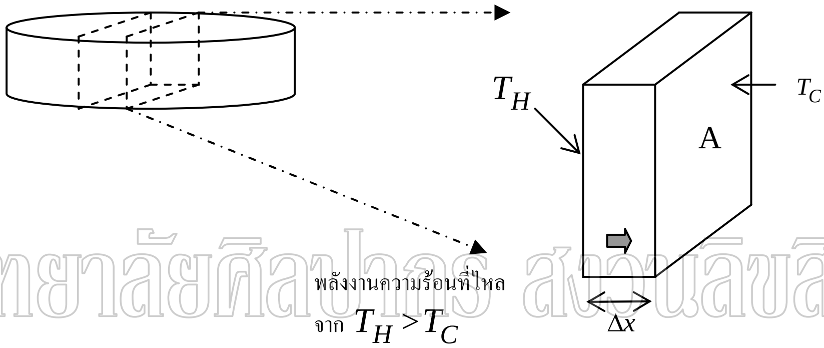
รูปที่ 1

ให้อุณหภูมิที่ขอบของแผ่นโลหะบริเวณเส้นทึบมีอุณหภูมิ $0^\circ C$ และบนเส้นบางมีอุณหภูมิ 100° C โดยที่บริเวณขอบของแผ่นโลหะมีสภาพเป็นฉนวนความร้อน นั่นคือ ไม่มีการถ่ายเทอุณหภูมิที่บริเวณขอบของแผ่นโลหะ แล้วเราจะสังเกตอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนแผ่นโลหะ ณ เวลาที่อุณหภูมิเข้าสู่สภาวะคงที่ นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไปอุณหภูมิจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงอีก เมื่อเรานำแผ่นโลหะนี้มาเทียบกับระบบพิกัดเชิงซ้อน โดยให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่กลางแผ่นโลหะ ดังนั้นในการหาอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนแผ่นโลหะนี้ ก็คือ การหาฟังก์ชันค่าจริงที่แสดงอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนระนาบเชิงซ้อนนั่นเอง

ต่อไปจะแสดงว่าฟังก์ชันที่เป็นคำตอบของปัญหาการกระจายอุณหภูมินี้เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ในการแสดงจำเป็นต้องใช้กฎทางฟิสิกส์ คือ กฎการนำความร้อน

พิจารณาโลหะทรงสี่เหลี่ยมที่ตัดมาจากโลหะนำความร้อน(ดังรูปที่ 2) ให้พื้นที่หน้าตัดด้านหนึ่งของรูปทรงสี่เหลี่ยมนี้มีอุณหภูมิ T_H และด้านตรงข้ามมีอุณหภูมิ T_C โดยที่ $T_H > T_C$ ดังนั้น อุณหภูมิจะถ่ายเทจากด้านที่มีอุณหภูมิ T_H ไปยังด้านที่มีอุณหภูมิ T_C

โดยกฎการนำความร้อน กล่าวว่า "การถ่ายพลังงานความร้อน(p) มีสัดส่วนโดยตรงกับพื้นที่หน้าตัด (A) และผลต่างของอุณหภูมิ (ΔT) และมีสัดส่วนผกผันกับความหนาของตัวนำความร้อน"



รูปที่ 2

ดังนั้นจะได้ว่า

$$p \;\alpha\; A\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

หรือ

$$p = cA\frac{dT}{dx}$$

โดยที่ c สภาพการนำความร้อนของตัวนำ

p เป็นการถ่ายพลังงานความร้อนมีหน่วยเป็นวัตต์

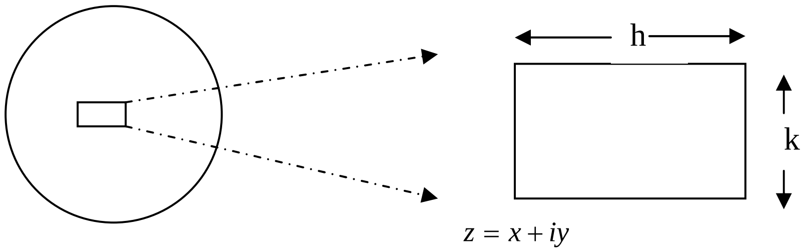
T คือ อุณหภูมิของตัวนำความร้อน

x คือ ตำแหน่งบนตัวนำความร้อน เมื่อเทียบกับระนาบ xy

A เป็นพื้นที่หน้าตัดของตัวนำความร้อน

$\frac{dT}{dx}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิกับตำแหน่ง

เนื่องจาก เราจะศึกษาบนแผ่นโลหะที่มีความบางมาก ๆ ดังนั้น ถ้าพิจารณาพื้นที่สี่เหลี่ยมขนาดเล็กที่ตัดมาจากแผ่นโลหะ(ดังรูปที่ 3) โดยมีความกว้าง k ยาว h และที่จุดล่างซ้ายของสี่เหลี่ยมคือจุด $z = x + iy$



