อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

โดย

นางสาวณิธิมา แสงจักร์

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-11-6237-5

POWER SERIES OF COMPLEX NUMBERS

By

Nithima Sangjug

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974-11-6237-5

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง “อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน” เสนอโดย นางสาวณิชิมา แสงจักร์ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร. ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

………../……………/……….

K 46308302 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

คำสำคัญ : อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

ณิธิมา แสงจักร์ : อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน(POWER SERIES OF COMPLEX NUMBERS) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ.วารี เกรอต. 58 หน้า. ISBN 974-11-6237-5

เราได้ศึกษาเรื่องอนุกรมกำลังของจำนวนจริงมาแล้วในรายวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราจะศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีลักษณะเฉพาะที่น่าสนใจ กล่าวคือ ทุกอนุกรมกำลังจะมีวงกลมของการลู่เข้า และอนุกรมกำลังจะลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มภายในวงกลมของการลู่เข้า ผลที่ตามมาของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม คือ อนุกรมกำลังใด ๆ จะนิยามฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดซึ่งอยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า ซึ่งฟังก์ชันวิเคราะห์นี้สามารถถูกดิฟเฟอเรนชิเอตและอินทิเกรตได้ทีละเทอมภายในวงกลมของการลู่เข้า นอกจากนี้เราได้แสดงว่า ทุกฟังก์ชันวิเคราะห์จะสามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังได้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์..

K 46308302 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORD : POWER SERIES OF COMPLEX NUMBERS

NITHIMA SANGJUG : POWER SERIES OF COMPLEX NUMBERS : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 58 pp. ISBN 974-11-6237-5

We studied power series of real numbers in Mathematical Analysis course . In this project we will study the power series of complex numbers with interesting characteristic : namely every power series has a circle of convergence and the power series converges uniformly within its circle of convergence . As a consequence of uniform convergence we will show that power series define analytic functions that can be differentiated and integrated term by term within the circles of convergence . Moreover we show that every analytic function must possess a power series expansion .

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature ……………………………………………..………..……….

Master's Report Advisor's signature …………………………………..…………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์วารี เกรอต อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มและแก้ไขในจุดที่บกพร่องต่าง ๆ จนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จในวันนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนซับใหญ่วิทยาคม รวมทั้งคณะครูทุกท่านที่ให้โอกาสและเวลาในการเดินทางมาศึกษา

ขอบคุณนักศึกษาในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี และเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ ตลอดจนช่วยเป็นกำลังใจในการศึกษาและการทำสารนิพนธ์ฉบับนี้

สุดท้ายขอน้อมรำลึกถึงพระคุณบิดา มารดา นายชนะ แสงจักร์ และนางอำพร แสงจักร์ รวมถึงญาติพี่น้องทุกท่าน ที่ได้อบรมเลี้ยงดูและคอยสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้ได้

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

(INTRODUCTION)

เราได้ศึกษาเรื่องอนุกรมกำลังของจำนวนจริงมาแล้ว ในสารนิพนธ์ฉบับนี้เราจะกล่าวถึงอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งซับซ้อนกว่าอนุกรมกำลังของจำนวนจริงและมีลักษณะเฉพาะที่น่าสนใจ ทุกอนุกรมกำลังจะมีวงกลมของการลู่เข้า และอนุกรมกำลังจะลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มภายในวงกลมของการลู่เข้า ผลที่ตามมาของการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม คือ

1. อนุกรมกำลังใด ๆ จะนิยามฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดซึ่งอยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า
2. ฟังก์ชันวิเคราะห์ในข้อ 1. จะมีอนุพันธ์ทุกอันดับภายในวงกลมของการลู่เข้า

นอกจากนี้เราได้ศึกษาว่า ทุกฟังก์ชันวิเคราะห์จะสามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังได้ ซึ่งจะเรียกอนุกรมกำลังนี้ ว่า อนุกรมเทย์เลอร์

เริ่มต้นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานของลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม ศึกษาระบบจำนวนเชิงซ้อนและโทโพโลยีเบื้องต้นใน R^2 เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาเรื่องอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน และอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

ต่อมาจะศึกษาลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน รวมทั้งการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน และศึกษาทฤษฎีบทที่ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

สุดท้ายเราศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อนและวงกลมของการลู่เข้า โดยได้ผลสรุปเกี่ยวกับวงกลมของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังดังนี้

1. อนุกรมกำลังลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับทุกจุดซึ่งอยู่บนหรืออยู่ภายในวงกลมที่อยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า
2. อนุกรมกำลังลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f ซึ่งมีความต่อเนื่องที่ทุกจุดภายในวงกลมของการลู่เข้า
3. อนุกรมกำลังที่ได้จากการอินทิเกรตอนุกรมกำลังในข้อ 2.ทีละเทอม จะลู่เข้าสู่อินทิกรัลของฟังก์ชัน f ภายในวงกลมของการลู่เข้า
4. อนุกรมกำลังที่ได้จากการดิฟเฟอเรนชิเอตอนุกรมกำลังในข้อ 2. ทีละเทอม จะลู่เข้าสู่อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ภายในวงกลมของการลู่เข้า

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาในแต่ละบทมีรายละเอียดดังนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาเรื่องอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

บทที่ 3 : ศึกษาอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน โดยจะเริ่มศึกษาตั้งแต่ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนและการลู่เข้า พร้อมทั้งศึกษาทฤษฎีบทที่ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

บทที่ 4 : ศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน โดยจะศึกษาวงกลมของการลู่เข้าและการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอนุกรมกำลัง

บทที่ 5 : ศึกษาอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งคือการกระจายเป็นอนุกรมกำลังของฟังก์ชันวิเคราะห์

บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
(FUNDAMENTAL THEOREMS)

ในบทนี้เราจะศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เป็นพื้นฐานในการศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งประกอบไปด้วย ลำดับ อนุกรมของจำนวนจริงและการทดสอบการลู่เข้า ระบบจำนวนเชิงซ้อนและโทโพโลยีเบื้องต้นใน R^2 โดยจะละการพิสูจน์

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้จะแทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดด้วย R และ I^+ ตามลำดับ และสัญลักษณ์ $A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1 : ลำดับของจำนวนจริง (sequences of real numbers) คือฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็น I^+ และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ R

ถ้า f เป็นลำดับของจำนวนจริง แล้วเราจะแสดงถึงลำดับของจำนวนจริงโดย $\{x_n\}$ หรือโดย $x_1, x_2, x_3, \ldots$ เมื่อ $x_n = f(n)$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และเรียก x_n ว่า **เทอมที่ n (n^th term)** ของ $\{x_n\}$

ในบทนี้ เมื่อกล่าวถึงลำดับ จะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.2 : เราจะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้าสู่จำนวนจริง** L **(converges to** L**)** ถ้าแต่ละจำนวนจริงบวก ε มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|x_n - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

จะใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ หรือ $x_n \to L$ เพื่อแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และเรียก L ว่า**ลิมิต (limit)** ของ $\{x_n\}$

บทนิยาม 2.3 : เราจะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** ถ้ามี $L \in R$ ซึ่ง $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L ถ้าไม่เป็นเช่นนี้ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ทฤษฎีบท 2.4 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ มีลิมิตเพียงค่าเดียว

บทนิยาม 2.5 : เราจะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ **มีขอบเขต(bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|x_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

บทนิยาม 2.6 : เราจะกล่าวว่าจำนวนจริง u เป็น**ขอบเขตบน (upper bound)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $x_n \le u$ สำหรับทุก $n \in I^+$

บทนิยาม 2.7 : เราจะกล่าวว่าจำนวนจริง l เป็น**ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $x_n \ge l$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ข้อสังเกต 2.8 : ลำดับที่มีขอบเขตจะมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ทฤษฎีบท 2.9 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ มีขอบเขต

ข้อสังเกต 2.10 : ลำดับที่ไม่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่ออก

บทนิยาม 2.11 : เรากล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่

(1) **เพิ่มขึ้น(increasing)** ถ้า $x_{n+1} \ge x_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

(2) **ลดลง (decreasing)** ถ้า $x_{n+1} \le x_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

เรียกลำดับที่เป็นลำดับเพิ่มขึ้นหรือเป็นลำดับลดลงว่า **ลำดับโมโนโทน (monotone sequence)**

ทฤษฎีบท 2.12 : ลำดับมีขอบเขตที่เป็นลำดับโมโนโทนจะเป็นลำดับลู่เข้า

บทแทรก 2.13 : ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและ $x_{n+1} \ge x_n$ สำหรับทุก $n \ge N_1$ หรือ $x_{n+1} \le x_n$ สำหรับทุก $n \ge N_2$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 2.14 : กำหนดให้ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยาม**ผลบวก(sum)** และ **ผลคูณ(product)** ของ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ว่าคือลำดับ $\{x_n + y_n\}$ และลำดับ $\{x_n y_n\}$ ตามลำดับ

ในกรณีที่ $y_n \neq 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$ นิยาม**ผลหาร(quotient)** ของ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ว่าคือลำดับ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$

ทฤษฎีบท 2.15 : ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ $x \in R$ และลำดับ $\{y_n\}$ ลู่เข้าสู่ $y \in R$ แล้วได้ว่า

(1) ลำดับ $\{ax_n\}$ ลู่เข้าสู่ ax สำหรับทุก $a \in R$

(2) ลำดับ $\{x_n + y_n\}$ ลู่เข้าสู่ $x + y$

(3) ลำดับ $\{x_n \cdot y_n\}$ ลู่เข้าสู่ $x \cdot y$

(4) ถ้า $y_n \neq 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{x}{y}$

ทฤษฎีบท 2.16 : The Squeezing Theorem

ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \leq c_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ $L \in R$ แล้วลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

ทฤษฎีบท 2.17 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ

ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|x_n - x_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $m \geq N$

บทนิยาม 2.18 : ให้ I เป็นช่วงเปิด และ $a \in I$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามค่าที่ทุกจุดใน I และอาจยกเว้นที่จุด a เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ a (limit of f at a)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.19 : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา (limit of f as x approaches a from the right)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $0 < x - a < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.20 : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ b ทางซ้าย (limit of f as x approaches b from the left)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$ ถ้า $-\delta<x-b<0$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.21 : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามค่าบนช่วง $(a,+\infty)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $+\infty$ (limit of f at $+\infty$)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง M ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$ เมื่อ $x>M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.22 : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามค่าบนช่วง $(-\infty,b)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $-\infty$ (limit of f at $-\infty$)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง M ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$ เมื่อ $x<M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

ทฤษฎีบท 2.23 : กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามค่าบน $[b,\infty)$ ซึ่ง $f(n)=x_n$ สำหรับทุก $n\in I^+$ เมื่อ $n\geq b$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L$

บทนิยาม 2.24 : ให้ $D\subset R$ และ $f:D\to R$ เราจะกล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่ a (continuous at a)** เมื่อ $a\in D$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

ข้อสังเกต 2.25 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่ a (continuous at a) เมื่อ $a \in D$ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะ มี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ถ้า $0 \leq |x - a| < \delta$

บทนิยาม 2.26 : ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วงเปิด** (a,b) **(continuous on** (a,b)**)** ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆจุดในช่วง (a,b)

บทนิยาม 2.27 : ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วงปิด** $[a,b]$ **(continuous on** $[a,b]$**)** ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

บทนิยาม 2.28 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่า f **ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม (uniformly continuous)**ใน D ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะ มี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ เมื่อ $x_1, x_2 \in D$ และ $|x_1 - x_2| < \delta$

บทนิยาม 2.29 : ให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ และ $a \in I$ เราจะกล่าวว่า $f : I \to R$ **หาอนุพันธ์ได้ที่** a **(differentiable at** a **)** ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ หาค่าได้

ค่าลิมิตตามบทนิยามข้างบนเรียกว่า**อนุพันธ์ของ** f **ที่** a **(derivative of** f **at** a **)** และเขียนแทนโดย $f'(a)$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน I เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)** บน I

ทฤษฎีบท 2.30 : ให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ และ $a \in I$ ถ้า $f : I \to R$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a แล้ว f ต่อเนื่องที่ a

ทฤษฎีบท 2.31 : กฎของโลปิตาล (L' Hopital ' s Rule)

สมมติ f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า

$x \in (a,b)$ ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ ซึ่ง $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ และ $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ แล้ว $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ข้อสังเกต 2.32 : (1) กฎของโลปิตาลยังใช้ได้เมื่อ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

(2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณีที่ $x \to \pm\infty$ หรือ $x \to a^+$ หรือ $x \to b^-$

บทนิยาม 2.33 : ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a < b$ ถ้า $n \in I^+$ และเมื่อ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ แล้วจะเรียก $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ว่า**พาร์ทิชัน (partition)** ของช่วงปิด $[a,b]$

บทนิยาม 2.34 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของช่วง $[a,b]$ ให้ $m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$ และ $M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$ เราเรียก $L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ ว่า**ผลบวกล่างของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P (lower sum of f relative to partition P)** และเรียก $U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ ว่า**ผลบวกบนของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P (upper sum of f relative to partition P)**

บทนิยาม 2.35 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนบนช่วง $[a,b]$ ถ้า

$$\sup_P \{L(P,f)\} = \inf_P \{U(P,f)\}$$

เราเรียกค่าที่ได้นี้ว่า **อินทิกรัลของ f (integral of f)** บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b f(x)dx$ และกล่าวว่า f **อินทิเกรตได้ (integrable)** บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.36 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,x]$ เมื่อ $x \in [a,b]$

ทฤษฎีบท 2.37 : ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.38 : ถ้า f มีขอบเขตและต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วงปิด $[a,b]$ และอาจยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.39 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $|f|$ อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

บทนิยาม 2.40 : กำหนดให้ $\phi \neq D \subset R$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $f_n : D \to R$ เราจะกล่าวว่า $\{f_n\}$ เป็น**ลำดับของฟังก์ชันบน D (sequence of functions on D)**

บทนิยาม 2.41 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน D และ $f : D \to R$ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D (converges uniformly to f on D)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in D$ และทุก $n \ge N$

เราเรียกฟังก์ชัน f ว่า**ลิมิตยูนิฟอร์ม (uniform limit)**ของลำดับ $\{f_n\}$ และกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม(uniformly convergent sequence)**

ทฤษฎีบท 2.42 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน D ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

ข้อสังเกต 2.43: บทกลับของทฤษฎีบท 2.42 ไม่จริง

ทฤษฎีบท 2.44 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $f : [a,b] \to R$ ถ้าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n\right] = \int_a^b f$

ข้อสังเกต 2.45 : บทกลับของทฤษฎีบท 2.44 ไม่จริง

บทนิยาม 2.46 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ เราจะเรียก $\{S_n\}$ ว่า**อนุกรมของจำนวนจริง (series of real numbers)** ซึ่งมีเทอมที่ n คือ a_n และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เราเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่ n (n^th partial sum)** ของอนุกรม

ในบทนี้เมื่อกล่าวถึงอนุกรม จะหมายถึงอนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.47 : เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าสู่** S **(converges to** S**)** ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ S เราเรียก S ว่า**ผลบวก(sum)**ของอนุกรม และเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

และจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้า (convergent series)**

ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกแล้ว เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่ออก (divergent series)**

ทฤษฎีบท 2.48 : ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ทฤษฎีบท 2.49 : อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)

อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ลู่เข้าเมื่อ $|r| < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ทฤษฎีบท 2.50 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนบวก M ซึ่ง $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ทฤษฎีบท 2.51 : อนุกรมฮาร์โมนิค (Harmonic series)

อนุกรมฮาร์โมนิค $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.52 : ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n) = A\sum_{n=1}^{\infty}a_n + B\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

ทฤษฎีบท 2.53 : การทดสอบเปรียบเทียบ (The Comparison Test)

ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $0 \le a_n \le b_n$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

(1) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.54 : การทดสอบพี (The p –Test)

สำหรับจำนวนจริง p อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $p > 1$

ทฤษฎีบท 2.55 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของอนุกรม (The Cauchy Convergence Criterion for Series)

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \ge N$ และทุก $k \in I^+$

บทนิยาม 2.56 : เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม**ลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent)** ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.57 : ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.58 : การทดสอบอัตราส่วนสำหรับอนุกรม (The Ratio Test for Series)

สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สมมติ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

(1) ถ้า $L<1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์

(2) ถ้า $L>1$ หรือ $L=+\infty$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทนิยาม 2.59 : เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditionally convergent)** เมื่ออนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทนิยาม 2.60 : อนุกรมกำลัง (power sereis) ของจำนวนจริง คืออนุกรมในรูป

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

เมื่อ $x\in R$ และ $a_n\in R$ สำหรับทุก $n\in I^+$

เราจะเขียนแทนอนุกรมกำลังข้างบนโดย $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

ทฤษฎีบท 2.61 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x=x_0\neq 0$ แล้วอนุกรมนี้จะลู่เข้าสัมบูรณ์ทุก x ซึ่ง $|x|<|x_0|$

ข้อสังเกต 2.62 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ ลู่ออกเมื่อ $x=x_1$ แล้วอนุกรมนี้จะลู่ออกทุก x ซึ่ง $|x|>|x_1|$

ข้อสังเกต 2.63 : สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ ใด ๆ จะเกิดสิ่งต่อไปนี้เพียงอย่างหนึ่งอย่างเดียว

(1) อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เฉพาะที่ $x=0$ เท่านั้น

(2) มีจำนวนจริงบวก R ซึ่งอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ เมื่อ $|x|<R$ และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|x|>R$

(3) อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ทุก x

บทนิยาม 2.64 : เรียก R จากข้อสังเกต 2.63 ข้อ (2) ว่า**รัศมีของการลู่เข้า (radius of convergence)** ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ และเรียกช่วง $(-R,R)$ ว่า**ช่วงของการลู่เข้า(interval of convergence)**

ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

เราจะกล่าวว่า $R=0$ ถ้าข้อสังเกต 2.63 ข้อ (1) เป็นจริง และกล่าวว่า $R=+\infty$ ถ้าข้อสังเกต 2.63 ข้อ (3) เป็นจริง

ข้อสังเกต 2.65 : สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ใดๆ จะเกิดสิ่งต่อไปนี้เพียงอย่างหนึ่งอย่างเดียว

(1) อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เฉพาะที่ $x=c$ เท่านั้น

(2) มีจำนวนจริงบวก R ซึ่งอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ เมื่อ $|x-c|<R$ และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|x-c|>R$

(3) อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ทุก x

เรียก R ว่า **รัศมีของการลู่เข้า (radius of convergence)**ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ และเรียกช่วง $(c-R, c+R)$ ว่า**ช่วงของการลู่เข้า (interval of convergence)**ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

ข้อสังเกต 2.66 : ถ้า R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ แล้วสำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ R จะเป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ด้วย

บทกลับของข้อสังเกตเป็นจริง

ทฤษฎีบท 2.67 : ถ้า R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ แล้วอนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ ทุก x ซึ่ง $|x|<R$

ทฤษฎีบท 2.68 : ถ้า R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ แล้ว $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกจุด x ซึ่ง $|x|<R$

ทฤษฎีบท 2.69 : ให้ R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ ถ้า $|\alpha| < R$ และ $|\beta| < R$ แล้ว $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}$

ข้อสังเกต 2.70 : ให้ R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ แล้ว

$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $|x| < R$

ทฤษฎีบท 2.71 : ถ้า R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ แล้ว

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ เมื่อ $|x| < R$

บทนิยาม 2.72 : ระบบจำนวนเชิงซ้อน (complex number system) คือ ระบบ $(R^2 ;+, . , |\,|)$ โดยที่ ถ้า $z = (x,y)$ และ $w = (u,v)$ เป็นสมาชิกของ R^2

$z + w = (x+u, y+v)$

$zw = z \cdot w = (xu - yv, xv + yu)$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

เรียกสมาชิกของ R^2 ว่า **จำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)** และเรียก $|z|$ ว่า **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของ z ถ้า $z = (x,y)$ จะเรียก x ว่า **ส่วนจริง(real part)** ของ z เขียนแทนโดย $x = R(z)$ และเรียก y ว่า**ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ z เขียนแทนโดย $y = I(z)$

ทฤษฎีบท 2.73 : $(R^2 ;+, .)$ **เป็นฟิลด์** นั่นคือ $(R^2 ;+, . , |\,|)$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ

$(a,b),(c,d) \in R^2 \Rightarrow (a,b)+(c,d) \in R^2$ และ $(a,b)\cdot(c,d) \in R^2$

(2) กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

(2.1) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

(2.2) $[(a,b)(c,d)](e,f) = (a,b)[(c,d)(e,f)]$

สำหรับทุก $(a,b),(c,d),(e,f)\in R^2$

(3) กฎการสลับที่

(3.1) $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

(3.2) $(a,b)(c,d)=(c,d)(a,b)$

สำหรับทุก $(a,b),(c,d)\in R^2$

(4) กฎการแจกแจง

$(a,b)[(c,d)+(e,f)]=(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)$

สำหรับทุก $(a,b),(c,d),(e,f)\in R^2$

(5) การมีเอกลักษณ์

(5.1) $(0,0)+(a,b)=(a,b)$

(5.2) $(1,0)(a,b)=(a,b)$

สำหรับทุก $(a,b)\in R^2$ นั่นคือ $(0,0)$ และ $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกและเอกลักษณ์สำหรับการคูณของ R^2 ตามลำดับ

(6) การมีอินเวอร์ส

(6.1) $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$ ทุก $(a,b)\in R^2$

และเมื่อกำหนด (a,b) มาให้ $(-a,-b)$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้องกับ (6.1) นั่นคือ $(-a,-b)$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ (a,b)

(6.2) $(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)$ ทุก $(a,b)\in R^2$

และเมื่อกำหนด $(a,b)\neq(0,0)$ มาให้ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้องกับ (6.2)

นั่นคือ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณของ (a,b)

ทฤษฎีบท 2.74 : ให้ $F=\{(a,0): a\in R\}$ เราจะได้ว่า

(1) F เป็นสับฟิลด์(subfield)ของ R^2

(2) F และ R เป็นฟิลด์ถอดแบบกัน(isomorphic field)

ดังนั้นเราสามารถแทน (identify)สมาชิก $(a,0)$ ของ F ด้วย a ใน R ได้ เนื่องจากทุกจำนวนเชิงซ้อน (a,b) เราสามารถเขียน

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)$$

และถ้าเราแทน $(0,1)$ ด้วย i เรียกว่า หน่วยจินตภาพ (imaginary unit) จะได้ว่าเราสามารถเขียน

(a,b) ให้อยู่ในรูป $a+bi$ หรือ $a+ib$ ต่อไปนี้เราจะเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ ในรูปดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่าเมื่อ $z_1=a+bi$ และ $z_2=c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน แล้วเราได้

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c, b=d$$

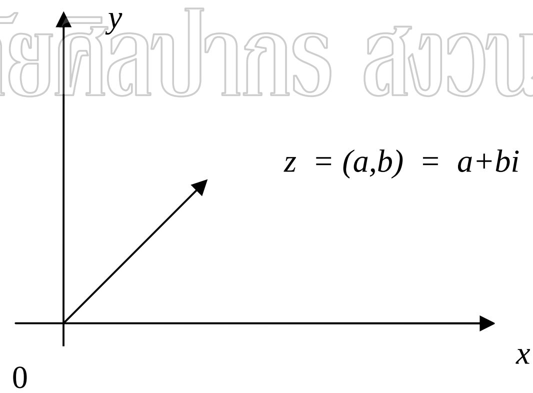
การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปใหม่จะเป็นดังนี้

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

ให้สังเกตว่าทุกจำนวนจริง a เมื่อเราแทน a ด้วย $(a,0)$ ใน F แล้ว a จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+0i$ นั่นคือระบบจำนวนเชิงซ้อนจะรวมระบบจำนวนจริง นอกจากนี้เราจะได้ว่า $i^2=-1$ เป็นรากของสมการ $x^2+1=0$

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนเป็นจุดบนระนาบ ดังนั้นในทางเรขาคณิตเราสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน $z=x+yi$ ใดๆ ด้วยเวกเตอร์ในระนาบและเรียกการแทนนี้ว่า**การแทนด้วยเวกเตอร์ (vector representation)** ดังรูป



รูปที่ 1

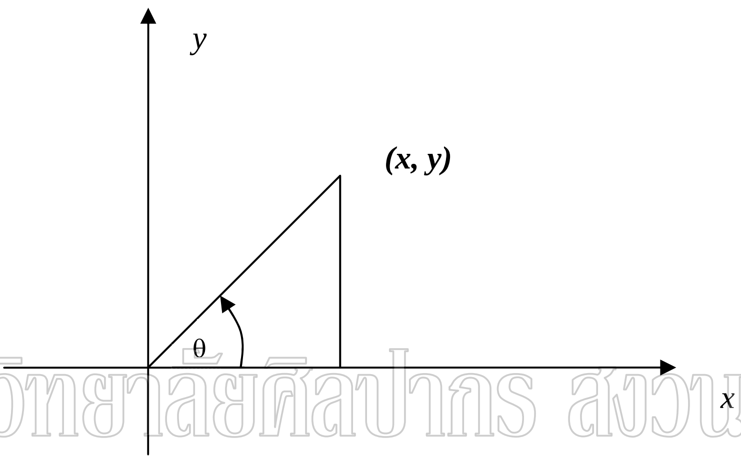
เราจะเรียกแกน x ว่า**แกนจริง(real axis)** เรียกแกน y ว่า **แกนจินตภาพ (imaginary axis)** และจะเรียกระนาบนี้ว่า**ระนาบเชิงซ้อน(complex plane)**ซึ่งอาจจะเขียนแทนได้ด้วย**ระนาบ Z (Z-plane)**

ถ้า $z=x+iy$ และ $w=u+iv$ แล้ว $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ มีค่าเท่ากับระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด z บนระนาบเชิงซ้อน และ $|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$ มีค่าเท่ากับระยะทางระหว่างจุด z และจุด w

บทนิยาม 2.75 : ถ้า $z=(x,y)\in R^2$ แล้วเรียก $(x,-y)$ ว่า**สังยุคของ** z **(complex conjugate of** z**)** เขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\bar{z}$

รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน (Polar Forms of Complex Numbers)

ให้ $z=(x,y)=x+yi$ เป็นจุดบนระนาบเชิงซ้อน เมื่อเวกเตอร์ z ทำมุม θ กับแกน x ในทิศทางบวกดังรูป



รูปที่ 2

ดังนั้น $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ และ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$
ทำให้ $z=x+iy = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$ นั่นคือ

$$z= r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \textbf{\textit{(2.1)}}$$

เราเรียกการเขียนในรูป ***(2.1)*** ว่า**รูปเชิงขั้ว(polar form)**ของ z และเรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์ (argument)** ของ z เขียนแทนโดย $arg\ z$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z ไม่ได้มีเพียงค่าเดียว กล่าวคือ ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z แล้ว $\theta+2k\pi$ ก็เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

ในบางกรณีเราอาจใช้สัญลักษณ์ $r\,cis\,\theta$ เขียนแทน z ในรูป ***(2.1)***

บทนิยาม 2.76 : ให้ $z\in R^2, z\neq 0$ และ $n\in I^+$ แล้ว นิยาม $z^0=1$ และ $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$

เมื่อ $z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n\text{ ครั้ง}}$

ทฤษฎีบท 2.77 : ทฤษฎีบทของเดอร์มัวฟวร์ (De Moivre ' s Theoerem)

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ เราได้ว่า

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ทฤษฎีบท 2.78 : ถ้า $w = rcis\theta$ และ $n \in N$ แล้วสมการ $z^n = w$ มีคำตอบทั้งหมด n ค่า คือ $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ เมื่อ $z_k = \sqrt[n]{r}\ cis(\frac{\theta + 2k\pi}{n})\ ; k = 0,1,2,\ldots,n\text{-}1$

เราเรียก $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ ว่า**รากที่ n ของ w** นั่นคือรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n ค่า

ทฤษฎีบท 2.79 : ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

(1) $|z| \geq |R(z)| \geq R(z)$ และ

(2) $|z| \geq |I(z)| \geq I(z)$

ทฤษฎีบท 2.80 : อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequalities)

ถ้า z, p, w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

(1) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(2) $|z - w| \leq |z - p| + |p - w|$

(3) $|z - w| \geq |z| - |w|$

บทนิยาม 2.81 : ให้ $p \in R^2$ และจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ นิยาม **อาณาเขตของ p (neighborhood of p)** ในรัศมี ε เขียนแทนโดย $N(p,\varepsilon)$ ดังนี้

$$N(p,\varepsilon) = \{z : |z - p| < \varepsilon\}$$

เห็นได้ชัดว่า p เป็นสมาชิกของทุกอาณาเขตของ p

อาณาเขตของ p ที่ไม่มีจุด p เขียนแทนโดย $N'_\varepsilon(p)$ หรือ $N'(p,\varepsilon)$ นั่นคือ $N'(p,\varepsilon) = \{z : 0 < |z - p| < \varepsilon\}$

บทนิยาม 2.82 : กำหนดให้ $S \subset R^2$ และให้ $p \in R^2$

(1) จุด p เป็น**จุดลิมิตของ** S **(limit point of** S **)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N'_{\varepsilon}(p)$ จะมีจุดใน S อย่างน้อย 1 จุด นั่นคือ

p เป็นจุดลิมิตของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $S \cap N'_{\varepsilon}(p) \neq \phi$

(2) ให้ S^* แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S เราจะเรียกเซต $S \cup S^*$ ว่า**โคลเชอร์ของ** S **(closure of** S **)** เขียนแทนด้วย $\overline{S}$

(3) เซต S เป็น**เซตปิด (closed set)** ก็ต่อเมื่อ $S^* \subset S$ นั่นคือ แต่ละจุดลิมิตของ S อยู่ใน S

(4) จุด p เป็น**จุดภายในของ** S **(interior point of** S **)** ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่ง $N_r(p) \subset S$ และจะเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ S ด้วย S°

(5) เซต S เป็น**เซตเปิด (open set)** ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิก p ใน S เป็นจุดภายในของ S

(6) จุด p เรียกว่า**จุดขอบของ** S **(boundary point of** S **)** ก็ต่อเมื่อ $N_{\varepsilon}(p)$ มีสมาชิกของ S และสมาชิกของ $R^2 - S$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

(7) เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S เรียกว่า**ขอบของ** S **(boundary of** S **)** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(S)$

บทนิยาม 2.83 : ให้ E, A และ B เป็นสับเซตของ R^2

(1) (A,B) เป็น **separation** ของ E ก็ต่อเมื่อ $A \neq \phi, B \neq \phi, E = A \cup B$ และ $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$

(2) E เป็น**เซตเชื่อมโยง (connected set)** ถ้า E ไม่มี separation

ทฤษฎีบท 2.84 : ให้ $E \subset R^2$ ถ้าทุกคู่ของสมาชิกใน E สามารถเชื่อมด้วยลำดับจำกัดของส่วนของเส้นตรงที่อยู่ภายใน E แล้ว E เป็นเซตเชื่อมโยง

บทนิยาม 2.85 : ให้ $S \subset R^2$ และ $p \in R^2$

(1) S เป็น**โดเมน (Domain)** ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตเปิดที่เป็นเซตเชื่อมโยง และไม่เป็นเซตว่าง

(2) **บริเวณ (region)** ใน R^2 คือ ยูเนียนของโดเมน D กับสับเซตของ $B(D)$

บทนิยาม 2.86 : ให้ $D \subset R^2$ เราจะเรียก $f : D \to R^2$ ว่า**ฟังก์ชันเชิงซ้อนบน** D **(complex function on** D **)**

สำหรับแต่ละ $z = (x, y) \in D$ จำนวนเชิงซ้อน $f(z)$ มีส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $R(f(z)) = u(x, y)$ และ $I(f(z)) = v(x, y)$ ดังนั้น $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

บทนิยาม 2.87 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D

ให้ $z_0 \in D^*$ และ $w_0 \in R^2$ แล้วจะเรียก w_0 ว่า**ลิมิตของ** $f(z)$ **เมื่อ** z **เข้าใกล้** z_0 **(limit of** $f(z)$ **as** z **approaches** z_0**)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $z \in N'_\delta(z_0) \cap D$ แล้ว $f(z) \in N_\varepsilon(w_0)$ และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

บทนิยาม 2.88 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และให้ $z_0 \in D$ แล้วจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องที่** z_0 **(** f **is continuous at** z_0 **)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $z \in N_\delta(z_0) \cap D$ แล้ว $f(z) \in N_\varepsilon(f(z_0))$

นั่นคือ $f[N_\delta(z_0) \cap D] \subset N_\varepsilon(f(z_0))$ ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ทุก $z \in D$ แล้วเราจะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องใน D และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in C(D)$

ข้อสังเกต 2.89 : ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน $D \subset R^2$ และ $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ u มีความต่อเนื่องที่ z_0 และ v มีความต่อเนื่องที่ z_0

บทนิยาม 2.90 : กำหนดให้ $f : [a,b] \to R^2$ แล้วกล่าวว่า f **มีความต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous)** บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ มีพาร์ทิชัน $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ของ $[a,b]$ ซึ่งสำหรับทุก $i = 1,2,...,n$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องบน (x_{i-1}, x_i) โดยที่ $\lim\limits_{x \to x_{i-1}^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to x_i^-} f(x)$ หาค่าได้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in PC[a,b]$

บทนิยาม 2.91 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน** D **(** f **is uniformly continuous on** D**)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $z_1, z_2 \in D$ และ $|z_1 - z_2| < \delta$ แล้ว $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in UC(D)$

บทนิยาม 2.92 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบนโดเมน D และให้ $z_0 \in D^\circ$ ถ้า $\lim\limits_{t \to z_0} \dfrac{f(t) - f(z_0)}{t - z_0}$ หาค่าได้ แล้วจะเรียกลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ** f **ที่** z_0 **(derivative of** f **at** z_0**)**

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(z_0)$ หรือ $\frac{d}{dz}f(z_0)$ และกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่** z_0 **(differentiable at** z_0 **)**

หมายเหตุ 2.93 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $E=\{z : f'(z) \text{ หาค่าได้}\}\neq\phi$ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาฟังก์ชันเชิงซ้อนกำหนดบน E ด้วยค่า $f'(z)$ และจะเขียนแทนฟังก์ชันนี้โดย f' และเรียก f' ว่า**อนุพันธ์ของ** f **(derivative of** f **)** ในทำนองเดียวกันสัญลักษณ์ $f^{(n)}$ แทนอนุพันธ์ของ $f^{(n-1)}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ เมื่อหา $f^{(n-1)}$ ได้

ทฤษฎีบท 2.94 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ z

บทนิยาม 2.95 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D แล้ว จะกล่าวว่า f **วิเคราะห์ได้ที่** z_0 **(analytic at** z_0 **)** ก็ต่อเมื่อ มี $r>0$ ซึ่ง f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน $N_r(z_0)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f\in A(z_0)$

เราจะกล่าวว่า f **วิเคราะห์ได้ใน** S **(analytic in** S **)** ก็ต่อเมื่อ f วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดใน S และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f\in A(S)$

บทนิยาม 2.96 : กำหนดให้ $f:[a,b]\to R^2$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$ และ $u=R(f)$, $v=I(f)$ นิยาม**อินทิกรัลจำกัดเขตของ** f **บน** $[a,b]$ **(definite integral of** f **on** $[a,b]$**)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(t)dt$ ดังนี้

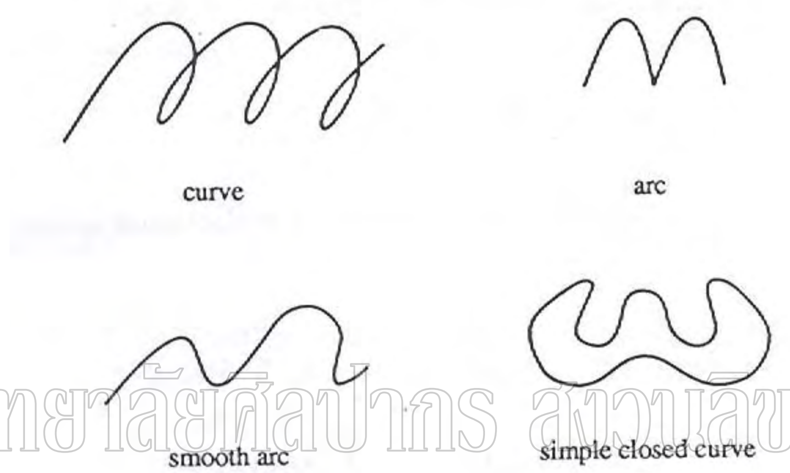
$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

หมายเหตุ 2.97 : กำหนดให้ $z(t)=x(t)+iy(t)$ ทุก $t\in[a,b]$ แล้วสำหรับ $t\in(a,b)$ ซึ่ง $x'(t)$, $y'(t)$ หาค่าได้ จะกำหนด $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$

บทนิยาม 2.98 :

(1) กำหนดให้ $C\subset R^2$ แล้ว C เป็น**เส้นโค้ง (curve)** ก็ต่อเมื่อ C เป็นเรนจ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:[a,b]\to R^2$ และจะเรียก $f(t)=x(t)+iy(t)$ ทุก $t\in[a,b]$ ว่า**พาราเมทไทรเซชัน (parametrization)** ของ C

(2) เส้นโค้ง C เป็น**อาร์ก (arc)** ก็ต่อเมื่อ พาราเมทไทรเซชันของ C เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
(3) เส้นโค้ง C ใน R^2 เป็น**เส้นโค้งเรียบ (smooth curve)** ก็ต่อเมื่อ C มีพาราเมทไทรเซชัน f โดยที่ $f(t)=x(t)+iy(t)$ ซึ่ง x' และ y' มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f'(t)\neq 0$ บน (a,b)
(4) เส้นโค้ง C เป็น**เส้นโค้งปิดอย่างง่ายหรือเส้นโค้งจอร์แดน (simple closed curve or Jordan curve)** ก็ต่อเมื่อ มีพาราเมทไทรเซชัน f ของ C ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $f(b)=f(a)$



รูปที่ 3 : แสดงเส้นโค้งแบบต่างๆ

ทฤษฎีบท 2.99 : The Jordan Curve Theorem

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่ายใน R^2 แล้ว $R^2 - C = A\cup B$ เมื่อ A,B เป็นโดเมน โดยที่เซตใดเซตหนึ่งมีขอบเขต และอีกเซตหนึ่งไม่มีขอบเขต ยิ่งไปกว่านั้น C เป็นขอบของทั้ง A และ B

โดเมนที่มีขอบเขตเรียกว่า**เซตของจุดภายใน(interior)** ของ C เขียนแทนด้วย $I(C)$ และโดเมนที่ไม่มีขอบเขตเรียกว่า**เซตของจุดภายนอก(exterior)** ของ C เขียนแทนด้วย $E(C)$

บทนิยาม 2.100 :

(1) **เส้นโค้งพาราเมทไทรซ์ (parametrized curve)** คือ คู่อันดับ $(C,z(t))$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง และ $z(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของ C

(2) **คอนทัวร์ (contour)** คือ เส้นโค้งพาราเมทไทรซ์ $(C,z(t))$ เมื่อสามารถแบ่งโดเมน $[a,b]$ ของ $z(t)=x(t)+iy(t)$ ออกเป็นช่วงย่อยจำนวนจำกัด ซึ่ง $x'(t)$, $y'(t)$ มีความต่อเนื่องบนทุกช่วงย่อยปิดและ $z'(t)\neq 0$ ที่ทุกจุดภายในของช่วงย่อยปิด

นั่นคือ C เป็นยูเนียนของเส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัด $C_1,C_2,...,C_n$ เมื่อจุดปลายของ C_i เป็นจุดเริ่มต้นของ C_{i+1} สำหรับ $i=1,2,...,n-1$

(3) คอนทัวร์ $(C,z(t))$ เป็น**คอนทัวร์อย่างง่าย (simple contour)** ก็ต่อเมื่อ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $[a,b)$ เมื่อ $[a,b]$ คือ โดเมนของ $z(t)$

(4) คอนทัวร์ $(C,z(t))$ เป็น**คอนทัวร์ปิดอย่างง่าย (simple closed contour)** ก็ต่อเมื่อ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $[a,b)$ และ $z(a)=z(b)$ เมื่อ $[a,b]$ คือ โดเมนของ $z(t)$

(5) คอนทัวร์ปิดอย่างง่าย $(C,z(t))$ มี**ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise oriented: cco)** ก็ต่อเมื่อ t แปรค่าบนโดเมนจาก a ถึง b เราได้ว่า $z(t)$ เคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ $I(C)$ อยู่ทางซ้ายของการเคลื่อนที่

ต่อไปนี้เมื่อกล่าวถึงคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่นจะหมายถึงคอนทัวร์ที่มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเท่านั้น

บทนิยาม 2.101 : กำหนด $(C,z(t))$ เป็นคอนทัวร์ เมื่อโดเมนของ $z(t)$ คือ $[a,b]$ และ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน C เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมี**ความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C (piecewise continuous on C)** ถ้าสามารถแบ่ง C เป็นอาร์กจำนวนจำกัด คือ $(C_1,z_1(t)),(C_2,z_2(t)),...,(C_n,z_n(t))$ เมื่อ z_i กำหนดบนช่วงย่อย (a_i,b_i) แล้ว $f\circ z_i$ มีความต่อเนื่องบน (a_i,b_i) สำหรับ $i=1,2,...,n$

บทนิยาม 2.102 : กำหนดให้ $(C,z(t))$ เป็นคอนทัวร์ และ $[a,b]$ เป็นโดเมนของ $z(t)$ และ $f:C\to R^2$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน C นิยาม**คอนทัวร์อินทิกรัลของ f บน C (contour integral of f over C)** เขียนแทนโดย $\int_C f(z)dz$ ดังนี้

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

บทนิยาม 2.103 : กำหนดให้คอนทัวร์ C มีพาราเมทไทรเซชัน

$$C: z(t)=x(t)+iy(t) \qquad \text{สำหรับแต่ละ } t\in[a,b]$$

แล้ว คอนทัวร์ $-C$ เป็นคอนทัวร์ที่นิยามโดย

$$-C : z_1(t) = z(-t) \qquad \text{สำหรับแต่ละ } t \in [-b,-a]$$

เราจะเห็นได้ว่าจุดเริ่มต้นของ $-C$ คือ $z(-(-b)) = z(b)$ ซึ่งเป็นจุดปลายของ C และจุดปลายของ $-C$ คือ $z(-(-a)) = z(a)$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของ C

บทนิยาม 2.104 : กำหนดให้ $f(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของคอนทัวร์ C_1 ซึ่งมี $[a,b]$ เป็นโดเมน และให้ $g(t)$ เป็นพาราเมทไทรเซชันของคอนทัวร์ C_2 ซึ่งมี $[b,c]$ เป็นโดเมน เมื่อ $f(b) = g(b)$ แล้วเราจะเรียก คอนทัวร์ C นิยามโดย

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{สำหรับแต่ละ } t \in [a,b] \\ g(t) & \text{สำหรับแต่ละ } t \in [b,c] \end{cases}$$

ว่า**ผลบวกของ C_1 และ C_2 (sum of C_1 and C_2)** และเขียนแทนคอนทัวร์ C ด้วย $C_1 + C_2$ นอกจากนี้เราสามารถนิยาม $C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ ได้ในทำนองเดียวกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.105 : กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ และพาราเมทไทรเซชัน $z(t) = x(t) + iy(t)$ บน $[a,b]$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

(2) $\displaystyle\int_C Kf(z)dz = K\int_C f(z)dz$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ใน R^2

(3) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

(4) $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ โดยที่ $C = C_1 + C_2$

(5) $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$

บทนิยาม 2.106 : กำหนดให้ D เป็นโดเมนใน R^2 แล้ว เราจะเรียก D ว่า**โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว (simply connected domain)** ก็ต่อเมื่อ ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน D แล้ว $I(C) \subset D$

ทฤษฎีบท 2.107 : The Cauchy Integral Formula

กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 และ $D=C\cup I(C)$ ถ้า $f\in A(D)$ และ $z_0\in I(C)$ แล้ว

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

ทฤษฎีบท 2.108 : ให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 และ $f\in A(D)$ เมื่อ $D=C\cup I(C)$ แล้ว $f^{(n)}\in A(I(C))$ ทุก $n=1,2,3,...$ และ $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$ ทุก $z\in I(C)$

ผลจากทฤษฎีบท 2.108 จะได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.109 : ถ้า $f\in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมนใน R^2 แล้ว $f^{(n)}\in A(D)$ ทุก $n=1,2,3,...$

บทที่ 3

อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

(SERIES OF COMPLEX NUMBERS)

เราได้ศึกษาลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงมาแล้ว ในบทนี้จะศึกษาลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน และศึกษาทฤษฎีบทที่ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อนต่อไป

3.1 ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน (Sequences of Complex Numbers)

บทนิยาม 3.1.1 : ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน (sequence of complex numbers) คือ ฟังก์ชัน z ซึ่งมีโดเมนคือ I^+ และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ R^2 เราจะแสดงถึงลำดับของจำนวนเชิงซ้อนโดย $\{z_n\}$ หรือโดย $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เมื่อ $z_n = z(n)$ สำหรับ $n \in I^+$ และเรียก z_n ว่า **เทอมที่ n ($\mathbf{n^{th}}$ term)** ของ $\{z_n\}$

ในบทนี้ เมื่อกล่าวถึงลำดับจะหมายถึงลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 3.1.2 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับ $\{z_n\}$ ของจำนวนเชิงซ้อน

(1) $z_n = i^n$ (2) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$

(3) $z_n = (-1)^n + i$ (4) $z_n = \dfrac{1}{n} + i$

(5) $z_n = \left[\dfrac{(1-i)}{3}\right]^n$ (6) $z_n = \dfrac{n + i\sqrt{1+n^2}}{1+2in}$

บทนิยาม 3.1.3 : ลำดับ $\{z_n\}$ ของจำนวนเชิงซ้อน**ลู่เข้าสู่** b **(converges to** b**)** ใน R^2 ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งถ้า $n \geq N$ แล้ว $|z_n - b| < \varepsilon$

จะเขียน $b = \lim_{n\to\infty} z_n$ หรือ $z_n \to b$ แทนความหมายตามบทนิยาม และเรียก b ว่าเป็น**ลิมิต(limit)**ของ $\{z_n\}$

บทนิยาม 3.1.4 : เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{z_n\}$ของจำนวนเชิงซ้อนเป็น**ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** ถ้ามี b ใน R^2 ซึ่ง $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

ถ้าไม่เป็นเช่นนี้เราจะกล่าวว่า ลำดับ $\{z_n\}$เป็น**ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ตัวอย่าง 3.1.5 : ลำดับ $\{z_n\}$ในตัวอย่าง 3.1.2 (4) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ i ซึ่งแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$|z_n - i| = \left|\frac{1}{n} + i - i\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น ลำดับ $\{z_n\}$ในตัวอย่าง 3.1.2 (4) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ i ●

ตัวอย่าง 3.1. 6 : ลำดับ $\{z_n\}$ในตัวอย่าง 3.1.2 (5) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0 ซึ่งแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \log_{\sqrt{2}/3}(\varepsilon)$ สำหรับ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$|z_n - 0| = \left|\left(\frac{1-i}{3}\right)^n - 0\right| = \frac{|1-i|^n}{3^n} = \frac{\sqrt{2}^n}{3^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \le \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^N$$

$$< \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\log_{\sqrt{2}/3}(\varepsilon)} = \varepsilon$$

ดังนั้น ลำดับ$\{z_n\}$ในตัวอย่าง 3.1.2 (5) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0 ●

บทนิยาม 3.1.7 : ให้$\{s_n\}$และ$\{t_n\}$เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน เรียกลำดับ$\{s_n + t_n\}, \{s_n - t_n\}$ และ $\{s_n \cdot t_n\}$ ว่า **ผลบวก (sum)** **ผลต่าง (difference)** **และผลคูณ(product)** ของลำดับ$\{s_n\}$ และ$\{t_n\}$ ตามลำดับ

ในกรณีที่ $t_n \neq 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$ จะเรียกลำดับ $\left\{\dfrac{s_n}{t_n}\right\}$ ว่า**ผลหาร(quotient)**ของลำดับ $\{s_n\}$ และ $\{t_n\}$

ทฤษฎีบท 3.1.8 : (1) ถ้า $\{z_n\}$ มีลิมิต แล้ว $\{z_n\}$ มีลิมิตเพียงค่าเดียว

(2) ให้ $A \in R^2$ แล้ว $z_n \to A$ ก็ต่อเมื่อ $|z_n - A| \to 0$

(3) ให้ $z_n = x_n + iy_n$ แล้ว $x_n \to x$ และ $y_n \to y$ ก็ต่อเมื่อ $z_n \to x + iy$

พิสูจน์ : (1) สมมติ $\{z_n\}$ มีลิมิตเป็น z และ z' โดยที่ $z \neq z'$
เนื่องจาก z เป็นลิมิตของ $\{z_n\}$ ดังนั้น จะมี $N_1 \in I^+$ ซึ่งสำหรับ $n \geq N_1$ แล้ว $|z_n - z| < \varepsilon$

และเนื่องจาก z' เป็นลิมิตของ $\{z_n\}$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in I^+$ ซึ่งสำหรับ $n \geq N_2$ แล้ว $|z_n - z'| < \varepsilon$
เลือก $M = \max\{N_1, N_2\}$ แล้วได้ว่า
$2\varepsilon = |z - z'| = |z - z_M + z_M - z'| \leq |z_M - z| + |z_M - z'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ดังนั้น $z = z'$ นั่นคือ ถ้า $\{z_n\}$ มีลิมิต แล้ว $\{z_n\}$ มีลิมิตเพียงค่าเดียว

(2) ($\Rightarrow$) กำหนดให้ ลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ A ให้ $\varepsilon > 0$
ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ แล้ว $|z_n - A| < \varepsilon$
เนื่องจาก $||z_n - A| - 0| = |z_n - A|$
ดังนั้น $\{|z_n - A|\}$ ลู่เข้าสู่ 0

($\Leftarrow$) กำหนดให้ลำดับ $\{|z_n - A|\}$ ลู่เข้าสู่ 0
ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งสำหรับ $n \geq M$ แล้ว $||z_n - A| - 0| < \varepsilon$
เนื่องจาก $|z_n - A| = ||z_n - A|| = ||z_n - A| - 0| < \varepsilon$
ดังนั้น $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ A

(3) ($\Rightarrow$) ให้ $z_n = x_n + iy_n$ และ $x_n \to x$ และ $y_n \to y$
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $x_n \to x$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก M_1 ซึ่งสำหรับ $n \geq M_1$ แล้ว $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
และเนื่องจาก $y_n \to y$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก M_2 ซึ่งสำหรับ $n \geq M_2$ แล้ว $|y_n - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
เลือก $M = \max\{M_1, M_2\}$ สำหรับ $n \geq M$ จะได้ว่า

$|z_n-(x+yi)|=|x_n+iy_n-(x+yi)|=|(x_n-x)+(y_n-y)i|\le|x_n-x|+|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

ดังนั้น $z_n \to x+iy$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $z_n \to x+iy$ ให้ $\varepsilon>0$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งสำหรับ $n\geq M$ แล้ว

$\varepsilon>|z_n-(x+iy)|=|x_n+iy_n-(x+iy)|=|(x_n-x)+(y_n-y)i|$

โดยทฤษฎีบท 2.79ข้อ (1)จะได้ว่า $|(x_n-x)+(y_n-y)i|>|x_n-x|$ ดังนั้น $|x_n-x|<\varepsilon$

นั่นคือ $x_n \to x$

โดยทฤษฎีบท 2.79ข้อ (2)จะได้ว่า $|(x_n-x)+(y_n-y)i|>|y_n-y|$ ดังนั้น$|y_n-y|<\varepsilon$

นั่นคือ $y_n \to y$

ดังนั้น ถ้า $z_n \to x+iy$ แล้ว $x_n \to x$ และ $y_n \to y$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จาก ทฤษฎีบท 2.15 และ ทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (3)

ทฤษฎีบท 3.1.9_: ให้ $\{s_n\}$ และ $\{t_n\}$เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง$\{s_n\}$ลู่เข้าสู่ a และ $\{t_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้ว

(1) $\{s_n+t_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a+b$

(2) $\{s_n-t_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a-b$

(3) $\{s_n\cdot t_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a\cdot b$

(4) ในกรณีที่ $b\neq 0$ และ $t_n\neq 0$ สำหรับทุก $n\in I^+$ จะได้ว่า $\left\{\frac{s_n}{t_n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{b}$

ตัวอย่าง 3.1.10 : ลำดับ $\{z_n\}$ ในตัวอย่าง 3.1.2 (6) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $\frac{1+i}{2i}$ ซึ่งแสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ : เนื่องจาก $z_n=\dfrac{n+i\sqrt{1+n^2}}{1+2in}=\dfrac{n\left(1+i\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\right)}{n\left(\frac{1}{n}+2i\right)}=\dfrac{\left(1+i\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\right)}{\left(\frac{1}{n}+2i\right)}$

ให้ $s_n=1+i\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}$ และ $t_n=\frac{1}{n}+2i$

จะได้ว่า $\{s_n\}$ ลู่เข้าสู่ $1+i$ และ $\{t_n\}$ ลู่เข้าสู่ $2i$

โดยทฤษฎีบท 3.1.9 ข้อ (4) จะได้ว่า ลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $\dfrac{1+i}{2i}$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.11 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ

ลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|z_n - z_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $m \geq N$

พิสูจน์ : $(\Rightarrow)$ ให้ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ $z \in R^2$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่งถ้า $n \geq N_1$ แล้ว $|z_n - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

และมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่งถ้า $m \geq N_2$ แล้ว $|z_m - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

ให้ $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $m \geq N$ จะได้ว่า

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ กำหนดให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$

มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|z_n - z_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $m \geq N$

สำหรับ $n \in I^+$ ให้ $z_n = x_n + iy_n$

โดยทฤษฎีบท 2.17 สรุปได้ว่า $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (3) จะได้ว่า $\{z_n\}$เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ตัวอย่าง 3.1.12 : จงแสดงว่า $\{(n+i)/n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \dfrac{2}{\varepsilon}$ ซึ่งสำหรับ $n \geq m \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{n+i}{n} - \frac{m+i}{m}\right| = \left|\frac{i}{n} - \frac{i}{m}\right| \leq \frac{i}{n} - \frac{i}{m} < \frac{2}{N} = \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.11 จะได้ว่า $\{(n+i)/n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

3.2 อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนและการลู่เข้า (Series of Complex Numbers and Convergence)

บทนิยาม 3.2.1 : ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อนและให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

(1) จะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน (series of complex numbers)** ซึ่งมีเทอมที่ n คือ z_n และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ หรือ $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$

(2) จะเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่ n (nth partial sum)** ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

(3) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **ลู่เข้าสู่** $S \in R^2$ **(converges to** S**)** ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ และถ้ามี $S \in R^2$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าสู่ S เราจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series)**

(4) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **ลู่เข้าสู่** S เมื่อ $S \in R^2$ แล้วจะเรียก S ว่า**ผลบวก(sum)** ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ และเขียนแทน S ด้วยสัญลักษณ์ $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

(5) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกแล้วเราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **เป็นอนุกรมลู่ออก(divergent series)**

(6) จะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent series)** ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ในบทนี้ เมื่อกล่าวถึงอนุกรมจะหมายถึงอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

โดยทฤษฎีบท 2.57 และทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (3) ทำให้ได้ทฤษฎีบท 3.2.2 ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.2 : ถ้า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.2.3 : ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

พิสูจน์ : ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าสู่ $S \in R^2$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad n \ge N$$

สำหรับทุก $n \ge N+1$ จะได้ว่า

$$|z_n| = |s_n - s_{n-1}| \le |s_n - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ■

ข้อสังเกต 3.2.4 : บทกลับของทฤษฎีบท 3.2.3 ไม่จริง เนื่องจากมีอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออกและ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

ทฤษฎีบท 3.2.5 : ถ้า $z_n = a_n + ib_n$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = a + ib$ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$

พิสูจน์ : สำหรับ $n \in I^+$ ให้ $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ และ $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + ib$

ดังนั้น $\{\alpha_n + i\beta_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (3) สรุปได้ว่า $\{\alpha_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ $\{\beta_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\{\alpha_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ $\{\beta_n\}$ ลู่เข้าสู่ b

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (3) จะได้ว่า $\{\alpha_n + i\beta_n\}$ ลู่เข้าสู่ $a + bi$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.6 : การทดสอบอัตราส่วน (Ratio Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และให้ $\rho \in R$ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \rho$ แล้ว

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ ถ้า $\rho < 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $\rho > 1$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\rho < 1$ และ $\varepsilon = x - p$ แล้ว $\varepsilon > 0$

ให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\rho < x < 1$

โดยบทนิยาม 3.1.3 มี N เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสำหรับ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\left(z_{n+1}/z_n\right) - \rho\right| < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad \left|z_{n+1}/z_n\right| < \varepsilon + \rho = x$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $n \geq N$ จะได้ว่า $|z_{n+1}| < |z_n| x = |z_n| \frac{x^{n+1}}{x^n}$

หรือ $\frac{|z_{n+1}|}{x^{n+1}} < \frac{|z_n|}{x^n} < \frac{|z_{n-1}|}{x^{n-1}} < \dots < \frac{|z_N|}{x^N} = C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ $|z_n| < Cx^n$ สำหรับทุก $n \geq N$

แต่ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $0 < x < 1$ ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} Cx^n$ ลู่เข้า

และ โดยทฤษฎีบท 2.53 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ ■

(2) ให้ $\rho > 1$ และให้ x เป็นจำนวนซึ่ง $0 < x < \rho$ และ $\varepsilon = \rho - x > 0$

โดยบทนิยาม 3.1.3 มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ จะได้ว่า $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > \rho - \varepsilon = x > 1$

นั่นคือ $|z_{n+1}| > |z_n|$ ทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ■

ข้อสังเกต 3.2.7 : สำหรับ ρ ในทฤษฎีบท 3.2.6 เมื่อ $\rho = 1$ ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก เนื่องจากมีตัวอย่างของอนุกรมที่มีค่า $\rho = 1$ ที่เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีตัวอย่างของอนุกรมที่มีค่า $\rho = 1$ ที่เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนี้

(1) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ มี $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$

และเราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมฮาร์โมนิค ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ จึงเป็นอนุกรมลู่ออก

(2) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ มี $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right| = 1$

และเนื่องจากเราทราบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี ที่มีค่า p = 2 > 1 ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.2.8 :

(1) ให้ α และ β เป็นค่าคงที่ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

(2) ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว มีจำนวนบวก M ซึ่ง $|z_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

(3) **(Cauchy Test) :** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=n}^{n+p} z_k = 0$

พิสูจน์ : (1) ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าสู่ $S \in R^2$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ ลู่เข้าสู่ $W \in R^2$
สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ และ $T_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$
ดังนั้น $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ S และ $\{T_n\}$ ลู่เข้าสู่ W
เห็นได้ว่า $\{\alpha S_n + \beta T_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n)$
โดยทฤษฎีบท 2.15 สรุปได้ว่า $\{\alpha S_n + \beta T_n\}$ ลู่เข้าสู่ $\alpha S + \beta w$
ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

(2) กำหนดให้ $z_n = x_n + iy_n$ และให้อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าสู่ $S \in R^2$
โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$
นั่นคือ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต
ดังนั้น มีจำนวนจริงบวก M_1 ซึ่ง $|x_n| \le M_1$ สำหรับทุก $n \in I^+$
และมีจำนวนจริงบวก M_2 ซึ่ง $|y_n| \le M_2$ สำหรับทุก $n \in I^+$

เลือก $M=\sqrt{M_1^2+M_2^2}$ จะได้ว่า สำหรับทุก $n\in I^+$ แล้ว

$|z_n|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}\le\sqrt{M_1^2+M_2^2}\le M$ ■

(3) สำหรับการพิสูจน์ **Cauchy Test** จะใช้ทฤษฎีบท 3.1.11 และจะขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.9 : การทดสอบเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ให้ $M_n\ge 0$ สำหรับทุก $n\in I^+$ และให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ เป็นอนุกรมที่มีเงื่อนไขว่า $|z_n|\le M_n$ สำหรับทุก $n\ge N_0$ และถ้า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์

พิสูจน์ : ให้ $M_n\ge 0$ สำหรับทุก $n\in I^+$ และให้ $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ สอดคล้องว่า $|z_n|\le M_n$ สำหรับทุก $n\ge N_0$

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ ลู่เข้า ดังนั้น $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=n}^{n+p}M_k=0$ สำหรับทุก $n\in I^+$

นั่นคือ สำหรับทุก $n\in I^+$ และสำหรับทุก $p\in I^+$ เราได้ว่า

$$0\le\left|\sum_{k=n}^{n+p}z_k\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}|z_k|\le\sum_{k=n}^{n+p}M_k$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.16 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{n+p}|z_k|=0$

โดยทฤษฎีบท 3.2.8 ข้อ (3) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

นั่นคืออนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.2.10 : อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์เมื่อ $|z|<1$ และลู่ออก เมื่อ $|z|\ge 1$ และ $\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ เมื่อ $|z|<1$

พิสูจน์ : ให้ S_N เป็นผลบวกย่อยที่ N ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

จะได้ว่า $S_N = \sum_{n=1}^{N} z^n = 1 + z + ... + z^N$ **(1)**

นำ z คูณทั้งสองข้างของสมการด้านบน จะได้ว่า

$$zS_N = z + z^2 ... + z^{N+1}$$ **(2)**

นำ **(2) - (1)** จะได้ว่า $S_N(z-1) = z^{N+1} - 1$

หรือ $S_N = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}$

กรณีที่ 1 $|z| < 1$ จะได้ว่า $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z} = \dfrac{1}{1-z}$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้า สู่จำนวนจริง $\dfrac{1}{1-z}$ เมื่อ $|z| < 1$

กรณีที่ 2 $|z| \geq 1$ จะได้ว่า $\{S_N\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z| \geq 1$ ■

ตัวอย่าง 3.2.11 : จงหาผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n$

วิธีทำ : เนื่องจาก อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่ง $\left|\dfrac{1+i}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{3} < 1$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n = \dfrac{1}{1-(1+i)/3} = \dfrac{3}{2-i}$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)\left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.8 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right) = \dfrac{1+i}{3} \cdot \dfrac{3}{2-i} = \dfrac{1+i}{2-i}$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{3}\right)^n$ คือ $\dfrac{1+i}{2-i}$ •

ตัวอย่าง 3.2.12 : จงหาค่า z ซึ่งทำให้ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ และอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าพร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ : เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต โดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าเมื่อ $|-z| = |z| < 1$ และมีผลบวกของอนุกรมเป็น $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต โดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าเมื่อ $|z^2| < 1$ นั่นคืออนุกรมนี้ลู่เข้าเมื่อ $|z| < 1$ และมีผลบวกของอนุกรมเป็น $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$ •

บทที่ 4
อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน
(POWER SERIES OF COMPLEX NUMBERS)

ในบทนี้เราจะศึกษาอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน และจะแสดงว่าทุกอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อนมีวงกลมของการลู่เข้า ซึ่งมีรัศมีเป็น 0 หรือเป็นจำนวนจริงบวกหรือเป็นค่าบวกอนันต์

4.1 อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน (Power Series of Complex Numbers)

บทนิยาม 4.1.1 : อนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อนรอบจุด $z=z_0$ **(power series of complex numbers about** $z=z_0$) คือ อนุกรมเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปต่อไปนี้

$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots$ เมื่อ $a_0 ,a_1 ,a_2 ,\dots$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน

เราอาจเขียนแทนอนุกรมกำลังข้างบนได้ในรูป $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

ตัวอย่าง 4.1.2 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-z_0)^n}{n!}$ (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(z-z_0)^n$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n(n+1)}$ (5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!(z-1+i)^n}{(2n)!}$ (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1+2^n)z^n$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{a^n}$ (โดยที่ $a \neq 0$) (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!n^n}$ (9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!z^n}{n^n}$

หมายเหตุ : พิจารณาในอนุกรมกำลังในตัวอย่าง 4.1.2 ข้อ (1) ถ้ากำหนดให้ $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ จะได้อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^n$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า และถ้ากำหนดให้ $z=2+3i$ จะได้อนุกรม

$\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)^n$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก เนื่องจากอนุกรมทั้งสองเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งมีค่า $|z|<1$ และ $|z|>1$ ตามลำดับ

นั่นคือ อนุกรมกำลังที่เป็นอนุกรมเรขาคณิตนั้นใช้เกณฑ์ในการพิจารณาการลู่เข้า โดยการเปรียบเทียบค่าของ $|z|$ กับ 1

ประเด็นปัญหาที่เราจะพิจารณาต่อไปก็คือ อนุกรมกำลังอื่นๆที่ไม่ใช่อนุกรมเรขาคณิต จะลู่เข้าเมื่อใด และลู่ออกเมื่อใด

สำหรับทฤษฎีบท 4.1.3 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ให้ข้อสรุปว่าทุกอนุกรมกำลังของจำนวนเชิงซ้อนมีวงกลมของการลู่เข้า ซึ่งมีรัศมีเป็น 0 หรือเป็นจำนวนจริงบวกหรือเป็นค่าบวกอนันต์ ในการพิสูจน์ เราจะอาศัยสัจพจน์ของความบริบูรณ์ ซึ่งกล่าวดังต่อไปนี้

สัจพจน์ของความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness)

ถ้า $\phi \neq X \subset R$ และ X มีขอบเขตบน แล้ว X จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ทฤษฎีบท 4.1.3 : สำหรับอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ใด ๆ เราได้ว่า

(1) ถ้าอนุกรมลู่เข้าที่จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w \neq z_0$ แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุก z ซึ่ง $|z-z_0|<|w-z_0|$

(2) จะเกิดสิ่งต่อไปนี้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

(i) อนุกรมลู่เข้าเฉพาะที่ $z=z_0$ เท่านั้น

(ii) มีจำนวนจริงบวก R ที่เรียกว่า**รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง (radius of convergence of the power series)** ซึ่งอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|z-z_0|<R$ และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|z-z_0|>R$ แต่ถ้า $|z-z_0|=R$ อนุกรมอาจลู่เข้าหรือลู่ออก และเรียกวงกลม $|z-z_0|=R$ ว่า **วงกลมของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง (circle of convergence of the power series)**

(iii) อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก z (กรณีนี้กล่าวว่า R เป็น $+\infty$)

(3) รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังหาได้จากสูตร $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้หรือลิมิตเป็นบวกอนันต์

พิสูจน์ : (1) สมมติ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าที่ $z=w$ โดยที่ $w \neq z_0$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.8 ข้อ (2) จะได้ว่ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left|a_n(w-z_0)^n\right| \leq M \quad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

ให้ $z \in R^2$ สอดคล้องว่า $|z-z_0|<|w-z_0|$ เราจะแสดงว่า $\left|a_n(z-z_0)^n\right| \leq M\delta^n$ สำหรับบางค่าของ $\delta \in (0,1)$

ให้ $\delta = \dfrac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$

เนื่องจาก $\left|a_n(z-z_0)^n\right| = |a_n||z-z_0|^n = |a_n|\dfrac{|z-z_0|^n}{|w-z_0|^n}\,|w-z_0|^n \leq M\delta^n$

Claim : อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า เมื่อ z สอดคล้องว่า $|z-z_0|<|w-z_0|$

เนื่องจาก $\left|a_n(z-z_0)^n\right| \leq M\delta^n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in I^+$

และ $\sum_{n=0}^{\infty} M\delta^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าเพราะว่า $\delta < 1$

โดยทฤษฎีบท 3.2.9 จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ไม่สอดคล้อง (i) ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าที่ $z_1 \neq z_0$

และถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ไม่สอดคล้อง (iii) ดังนั้นมี $z_2 \neq z_1$ และ $z_2 \neq z_0$ ซึ่ง

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าที่ z_1 และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออกที่ z_2

โดย ข้อ (1) จะได้ว่า $|z_1-z_0|<|z_2-z_0|$

ให้ $A = \{\, z \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า$\}$ ดังนั้น $z_1 \in A$ และ $A \neq \phi$

ให้ $X = \{|z-z_0| : z \in A\}$ ดังนั้น $|z_1-z_0| \in X$ และ $X \neq \phi$

Claim 1 : X มีขอบเขต

เนื่องจาก $z_2 \notin A$

ให้ $z \in A$

สมมติ $|z_2-z_0|<|z-z_0|$

โดย ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_2-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $|z_2-z_0| \geq |z-z_0|$

เลือกจำนวนจริงบวก $M=|z_2-z_0|$ และสรุปได้ว่า X มี M เป็นขอบเขตบน

โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ได้ว่า X มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ R เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ X

เนื่องจาก $z_1 \in A$ และ $|z_1-z_0|>0$ ดังนั้น $R>0$

Claim 2 : ถ้า $|z-z_0|<R$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า

ให้ $|z-z_0|<R$

เลือก w ซึ่ง $|z-z_0|<|w-z_0|<R$

เราจะแสดงว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ ลู่เข้า

สมมติ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ ลู่ออก

ให้ $z' \in A$ จะได้ว่า $|z'-z_0|<|w-z_0|<R$

ดังนั้น $|w-z_0|$ เป็นขอบเขตบนของ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ ลู่เข้า

โดยข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

Claim 3 : ถ้า $|z-z_0|>R$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก

ให้ $|z-z_0|>R$ ดังนั้น $z \notin A$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(3) **กรณีที่ 1 :** ถ้า $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| \neq 0$

ให้ $z_n = a_n(z-z_0)^n$

โดยการทดสอบอัตราส่วน จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก z ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n| = \lim_{n\to\infty} \left|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} / a_n(z-z_0)^n\right| = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$$

และอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|z-z_0| \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$

นั่นคือ ถ้า $|z-z_0| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|}$ จะได้ อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

และ ถ้า $|z-z_0| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|}$ จะได้ อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังหาได้จากสูตร $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

กรณีที่ 2 : ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$

ให้ $z_n = a_n(z-z_0)^n$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n| = |z-z_0|\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 0 < 1$

โดยการทดสอบอัตราส่วน จะได้ว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวน z

เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$

และกรณีนี้เราได้ว่า $R = +\infty$

กรณีที่ 3 : $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = +\infty$

ให้ $z_n = a_n(z-z_0)^n$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(z-z_0)}{a_n}\right|$

และลิมิตหาค่าได้เฉพาะเมื่อ $z=z_0$ เท่านั้น และลิมิตมีค่าเท่ากับ 0

โดยการทดสอบอัตราส่วน จะได้ว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_2-z_0)^n$ ลู่เข้าเฉพาะที่ $z=z_0$ เท่านั้น

และในกรณีนี้ เราจะได้ว่า $R=0$ ■

ตัวอย่าง 4.1.4 : จงพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมในตัวอย่าง 4.1.2

วิธีทำ : (1) สำหรับอนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ เราได้ว่า $a_n = 1$ สำหรับทุก n และ

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3) จะได้ว่ารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เป็น 1

ดังนั้น $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าเมื่อ $|z|<1$ และ ลู่ออกเมื่อ $|z|>1$

(2) สำหรับอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-z_0)^n}{n!}$ เราได้ว่า $a_n = \dfrac{1}{n!}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ(3) จะได้ว่า $R=+\infty$ นั่นคืออนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$ ลู่เข้าสำหรับทุก z

(3) สำหรับอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-z_0)^n$ เราได้ว่า $a_n = n!$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$ และโดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3) จะได้ว่า $R=0$ นั่นคืออนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-z_0)^n$ ลู่เข้าเฉพาะที่ $z=z_0$ เท่านั้น

(4) สำหรับอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n(n+1)}$ เราได้ว่า $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1$

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3) จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n(n+1)}$ ลู่เข้าเมื่อ $|z-i|<1$ และ ลู่ออกเมื่อ $|z-i|>1$

(5) สำหรับอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(z-1+i)^n}{(2n)!}$ เราได้ว่า $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n+1)} = 0$

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3)จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(z-1+i)^n}{(2n)!}$ ลู่เข้าสำหรับทุก z

(6) สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+2^n)z^n$ เราได้ว่า $a_n = n+1+2^n$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}/a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2+2^{n+1}}{n+1+2^n} = 2$

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3)จะได้ว่า $R=\frac{1}{2}$ นั่นคืออนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1+2^n)z^n$ ลู่เข้าเมื่อ $|z|<\frac{1}{2}$ และ ลู่ออกเมื่อ $|z|>\frac{1}{2}$

(7) ให้ $w_n = \frac{z^{2n}}{a^n}$ แล้ว $w_{n+1} = \frac{z^{2n+2}}{a^{n+1}}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|w_{n+1}/w_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2}{a}\right| = \left|\frac{z^2}{a}\right|$

เนื่องจาก $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ดังนั้น $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$ จะลู่เข้าเมื่อ $\left|\frac{z^2}{a}\right|<1$ หรือเมื่อ $|z|<\sqrt{|a|}$ และ ลู่ออกเมื่อ $\left|\frac{z^2}{a}\right| > 1$ หรือเมื่อ $|z|>\sqrt{|a|}$

(8) สำหรับอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!n^n}$ เราได้ว่า $a_n = n!n^n$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{n!n^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)(n+1)^n}{n^n} = +\infty$

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (3) จะได้ว่า อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก z

(9) สำหรับอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}$ เราได้ว่า $a_n = \frac{n!}{n^n}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}| =$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|} = \frac{1}{e}$ นั่นคือรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมนี้เป็น e

โดยทฤษฎีบท4.1.3 ข้อ (3) จะได้ว่า อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}$ ลู่เข้าเมื่อ $|z|<e$ และ ลู่ออกเมื่อ $|z|>e$ •

ข้อสังเกต 4.1.5 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก ที่ $z=w$ แล้วอนุกรมจะลู่ออกสำหรับทุก z ซึ่ง $|z-z_0|>|w-z_0|$

พิสูจน์ : ให้ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออกที่ $z=w$

ให้ z เป็นจุดใด ๆ ซึ่ง $|z-z_0|>|w-z_0|$

สมมติ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออกสำหรับทุก z ซึ่ง $|z-z_0|>|w-z_0|$ ■

4.2 การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอนุกรมกำลัง(Uniform Convergence of Power Series)

บทนิยาม 4.2.1 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าสำหรับทุก z ในโดเมน D แล้วอนุกรมนี้กำหนดฟังก์ชัน $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ สำหรับทุก $z \in D$

เรากล่าวว่าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน** D **ไปสู่** $f(z)$ **(converges uniformly in** D **to** $f(z)$**)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k - f(z)\right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $z \in D$ และทุก $n \geq N$

ตัวอย่าง 4.2.2 : ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก (1) จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน $D=\{z:|z|<r$ เมื่อ $r<1\}$

(2) จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน $D=\{z:|z|<r$ เมื่อ $r=1\}$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \log_r \varepsilon(1-r)$ ซึ่งสำหรับแต่ละ z ซึ่ง $|z| \leq r < 1$ และ $n \geq N$ แล้ว

จะได้ว่า $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \frac{r^{n+1}}{1-r} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \leq \frac{r^N}{1-r} = \varepsilon$

ดังนั้นอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม ใน $D=\{z:|z|<r$ เมื่อ $r<1\}$

(2) สมมติอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน $D=\{z:|z|<r$ เมื่อ $r=1\}$

ให้ $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งถ้า $n \geq N$ จะได้ว่า $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \varepsilon$

เลือก z เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\frac{1}{2} < |z| < 1$ และ $|1-z| < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^{n+1}\varepsilon}\right\}$

ดังนั้น $\quad \dfrac{|z|^{n+1}}{|1-z|} > \varepsilon$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

นั่นคือ อนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน $D=\{z:|z|<r$ เมื่อ $r=1\}$ •

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้ใช้ในการสรุปผลว่าอนุกรมกำลังจะลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มภายในวงกลมของการลู่เข้า และจะขอละการพิสูจน์ไว้ (สามารถอ่านรายละเอียดการพิสูจน์ได้จาก[6])

ทฤษฎีบท 4.2.3 : Weierstrass M – Test

กำหนดให้ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ เป็นอนุกรมกำลังและ $\{M_n\}$เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องว่า $\left|a_n(z-z_0)^n\right| \le M_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และสำหรับทุก z ในบริเวณ S ถ้า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มและลู่เข้าสัมบูรณ์ใน S

ตัวอย่าง 4.2.4 : จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสำหรับทุก z ซึ่ง $|z| \le r < 1$

พิสูจน์ : ให้ $|z| \le r < 1$ แล้วจะได้ $0 \le r < 1$

ให้ $M_n = r^n$ แล้วจะได้ $\left|z^n\right| \le r^n = M_n$

และเนื่องจาก $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $|r|<1$ จึงเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.3 จะได้ว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน $S=\{z:|z| \le r < 1\}$ ■

ทฤษฎีต่อไปนี้จะแสดงว่าอนุกรมกำลังจะลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มภายในวงกลมของการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 4.2.5 : ให้ $\left|z-z_0\right| = R \quad ,(R \ne 0)$ เป็นวงกลมของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มและลู่เข้าสัมบูรณ์ ใน $S=\left\{z:\left|z-z_0\right| \le r\right.$ เมื่อ $\left.0<r<R\right\}$ ที่อยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า $\left|z-z_0\right| = R$

พิสูจน์ : ให้ $|z-z_0|=r<R$ เป็นวงกลมที่วางอยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า $|z-z_0|=R$

พิจารณา $|z-z_0|=\frac{1}{2}(R+r)$ ซึ่งเป็นวงกลมที่อยู่ระหว่างวงกลมทั้งสอง

ให้ z_1 เป็นจุดที่อยู่บนวงกลม $|z-z_0|=\frac{1}{2}(R+r)$ และให้ z เป็นจุดใดๆ ที่อาจวางอยู่ภายในหรือวางอยู่บนวงกลมที่มีรัศมี r

จะได้ว่า $|z-z_0|\leq r$ และ $|z_1-z_0|=\frac{1}{2}(R+r)$

โดยทฤษฎีบท 4.1.4 ข้อ (1) จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z_1-z_0)^n$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\{a_n(z_1-z_0)^n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

นั่นคือ มีจำนวนเต็มบวก M ซึ่งสำหรับทุก n แล้ว $|a_n(z_1-z_0)^n|\leq M$

และเนื่องจาก $|a_n(z-z_0)^n|=|a_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\leq M\left(\frac{2r}{R+r}\right)^n$

แต่ $r<R$ ดังนั้น $\left|\frac{2r}{R+r}\right|<1$

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}M\left(\frac{2r}{R+r}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 4.2.3 จะได้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มและลู่เข้าสัมบูรณ์ใน $S=\{z:|z-z_0|\leq r$ เมื่อ $0<r<R\}$ ■

ทฤษฎีบท 4.2.6 : ให้ R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ นิยามฟังก์ชันเชิงซ้อน f ดังนี้

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \text{ เมื่อ } |z|<R \quad ,(R\neq 0)$$

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $r<R$ แล้ว $f(z)$ ต่อเนื่องใน $D=\{z:|z|<r\}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad ,|z|<R$

ให้ $f_n(z)=a_nz^n$

จะได้ $S_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad , f_k(z) = a_k z^k$

โดยทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มใน D ไปสู่ $f(z)$

เนื่องจาก S_n ต่อเนื่องที่ทุก ๆ z ที่อยู่ใน D

โดยทฤษฎีบท 2.42 จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ ทุกๆ z ■

การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอนุกรมกำลังภายในวงกลมของการลู่เข้าทำให้ได้ผลสรุปที่เกี่ยวกับการอินทิเกรตและการดิฟเฟอเรนชิเอต ดังจะกล่าวในทฤษฎีบท 4.2.7 และทฤษฎีบท 4.2.8 โดยจะขอละการพิสูจน์ (สามารถอ่านรายละเอียดการพิสูจน์ได้จาก[6])

ทฤษฎีบท 4.2.7 : ให้ R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ และ $R \neq 0$ พิจารณา ถ้า C เป็นคอนทัวร์อย่างง่าย ซึ่งอยู่ภายในวงกลมของการลู่เข้า $|z| = R$ แล้วเราสามารถอินทิเกรตอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ แบบทีละเทอม ได้ดังนี้ $\int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C z^n dz$

ทฤษฎีบท 4.2.8 : ให้ R เป็นรัศมีของการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ เมื่อ $(R \neq 0)$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ มีรัศมีของการลู่เข้าเป็น R เช่นเดียวกันกับ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

(2) $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ภายในวงกลมของการลู่เข้า และสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(z)$ ได้โดยการดิฟเฟอเรนชิเอตอนุกรมกำลังแบบทีละเทอม ดังนี้

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1) a_k z^{k-n} \quad \text{เมื่อ } |z| < R \text{ และ } n \in I^+$$

ผลจากทฤษฎีบท 4.2.8 จะเป็นจริงสำหรับ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ด้วย ซึ่งจะกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4.2.9 โดยจะขอละการพิสูจน์ (สามารถอ่านรายละเอียดการพิสูจน์ได้จาก [6])

ทฤษฎีบท 4.2.9 : ให้ $f(z)$ เขียนแทนได้ด้วยอนุกรมกำลัง ดังนี้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , |z - z_0| < R \quad (R \neq 0)$$

แล้ว (1) $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้สำหรับ $|z - z_0| < R$

(2) สัมประสิทธิ์ a_n สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของ $f(z)$ ดังนี้

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

(3) มีอนุกรมกำลังเพียงอนุกรมเดียวเท่านั้นที่เขียนแทน $f(z)$ ได้

บทที่ 5
อนุกรมเทย์เลอร์
(TAYLOR′S SERIES)

ในบทที่ 4 เราได้ศึกษาว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีของการลู่เข้าไม่เท่ากับศูนย์จะแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ ในบทนี้เราจะแสดงว่าทุกฟังก์ชันวิเคราะห์จะสามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังได้

ทฤษฎีบท 5.1 : ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor′s Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดซึ่งอยู่ภายในหรืออยู่บนวงกลม $C_0 : |z-z_0| = r_0$ แล้ว สำหรับทุก z ที่อยู่ ภายในวงกลม C_0 จะได้ว่า

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots \qquad \textit{(5.1)}$$

นั่นคือ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าสู่ $f(z)$ แบบยูนิฟอร์มสำหรับทุก z ที่อยู่ภายใน C_0

เมื่อ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\ldots$

กล่าวว่า *(5.1)* คือการกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0

พิสูจน์ : ให้ z เป็นจุดใด ๆ ภายใน C_0 และสมมติ $r = |z-z_0|$ ดังนั้น $r < r_0$ เลือก r_1 ซึ่ง $r < r_1 < r_0$ ให้ C_1 เป็นวงกลมซึ่ง $C_1 : |z-z_0| = r_1$ และให้จุด z' เป็นจุดที่อยู่บนวงกลม C_1

โดยสูตรอินทิกรัลของโคชี จะได้ว่า

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z')}{(z'-z)} dz' \qquad \textit{(5.2)}$$

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $\alpha \neq 1$ จะได้ว่า $\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

ทุก z' บน C_1 เราได้ว่า $\dfrac{z-z_0}{z'-z_0} \neq 1$ ทำให้

$$\frac{1}{z'-z} = \frac{1}{(z'-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{z'-z_0} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z'-z_0}}$$

$$= \frac{1}{z'-z_0}\left[1+\frac{z-z_0}{z'-z_0}+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^{n-1}+\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{z'-z_0}}\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)^{n}\right]$$

และดังนั้น

$$\frac{f(z')}{z'-z} = \frac{f(z')}{z'-z_0}+\frac{(z-z_0)f(z')}{(z'-z)^2}+\ldots+\frac{(z-z_0)^{n-1}f(z')}{(z'-z)^n}+\frac{(z-z_0)^n f(z')}{(z'-z)(z'-z)^n}$$

แทนค่า $\dfrac{f(z')}{z'-z}$ ใน *(5.2)* ได้ว่า

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(z-z_0)^j}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{(z'-z_0)^{j+1}}dz' + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z)(z'-z_0)^n}$$

$$= f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

เมื่อ $\quad R_n = \dfrac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(z')dz'}{(z'-z)(z'-z_0)^n}$

Claim : $\quad \lim_{n\to\infty} R_n = 0$

ให้ M เป็นค่าสูงสุดของ $|f(z)|$ บน C_1 เนื่องจาก $|z'-z| = r_1 - r$ และ $|z'-z_0| = r_1$ ดังนั้น

$$|R_n| < \frac{r^n}{2\pi}\frac{2\pi r_1 M}{(r_1-r)r_1^n} = \frac{r_1 M}{r_1 - r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

แต่ $\dfrac{r}{r_1} < 1$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด

เรียกอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่ง $z_0 = 0$ ว่า **อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin′s series)**
ดังนั้นการกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมแมคลอริน คือ $f(z) = f(0) + f'(0)z + \dfrac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots$

ตัวอย่าง 5.2 : จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอนุกรมแมคลอริน

(1) e^z (2) $\sin z$ (3) $\cos z$

วิธีทำ : (1) ให้ $f(z) = e^z$ ดังนั้น $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่จุด z ในระนาบเชิงซ้อนและ $f^{(n)}(z) = e^z$, $n = 0,1,2,...$ เพราะฉะนั้นกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมแมคลอรินได้ดังนี้

$$e^z = f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad \text{เมื่อ } |z| < \infty$$

(2) ให้ $f(z) = \sin z$ ดังนั้น $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุด z ในระนาบเชิงซ้อน สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบจะได้

$$f^n(z) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \cos z & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot \sin z & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$$

ดังนั้น $f^{(n)}(0) = 0$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่

เพราะฉะนั้นกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมแมคลอรินได้ดังนี้

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{เมื่อ } |z| < \infty$$

(3) ทำนองเดียวกัน ถ้า $f(z) = \cos z$ แล้ว

$$f^n(z) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \cdot \sin z & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ (-1)^{\frac{1}{2}n} \cdot \cos z & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$$

ดังนั้นกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมแมคลอรินได้ดังนี้

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{เมื่อ } |z| < \infty$$

●

ตัวอย่าง 5.3 : จงกระจาย $\frac{1}{z}$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด 1

วิธีทำ : ให้ $f(z) = \frac{1}{z}$ ดังนั้น $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุด z ซึ่งอยู่ภายในหรืออยู่บนวงกลม $C_0 : |z-1| < 1$ พิจารณา z ใด ๆ ใน C_0 จะได้

$$f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n\, n!}{z^{n+1}}$$

และดังนั้น $f^{(n)}(1)=(-1)^n\, n!$

เพราะฉะนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $\frac{1}{z}$ รอบจุด 1 คือ

$$\frac{1}{z}=f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\ldots$$
$$=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad \text{เมื่อ} |z-1|<1$$ •

ตัวอย่าง 5.4 : จงกระจาย $\frac{1}{(1-z)^3}$ เป็นอนุกรมแมคลอริน

วิธีทำ : เราจะอาศัยความจริงที่ว่า สามารถดิฟเฟอเรนชิเอตอนุกรมกำลังทีละเทอมภายในวงกลมของการลู่เข้าได้

พิจารณา $f(z)=\frac{1}{1-z}$ เมื่อ $|z|<1$

อนุกรมแมคลอรินของ $\frac{1}{1-z}$ คือ $1+z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

เนื่องจาก $f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$

ดังนั้น $\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$

หรือ $\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}=1+3z+6z^2+10z^3+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$ •

การแทนด้วยอนุกรมกำลังมีวิธีเดียว (Uniqueness of Representation by Power Series)

เราทราบจากทฤษฎีบท 5.1 ว่าฟังก์ชันวิเคราะห์จะถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังชนิดหนึ่ง ต่อไปจะแสดงว่าการแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ด้วยอนุกรมกำลังอื่น ๆ ที่ไม่ใช่อนุกรมเทย์เลอร์เป็นไปไม่ได้ นั่นคือ ฟังก์ชันวิเคราะห์จะถูกแทนได้ด้วยอนุกรมกำลังโดยวิธีเดียวเท่านั้น ซึ่งคืออนุกรมเทย์เลอร์

ทฤษฎีบท 5.5 : ถ้า $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ สำหรับทุก z ในวงกลม $C_0:|z-z_0|=r$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์

พิสูจน์ : เนื่องจากเราสามารถดิฟเฟอเรนชิเอตอนุกรมกำลังทีละเทอมได้ ดังนั้น

$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$ โดยทั่วไปทุก $k=1,2,3,\ldots$

$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$

เพราะฉะนั้น $f^{(n)}(z_0)=n!a_n$ หรือ $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

นั่นคืออนุกรมกำลังที่กำหนดมาเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ ■

นอกจากนี้อนุกรมกำลังสามารถนำมาบวก ลบ หรือคูณกันได้ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.6 : ถ้า $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ และ $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ เมื่อ $|z-z_0|<R$ แล้ว

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(z-z_0)^n \quad \text{เมื่อ} \quad |z-z_0|<R$$

พิสูจน์ : พิจารณาจำนวนเต็ม $m>0$ และ z ซึ่ง $|z-z_0|<R$ จะได้

$$\left|\sum_{n=0}^{m}(a_n\pm b_n)(z-z_0)^n-[f(z)\pm g(z)]\right|$$

$$=\left|\left[\sum_{n=0}^{m}a_n(z-z_0)^n-f(z)\right]\pm\left[\sum_{n=0}^{m}b_n(z-z_0)^n-g(z)\right]\right|$$

$$\leq\left|\sum_{n=0}^{m}a_n(z-z_0)^n-f(z)\right|+\left|\sum_{n=0}^{m}b_n(z-z_0)^n-g(z)\right|$$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้ทุก $m>N$ จะได้แต่ละค่าสัมบูรณ์ในอสมการสุดท้ายน้อยกว่า $\dfrac{\varepsilon}{2}$ นั่นคือ

$$\left|\sum_{n=0}^{m}(a_n\pm b_n)(z-z_0)^n-[f(z)\pm g(z)]\right|<\varepsilon$$

สำหรับทุก $m\geq N$ และสำหรับทุก z ซึ่ง $|z-z_0|<R$

เพราะฉะนั้น $f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$ เมื่อ $\left|z-z_0\right|<R$ ■

ทฤษฎีบท 5.7 : ถ้า $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ และ $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ เมื่อ $\left|z-z_0\right|<R$ แล้วทุก z ซึ่ง $\left|z-z_0\right|<R$ จะได้

$$f(z)\cdot g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{4}$$

เมื่อ $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k} \qquad n=0,1,2,...$

พิสูจน์ : ให้ $G(z)=f(z)\cdot g(z)$ ดังนั้น $G(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุก z ซึ่ง $\left|z-z_0\right|<R$ และกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ได้ $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$

เมื่อ $c_n=\frac{1}{n!}G^{(n)}(z_0)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}f(z)\cdot g(z)\right]_{z=z_0}$

พิจารณา z ซึ่ง $\left|z-z_0\right|<R$ เราได้

$$G'(z)=f(z)\cdot g'(z)+f'(z)\cdot g(z)$$

$$G''(z)=f(z)\cdot g''(z)+2f'(z)\cdot g'(z)+f''(z)\cdot g(z)$$

$$G'''(z)=f(z)\cdot g'''(z)+3f'(z)\cdot g''(z)+3f''(z)\cdot g'(z)+f'''(z)\cdot g(z)$$

โดยทั่วไปสำหรับ $n=0,1,2,3,...$

$$G^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k f(z)}{dz^k}\cdot\frac{d^{n-k}g(z)}{dz^{n-k}}$$

เนื่องจาก $\frac{d^k f(z)}{dz^k}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$

และ $\frac{d^k g(z)}{dz^k}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)b_n(z-z_0)^{n-k}$

ดังนั้น $G^{(n)}(z_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left[k!a_k(n-k)!b_{n-k}\right]$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!a_k(n-k)!b_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} n!\, a_k b_{n-k}$$

ทำให้ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ตามต้องการ ■

บรรณานุกรม

[1] นริศรา สุขผ่อง **ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม** สารนิพนธ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2549.

[2] บวร น้อยแสง **จำนวนเชิงซ้อน** เอกสารประกอบการสัมมนาทางคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2548.

[3] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด 2539.

[4] วารี เกรอต **ทฤษฎีของตัวแปรเชิงซ้อน** โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร 2526.

[5] Moore,O.T. and Hadlock, H.E., **Complex Analysis**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1991.

[6] Rubenfeld,A.L.,**A First Course In Applied Complex Variables**, John Wiley & Sons, Inc.1985.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล นางสาวณิธิมา แสงจักร์

ที่อยู่ 45/1 หมู่ 10 ตำบลหนองโดน อำเภอจัตุรัส จังหวัดชัยภูมิ 36130

ที่ทำงาน โรงเรียนซับใหญ่วิทยาคม กิ่งอำเภอซับใหญ่ จังหวัดชัยภูมิ 36130

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2543 สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ โดยรับทุนการศึกษาในโครงการ รพค.

พ.ศ. 2546 ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ จังหวัดนครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2543-2547 ครูสอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนสารสิทธิ์พิทยาลัย จังหวัดราชบุรี

พ.ศ. 2547-ปัจจุบัน ครู คศ.1 โรงเรียนซับใหญ่วิทยาคม สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาชัยภูมิ เขต 3