รูปที่ 3

โดยกฎการนำความร้อนจะได้ว่า

การถ่ายพลังงานความร้อนออกจากพื้นที่สี่เหลี่ยมทางด้านซ้ายเท่ากับ $-ck\dfrac{\partial}{\partial x}T(x,y)$

การถ่ายพลังงานความร้อนออกจากพื้นที่สี่เหลี่ยมทางด้านขวาเท่ากับ $-ck\dfrac{\partial}{\partial x}T(x+h,y)$

ดังนั้น ผลต่างของการถ่ายพลังงานความร้อนออกในแนวแกน x คือ

$$-ck\left[\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x+h,y)\right]$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่าผลต่างของการถ่ายพลังงานความร้อนออกในแนวแกน y คือ

$$-ch\left[\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y+k)\right]$$

และเนื่องจากภายในสี่เหลี่ยมนี้ไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ภายใน จึงไม่มีการถ่ายพลังงานความร้อน ดังนั้น จะได้ว่า

$$-ck\left[\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x+h,y)\right] - ch\left[\frac{\partial}{\partial x}T(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y+k)\right] = 0$$

$$chk\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x+h,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{h} + \frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x,y+k) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{k}\right\} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x+h,y) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{h} + \frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x,y+k) - \frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{k} = 0$$

เมื่อพิจารณา h,k เข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x+h,y)-\frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{h}\right)+\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}T(x,y+k)-\frac{\partial}{\partial x}T(x,y)}{k}\right)=0$$

นั่นคือ

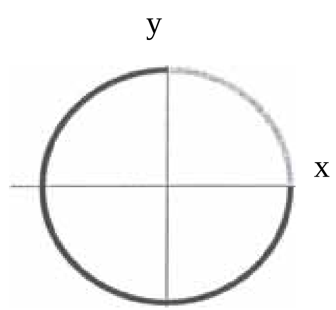
$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y}=0$$

ดังนั้น คำตอบของปัญหาการกระจายอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก

ตัวอย่าง 5.1 : กำหนดให้ C เป็นแผ่นโลหะวงกลมรัศมี r_0 และนิยาม f บน C ดังต่อไปนี้

$$f(e^{\phi})=\begin{cases}100 & \text{ถ้า}\ \phi\in(0\ ,\ \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{ถ้า}\ \phi\in(\frac{\pi}{2},2\pi)\end{cases}$$

จากรูปและการนิยาม f แสดงว่า อุณหภูมิที่บริเวณขอบหนามีอุณหภูมิ $0^{o}C$ และในบริเวณขอบบางมีอุณหภูมิ $100^{o}C$ จงหาฟังก์ชันที่แสดงอุณหภูมิที่จุดภายในวงกลมนี้ ณ สภาวะที่อุณหภูมิคงที่



วิธีทำ เนื่องจากปัญหาการกระจายความร้อนสอดคล้องกับปัญหาดิริกเลต์

โดยทฤษฎีบท 4.1.1 จะได้ว่า ฟังก์ชันที่แสดงอุณหภูมิที่จุดภายในวงกลมนี้ คือ

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}K(z,t)f(t)d\phi$$

แต่เนื่องจากการหาค่าอินทิกรัลจากสูตรข้างบนนี้ทำได้ยาก ดังนั้นเราจะทำการแปลงฟังก์ชันนี้ใหม่ ดังต่อไปนี้

สำหรับ $z \in I(C)$ จะได้ว่า

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} e^{in(\theta-\phi)} \right] f(t)d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{in(\theta-\phi)} \right] f(t)d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{-in(\theta-\phi)} \right] f(t)d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{in(\theta-\phi)} \right] f(t)d\phi$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_C f(t)e^{in\phi}d\phi \right] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_C f(t)e^{-in\phi}d\phi \right] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n} e^{in\theta}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{|n|} e^{in\theta} \qquad \text{เมื่อ } C_n = \frac{1}{2\pi}\int_S f(t)e^{-in\phi}d\phi$$

แล้วสัมประสิทธิ์ C_n เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ฟูเรีย(Fourier coefficent) พจน์ที่** n สำหรับ $f(r_0 e^{i\phi})$

ดังนั้นโดยใช้สูตรข้างต้น จะได้ว่า

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{|n|} e^{in\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 100 e^{-in\phi} d\phi$$

$$= -\frac{50}{\pi i n}\left[e^{-in\phi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{50}{\pi i n}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{100}{\pi i n} & \text{ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 0 & \text{ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่} \;\; , n \neq 0 \end{cases}$$

และ $$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 100\, d\phi = 25$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$u(z) = 25 - \frac{100}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|2k|}\frac{e^{i(2k)\theta}}{2k}$$

$$= 25 - \frac{100}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|2k|}\left(\frac{\cos(2k\theta) + i\sin(2k\theta)}{2k}\right)$$

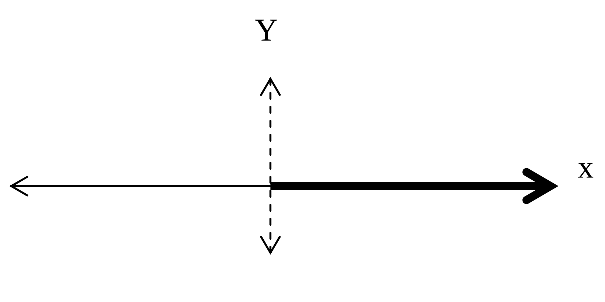
$$u(z) = 25 - \frac{200}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k}\left(\frac{\sin(2k\theta)}{2k}\right)$$

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันบน $I(C)$ ที่แสดงอุณหภูมิภายในวงกลม C ■

ตัวอย่าง 5.2 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนแกนจริง นิยามโดย

$$f(t,0) = \begin{cases} 80 & \text{ถ้า } t > 0 \\ 20 & \text{ถ้า } t < 0 \end{cases}$$

จากการนิยาม f แสดงว่า อุณหภูมิที่บริเวณขอบหนามีอุณหภูมิ $80^{\circ}C$ และในบริเวณขอบบางมีอุณหภูมิ $20^{\circ}C$ จงหาฟังก์ชันที่แสดงอุณหภูมิที่จุดภายในวงกลมนี้ ณ สภาวะที่อุณหภูมิคงที่



วิธีทำ

จากปัญหาของดิริกเลต์สำหรับครึ่งระนาบ

จะได้ว่า $$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$=\frac{y}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{f(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{f(t,0)}{(t-x)^2+y^2}dt\right]$$

$$=\frac{y}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{20}{(t-x)^2+y^2}dt+\int_{0}^{\infty}\frac{80}{(t-x)^2+y^2}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[20\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}+80\tan^{-1}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-20\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+20\frac{\pi}{2}+80\frac{\pi}{2}+80\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[100\frac{\pi}{2}+60\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$u(x,y)=50+\frac{60}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

ดังนั้น u เป็นฟังก์ชันที่แสดงอุณหภูมิบนครึ่งระนาบ ■

บรรณานุกรม

[1] Fisher, S.D., Complex Variables, Pacific Grove, Calif. : Wadsworth& Brook/Cole Advaced, 1990.

[2] Fridy, J.A., Introductory Analysis: The Theory of Calculus, Harcourt Vrace Jovanovich, 1987.

[3] Mcgehee, O.C., An Introduction To Complex Analysis, New York : John Wiley, 2000.

[4] Moore, T.O. and Hadlock, E.H., Complex Analysis, world Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, 1991.

[5] Serway, R.A. and Jewett, J.W.Jr., Principles of Physics A Calculus Based Text, Philadelphia, Pa. : Harcourt College, 2002.

บัญชีสัญลักษณ์

R	: เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
R^2	: เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด
I	: เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
$A \subset B$	: A เป็นสับเซตของ B
$f[S]$	: $\{ f(z) : z \in S \}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน
$N_\varepsilon(p)$	: $\left\{ x \in R^2 : \lvert x - p \rvert < \varepsilon \right\}$
$N'_\varepsilon(p)$	: $N_\varepsilon(p)$ แต่ไม่รวมจุด p
S^*	: เซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S
$\overline{S}$	: โคลเชอร์ของ S ซึ่งคือเซต $S \cup S^*$
S°	: เซตของจุดภายในทั้งหมดของ S
$B(S)$	: เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S
$\cup C$	: $\{ z :$ มี $A \in C$ ที่ทำให้ $z \in A \}$ เมื่อ C เป็นแฟมิลีเซตของสับเซตของ R^2
$f \in C(D)$	: ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบน D
$f \in PC[a,b]$	: ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$
$f \in UC(D)$	: ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน D
$f \in A(z_0)$	: ฟังก์ชัน f วิเคราะห์ได้ที่จุด z_0
$f \in A(S)$	: ฟังก์ชัน f วิเคราะห์ได้บน S
$f \in H(D)$	: f เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิกบน D
$I(C)$	: เซตของจุดภายในของ C เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย
$E(C)$	: $\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{I(C)}}$
∇^2	: ตัวดำเนินการลาปลาซ $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
$f(z) \equiv 0$ บน S	: $f(z) = 0$ ทุก $z \in S$
$f \equiv g$ บน S	: $f(z) = g(z)$ ทุก $z \in S$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นายประพล เปรมทองสุข
ที่อยู่	90/1 หมู่ 2 ตำบลดอนกำยาน อำเภอเมือง จังหวัดสุพรรณบุรี 72000
ที่ทำงาน	คณะวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตสารสนเทศเพชรบุรี ตำบลสามพระยา อำเภอชะอำ จังหวัดเพชรบุรี 76120

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2544	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
พ.ศ. 2545	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2547-ปัจจุบัน	ผู้ช่วยสอน คณะวิทยาการจัดการ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตสารสนเทศเพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี