การอินทิเกรตเชิงซ้อน

โดย

นางสาวอารีรัตน์ ว่องก๊ก

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974 - 11 - 6266 - 9

COMPLEX INTEGRATION

By

Areerat Vongkok

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974 - 11 - 6266 - 9

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง "การอินทิเกรตเชิงซ้อน" เสนอโดย นางสาวอารีรัตน์ ว่องก๊ก เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)

………../……………/……….

K 45308312 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : การอินทิเกรตเชิงซ้อน

อารีรัตน์ ว่องก๊ก : การอินทิเกรตเชิงซ้อน (COMPLEX INTEGRATION)
อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ. วารี เกรอต. 66 หน้า. ISBN 974-11-6266-9

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ เราจะศึกษาการอินทิเกรตเชิงซ้อน ซึ่งเป็นแนวคิดของการอินทิเกรตฟังก์ชันเชิงซ้อนบนเส้นโค้งที่เรียกว่าคอนทัวร์ นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทสำคัญของคอนทัวร์อินทิกรัล เมื่ออินทิแกรนด์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ได้แก่ ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชี สุดท้ายเราประยุกต์ทฤษฎีบททั้งสองในการหาค่าของรีมันน์อินทิกรัล และอิมพรอบเพออินทิกรัล

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K 45308312 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : COMPLEX INTEGRATION

AREERAT VONGKOK : COMPLEX INTEGRATION : ASSOC. PROF. WAREE KAROT. 66 pp. ISBN 974-11-6266-9

In this project we study integration of complex functions on curves called contours. We also study main theorems of contour integrals of which integrands are analytic functions. These main theorems are Cauchy-Goursat Theorem and Cauchy's Integral Formula. Finally we apply these two theorems to evaluate Riemann integrals and improper integrals.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2006

Student's signature ……………………………………………..………..……….

Master's Report Advisor's signature …………………………………..…………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ แก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่าง ๆ และช่วยเติมเต็มความรู้ จนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ และเพื่อน ๆ ร่วมรุ่นSC 26 (สาขาวิชาคณิตศาสตร์) ที่มีส่วนช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดี รวมทั้งกำลังใจจากเพื่อน ๆ ร่วมงาน

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณพ่อ และแม่ ที่ให้การสนับสนุนการศึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา รวมทั้งกำลังใจจากญาติพี่น้อง ในการศึกษาจนทำให้ประสบความสำเร็จได้ในวันนี้

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

(INTRODUCTION)

การอินทิเกรตเชิงซ้อน เป็นหัวข้อในการวิเคราะห์เชิงซ้อนที่น่าสนใจ ซึ่งมีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง ทั้งในคณิตศาสตร์ประยุกต์ ฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น

ในสารนิพนธ์นี้เราจะเริ่มศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้องในการศึกษาการอินทิเกรตของเชิงซ้อน พร้อมทั้งแนวคิดการอินทิเกรตของฟังก์ชันเชิงซ้อนบนเส้นโค้ง ศึกษาทฤษฎีบทสำคัญของคอนทัวร์อินทิกรัลเมื่ออินทิแกรนด์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ได้แก่ ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชี และการนำทฤษฎีบททั้งสองนี้ไปประยุกต์ใช้ในการหาของค่าของรีมันน์อินทิกรัล และอิมพรอบเพออินทิกรัล รายละเอียดของแต่ละบทมีดังต่อไปนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานของจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนซึ่งจำเป็นในการศึกษาการอินทิเกรตเชิงซ้อน

บทที่ 3 : ศึกษาแนวคิดการอินทิเกรตของฟังก์ชันเชิงซ้อน และคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องการค่าอินทิกรัลตามเส้นโค้งของฟังก์ชัน ที่เรียกว่า คอนทัวร์อินทิกรัล และเราจะศึกษาทฤษฎีบทสำคัญของคอนทัวร์อินทิกรัล ได้แก่ ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชี

บทที่ 4 : ศึกษาการนำคุณสมบัติของการอินทิเกรตเชิงซ้อน และทฤษฎีบทสำคัญของคอนทัวร์อินทิกรัล ไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าของรีมันน์อินทิกรัล และอิมพรอบเพออินทิกรัลบางรูป

บทที่ 2

ทฤษฎีบทพื้นฐาน

(BASIC THEOREMS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่ใช้ในการศึกษาการอินทิเกรตเชิงซ้อนโดยจะขอละการพิสูจน์ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [1] , [2] และ [3]

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ จะแทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดด้วย R และเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดด้วย R^2 นอกจากนี้สัญลักษณ์ $A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1 : ให้ I เป็นช่วงเปิด และ $a \in I$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าที่ทุกจุดใน I และอาจยกเว้นที่จุด a เราากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ a** ***(limit of f at a)*** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **หาค่าได้** ***(exists)***

บทนิยาม 2.2 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา** ***(limit of f as x approaches a from the right)*** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $0 < x - a < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ **หาค่าได้** ***(exists)***

บทนิยาม 2.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง (a,b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ b ทางซ้าย** ***(limit of f as x approaches b from the left)*** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $-\delta < x - b < 0$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ **หาค่าได้** ***(exists)***

บทนิยาม 2.4 : ให้ $D \subset R$ และ $f : D \to R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่ a** ***(continuous at a)*** เมื่อ $a \in D$ ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

บทนิยาม 2.5 : กำหนดให้ $f : [a,b] \to R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องเป็นช่วง** ***(piecewise continuous)*** บน $[a,b]$ ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $[a,b] = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$

(1) I_k เป็นช่วงปิด และ $I_{k_1}{}^{o} \cap I_{k_2}{}^{o} = \phi$ ถ้า $k_1 \neq k_2$

(2) f มีความต่อเนื่องบน $I_k{}^{o}$

(3) $\lim\limits_{x \to a_k{}^{+}} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to b_k{}^{-}} f(x)$ หาค่าได้

เราจะเขียนแทนความหมายตามบทนิยาม 2.5 ด้วยสัญลักษณ์ $f \in PC[a,b]$

บทนิยาม 2.6 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันบนช่วง $[a,b]$ ให้ $m_i = \inf\{ f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i \}$ และ

$M_i = \sup\{ f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i \}$ เราเรียก $L(P,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ ว่า**ผลบวกล่างของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P** ***(lower sum of f relative to partition P)*** และ เรียก

$U(P,f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ ว่า**ผลบวกบนของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P** ***(upper sum of f relative to partition P)***

บทนิยาม 2.7 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ถ้า $\sup\limits_{P}\{L(P,f)\} = \inf\limits_{P}\{U(P,f)\}$ เราเรียกค่าที่ได้นี้ว่า **อินทิกรัลของ f** ***(integral of f)*** บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b f(x)dx$ และกล่าวว่า f **อินทิเกรตได้** ***(integrable)*** บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.8 : ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.9 : ถ้า f และ g อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว $\alpha f + \beta g$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ สำหรับทุกจำนวนจริง α และ β

ทฤษฎีบท 2.10 : ถ้า f มีขอบเขต และต่อเนื่องที่ทุกจุดบนช่วง $[a,b]$ และอาจยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.11 : ถ้า $f:[a,b]\to R$ สอดคล้อง บทนิยาม 2.5 แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 2.12 : The First Fundamental Theorem of Calculus

ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และมีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g'=f$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f = g(b)-g(a)$$

บทนิยาม 2.13 : ระบบจำนวนเชิงซ้อน *(complex number system)* คือ ระบบ $(R^2,+,\cdot,|\,|)$ โดยที่ถ้า $z=(x,y)$ และ $w=(u,v)$ เป็นสมาชิกของ R^2 แล้ว

$$z+w=(x+u,y+v)$$
$$z\cdot w=(xu-yv,xv+yu)$$
$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

ทฤษฎีบท 2.14 : $(R^2,+,\cdot)$ เป็นฟิลด์ นั่นคือ $(R^2,+,\cdot)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ

$(a,b),(c,d)\in R^2 \Rightarrow (a,b)+(c,d)\in R^2$ และ $(a,b)\cdot(c,d)\in R^2$

(2) กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้

(2.1) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

(2.2) $[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d),(e,f)\in R^2$

(3) กฎการสลับที่

(3.1) $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

(3.2) $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d)\in R^2$

(4) กฎการแจกแจง

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d),(e,f)\in R^2$

(5) การมีเอกลักษณ์

(5.1) $(0,0)+(a,b)=(a,b)$

(5.2) $(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

ทุก ๆ $(a,b)\in R^2$ นั่นคือ $(0,0)$ และ $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกและการคูณของ R^2 ตามลำดับ

(6) การมีอินเวอร์ส

(6.1) $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

ทุก ๆ $(a,b)\in R^2$ เมื่อกำหนด (a,b) มาให้ $(-a,-b)$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้อง (6.1) นั่นคือ $(-a,-b)$ เป็นอินเวอร์สของ (a,b) สำหรับการบวก

(6.2) $(a,b)\cdot(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)$

ทุก ๆ $(0,0)\neq(a,b)\in R^2$ เมื่อกำหนด (a,b) มาให้ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้อง (6.2) นั่นคือ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ เป็นอินเวอร์สของ (a,b) สำหรับการคูณ

ข้อสังเกต 2.15 : ทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน (a,b) เราสามารถเขียน

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)$$

และถ้าเราแทน $(0,1)$ ด้วย i เรียกว่า**หน่วยจินตภาพ *(imaginary unit)*** จะได้ว่าเราสามารถเขียน (a,b) ให้อยู่ในรูป $a+ib$ เมื่อเราเขียนจำนวนเชิงซ้อน ในรูปดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่า เมื่อ $z_1=a+ib$ และ $z_2=c+id$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนแล้วเราได้

$$z_1=z_2\Leftrightarrow a=c,b=d$$

การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปใหม่จะเป็นดังนี้

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

ให้สังเกตว่าทุกจำนวนจริง a เราสามารถเขียนแทน a ด้วย $a+i0$ นอกจากนี้เราจะได้ $i^2=-1$

บทนิยาม 2.16 : ถ้า $z = (x, y)$ เป็นสมาชิกใน R^2 แล้วเรียก $(x, -y)$ ว่า**สังยุคของ z *(complex conjugate of z)*** เขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\bar{z}$

ทฤษฎีบท 2.17 : ถ้า $z = x + iy$ และ $w = u + iv$ แล้ว

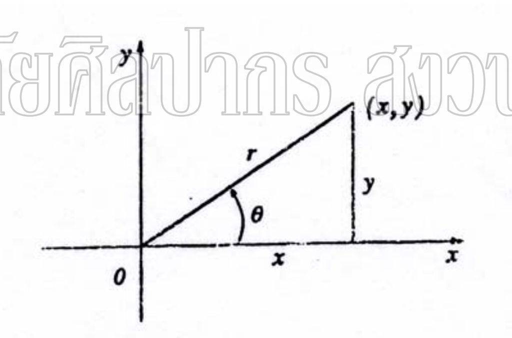
(1) $z + \bar{z} = 2R(z)$

(2) $z - \bar{z} = 2iI(z)$

(3) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(4) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

บทนิยาม 2.18 : ถ้า $z = (x, y) = x + iy$ เป็นจุดบนระนาบเชิงซ้อน เมื่อเวกเตอร์ z ทำมุม θ กับแกน x (ดูรูป 2.1) แล้ว $z = (x, y) = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เมื่อ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$



รูป 2.1

เราเรียกการเขียน z ในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่า**รูปเชิงขั้ว *(polar form)*** ของ z และเรียก θ ว่า**อาร์กิวเมนต์ *(argument)*** ของ z เขียนแทนโดย $\arg(z)$ เห็นได้ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z ไม่ได้มีเพียงค่าเดียว กล่าวคือ ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z แล้ว $\theta + 2k\pi$ ก็เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ในบางกรณีเราอาจใช้สัญลักษณ์ $r\,cis\theta$ แทนรูปเชิงขั้ว $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ข้อสังเกต 2.19 : (1) $z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|z| = 0$

(2) ถ้า $w = |w|\,cis\theta = |w|\,cis\phi \neq 0$ แล้ว $\theta - \phi = 2k\pi$ สำหรับบางค่าของจำนวนเต็ม k

(3) ถ้า $z \neq 0$ แล้วมีอาร์กิวเมนต์ของ z เพียงค่าเดียว ซึ่งเรียกว่า **อาร์กิวเมนต์หลัก *(principal argument)*** ของ z เขียนแทนโดย $Arg\, z$ ซึ่ง

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi$$

(4) ถ้า $w = r\,cis\theta$ แล้ว $\overline{w} = r\,cis(-\theta)$

ทฤษฎีบท 2.20 : ถ้า $z = r\,cis\theta$ และ $w = s\,cis\phi$ แล้ว $zw = rs\,cis(\theta + \phi)$

ข้อสังเกต 2.21 : ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว

(1) $|zw| = |z||w|$

(2) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

ทฤษฎีบท 2.22 : ถ้า $z = r\,cis\theta$ และ $w = s\,cis\phi$ และ $w \neq 0$ แล้วมี q ใน R^2 เพียงค่าเดียวซึ่ง $wq = z$ และ $q = \frac{r}{s}cis(\theta - \phi)$

โดยทฤษฎีบท 2.22 ทำให้สรุปได้ว่า เราหาค่าของ $\frac{z}{w}$ ได้ง่าย เมื่อเขียน z และ w ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว กล่าวคือ ถ้า $z = r\,cis\theta$ และ $w = s\,cis\phi$ และ $w \neq 0$ แล้ว

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}cis(\theta - \phi)$$

บทนิยาม 2.23 : ให้ $z \in R^2$, $z \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว นิยาม

$$z^0 = 1 \quad \text{และ} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

ทฤษฎีบท 2.24 : ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ *(De Moivre's Theorem)*

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ใดๆ เราได้

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ทฤษฎีบท 2.25 : ให้ $w = r\,cis\theta$ และ $n \in \mathrm{N}$ แล้วสมการ $z^n = w$ มีคำตอบทั้งหมด k ค่า คือ $z_o, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ เมื่อ

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, cis\,(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) \quad , \quad k = 0,1,2,...,n-1$$

เราเรียก $z_o, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ ว่ารากที่ n ของ w นั่นคือรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n ค่า

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงอสมการต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาการวิเคราะห์เชิงซ้อน ประการแรกเราได้อสมการต่อไปนี้

$$|z| \geq |R(z)| \geq R(z)$$

และ
$$|z| \geq |I(z)| \geq I(z)$$

ทฤษฎีบท 2.26 : ให้ z, w และ p เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

(1) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(2) $|z-w| \leq |z-p| + |p-w|$

(3) $|z-w| \leq ||z| - |w||$

บทนิยาม 2.27 : ให้ $p \in R^2$ และ $\varepsilon > 0$ นิยาม **อาณาเขตของ p *(neighborhood of p)*** ในรัศมี ε เขียนแทนโดย $N(p,\varepsilon)$ หรือ $N_\varepsilon(p)$ ดังนี้

$$N(p,\varepsilon) = \{z : |z-p| < \varepsilon\}$$

เห็นได้ชัดว่า p เป็นสมาชิกของทุกอาณาเขตของ p ในการศึกษาทางการวิเคราะห์เชิงซ้อน เราจะเกี่ยวข้องกับอาณาเขตของ p ที่ไม่มีจุด p ซึ่งจะเขียนแทนเซตนี้โดย $N'(p,\varepsilon)$ หรือ $N'_\varepsilon(p)$ นั่นคือ

$$N'(p,\varepsilon) = \{z : 0 < |z-p| < \varepsilon\}$$

บทนิยาม 2.28 : ให้ $S \subset R^2$ และ $p \in R^2$

(1) p เป็น**จุดลิมิตของ S *(limit point of S)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N'(p,\varepsilon)$ จะมีจุดใน S อย่างน้อย 1 จุด นั่นคือ

p เป็นจุดลิมิตของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $S \cap N'(p,\varepsilon) \neq \phi$

(2) ให้ S^* แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S เราเรียกเซต $S \cup S^*$ ว่า**โคลเชอร์ของ S *(closure of S)*** เขียนแทนโดย $\overline{S}$

(3) S เป็น**เซตปิด *(closed set)*** ก็ต่อเมื่อ $S^* \subset S$ นั่นคือ แต่ละจุดลิมิตของ S อยู่ใน S

(4) จุด p เป็น**จุดภายในของ S *(interior point of S)*** ก็ต่อเมื่อมี $r > 0$ ซึ่ง $N(p,r) \subset S$ และจะเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ S โดย S^{o}

(5) S เป็น**เซตเปิด *(open set)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจุด p ใน S มีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N(p,\varepsilon) \subset S$

(6) จุด p เรียกว่า**จุดขอบของ S *(boundary point of S)*** ก็ต่อเมื่อ $N(p,\varepsilon)$ มีสมาชิกของ S และสมาชิกของ $R^2 - S$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

(7) เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S เรียกว่า**ขอบของ S *(boundary of S)*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(S)$

(8) เซต S เป็น**เซตมีขอบเขต *(bounded set)*** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $r > 0$ ซึ่ง $S \subset N_r((0,0))$

(9) เซต S เป็น**เซตเชื่อมโยง *(connected set)*** ถ้าไม่มีสับเซต A, B ของ R^2 ซึ่งสอดคล้อง $S = A \cup B$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ และ $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$

(10) เซต S เป็น**โดเมน *(domain)*** ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตเปิดซึ่งเป็นเซตเชื่อมโยง และไม่เป็นเซตว่าง

(11) บริเวณ ***(region)*** ใน R^2 คือ สับเซตของ R^2 ซึ่งเป็นยูเนียนของโดเมน D กับสับเซตของ $B(D)$

บทนิยาม 2.29 : ให้ $D \subset R^2$ เราจะเรียก $f : D \to R^2$ ว่า**ฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D *(complex function on D)***

สำหรับแต่ละ $z = (x, y) \in D$ จะเขียนแทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ของ $f(z)$ ด้วย $R(f(z)) = u(x, y)$ และ $I(f(z)) = v(x, y)$

ดังนั้น $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(z) = x - iy$ จะได้ว่า $u(x, y) = x$ และ $v(x, y) = -y$ และ ถ้า $f(z) = x^2 + y^2$ จะได้ว่า $u(x, y) = x^2 + y^2$ และ $v(x, y) = 0$

บางครั้งเราอาจเขียน $f(z) = u + iv$ แทนฟังก์ชันเชิงซ้อน

บทนิยาม 2.30 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D

ให้ $z_o \in D^*$ และ $w_o \in R^2$ แล้ว จะเรียก w_o ว่า**ลิมิตของ $f(z)$ เมื่อ z เข้าใกล้ z_o *(limit of $f(z)$ as z approaches z_o)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $z \in N'_{\delta}(z_o) \cap D$ แล้ว $f(z) \in N_{\varepsilon}(w_o)$ และจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o$

บทนิยาม 2.31 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และให้ $z_o \in D$ แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน ***f* ต่อเนื่องที่ z_o (*f is continuous at* z_o)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $z \in D \cap N_{\delta}(z_o)$ แล้ว $f(z) \in N_{\varepsilon}(f(z_o))$
นั่นคือ

$$f[D \cap N_{\delta}(z_o)] \subset N_{\varepsilon}(f(z_o))$$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามด้วยสัญลักษณ์ $f \in C(z_o)$ และ ถ้า $f \in C(z_o)$ สำหรับทุก $z_o \in D$ แล้วเรากล่าวว่า ***f* ต่อเนื่องใน *D* (*f continuous in D*)** และเขียนแทนโดย $f \in C(D)$

ทฤษฎีบท 2.32 : กำหนดให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D
ถ้า $z_o = (x_o, y_o) \in D^*$ แล้ว

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = u_o + iv_o = w_o$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{z \to z_o} u(x, y) = u_o \text{ และ } \lim_{z \to z_o} v(x, y) = v_o$$

ทฤษฎีบท 2.33 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
ให้ $z_o = (x_o, y_o) \in D$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ z_o ก็ต่อเมื่อ u และ v ต่อเนื่องที่ z_o

บทนิยาม 2.34 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และให้ $z_o \in D^{\circ}$

$$\text{ถ้า } \lim_{t \to z_o} \frac{f(t) - f(z_o)}{t - z_o} \text{ หาค่าได้}$$

แล้วจะเรียกลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ *f* ที่ z_o (*derivative of f at* z_o)** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(z_o)$ หรือ $\frac{d}{dz} f(z_o)$ และกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่ z_o (*differentiable at* z_o)**

หมายเหตุ 2.35 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D พิจารณา $E = \{z : f'(z)$ หาค่าได้$\}$ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาฟังก์ชันเชิงซ้อนกำหนดบน E ด้วยค่า $f'(z)$ และจะเขียนแทนฟังก์ชันนี้โดย f' และเรียก f' ว่า**อนุพันธ์ของ f (*derivative of f*)** ในทำนองเดียวกันสัญลักษณ์ $f^{(n)}$ แทนอนุพันธ์ของ $f^{(n-1)}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ เมื่อหา $f^{(n-1)}$ ได้

ทฤษฎีบท 2.36 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว f ต่อเนื่องที่ z

ทฤษฎีบท 2.37 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน
ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $z_o = x_o + iy_o$ แล้วที่จุด (x_o, y_o) จะได้ว่า

(1) อนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x และ v_y หาค่าได้

(2) อนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x และ v_y สอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ ต่อไปนี้

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x$$

และ

$$f'(z_o) = u_x(x_o, y_o) + iv_x(x_o, y_o) = v_y(x_o, y_o) - iu_y(x_o, y_o)$$

ทฤษฎีบท 2.38 : กำหนดให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ ให้ $z_o \in D^{\circ}$ ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง u_x, u_y, v_x และ v_y หาค่าได้ที่ทุกจุดใน $N_\varepsilon(z_o)$ และ u_x, u_y, v_x, v_y ต่อเนื่อง และสอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ที่ z_o แล้ว $f'(z_o)$ หาค่าได้

ในการศึกษาคอนทัวร์อินทิกรัล ซึ่งกล่าวถึงในบทที่ 3 เราจะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเชิงซ้อนในรูปต่อไปนี้

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

และได้ผลสรุปเกี่ยวกับความต่อเนื่องและอนุพันธ์ ดังจะกล่าวในทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.39 : กำหนดให้ $z(t) = x(t) + iy(t)$ เมื่อ $t \in [a, b]$ แล้ว

(1) $z(t)$ มีลิมิตที่ $\hat{t}$ ก็ต่อเมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ มีลิมิตที่ $\hat{t}$ และ

$$\lim_{t \to \hat{t}} z(t) = \lim_{t \to \hat{t}} x(t) + \lim_{t \to \hat{t}} y(t)$$

สำหรับจุดปลายบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า $\lim\limits_{t \to a^+} z(t)$ และ $\lim\limits_{t \to b^-} z(t)$ หาค่าได้

(2) $z(t)$ ต่อเนื่องที่ t ก็ต่อเมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ ต่อเนื่องที่ t

(3) $z(t)$ มีอนุพันธ์ที่ t ก็ต่อเมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

ทฤษฎีบท 2.40 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D แล้ว จะกล่าวว่า f เป็น***ฟังก์ชันวิเคราะห์ที่*** $\boldsymbol{z_o}$ ***(analytic function at*** $\boldsymbol{z_o}$***)*** ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่ง f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน $N_r(z_o)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(z_o)$

จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันวิเคราะห์ใน S *(analytic function in S)*** ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดใน S และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(S)$

ถ้า $f \in A(R^2)$ แล้วเรียก f ว่า **ฟังก์ชันเอนไทร์ *(entire function)***
ตัวอย่างของฟังก์ชันเอนไทร์ ได้แก่ ฟังก์ชันพหุนาม

บทนิยาม 2.41 : ให้ g และ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน X และบน Y ตามลำดับ นิยาม **ฟังก์ชันคอมโพสิท *(composite function)*** $f \circ g$ ดังนี้

$$(f \circ g)(p) = f(g(p)) \text{ สำหรับแต่ละ } p \in X \text{ ซึ่ง } g(p) \in Y$$

ทฤษฎีบท 2.42 : ถ้า f และ g วิเคราะห์ได้ที่ z_o แล้วฟังก์ชันต่อไปนี้วิเคราะห์ได้ที่ z_o

(1) $f + g$

(2) $f - g$

(3) $f \cdot g$

(4) f / g ถ้า $g(z_o) \neq 0$

(5) $g \circ f$ ถ้า g วิเคราะห์ได้ที่ $f(z_o)$

ทฤษฎีบท 2.43 : ทฤษฎีฟังก์ชันผกผัน *(Inverse Function Theorem)*
ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในเซตเปิด $G \subset R^2$ แล้วจะได้ว่า

(1) f^{-1} เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $f(G)$

(2) ถ้า $w \in f(G)$ แล้ว $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ เมื่อ $z = f^{-1}(w)$

ทฤษฎีบท 2.44 : กฎลูกโซ่ ***(chain Rule)*** ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน โดยที่ $g'(z_o)$ และ $f'(g(z_o))$ หาค่าได้ แล้ว $(f \circ g)'(z_o)$ หาค่าได้ และ $(f \circ g)'(z_o) = f'(g(z_o)) \cdot g'(z_o)$

บทนิยาม 2.45 : ฟังก์ชันเชิงกำลัง ***(exponential function)*** e^z หรือ $\exp(z)$ นิยามสำหรับทุก $z = (x, y) \in R^2$ ดังนี้

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

สำหรับกรณีที่ $z = iy$ เราได้

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

ทฤษฎีบท 2.46 : ให้ $z = (x, y) \in R^2$ แล้ว ฟังก์ชันเชิงกำลัง e^z มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) e^z เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ และสอดคล้องกับ

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

(2) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

(3) $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

(4) $\left| e^z \right| = e^x$

(5) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(6) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

(7) $e^z \neq 0$

(8) $e^{z+i2n\pi} = e^z$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

ข้อสังเกต 2.47 : สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ เราได้ $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

บทนิยาม 2.48 : กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรากล่าวว่า **ลอการิทึมของ z *(logarithm of z)*** เขียนแทนโดย $\log z$ เมื่อ $z \neq 0$ นิยามค่าดังนี้

$$\log z = \ln|z| + i\arg(z)$$

เห็นได้ว่า $\log z$ มีค่าได้หลายค่าเนื่องจาก $\arg(z)$ มีค่าหลายค่า

บทนิยาม 2.49 : ลอการิทึมสำคัญ *(principal logarithm)* เขียนแทนโดย $Log\ z$ นิยามดังนี้

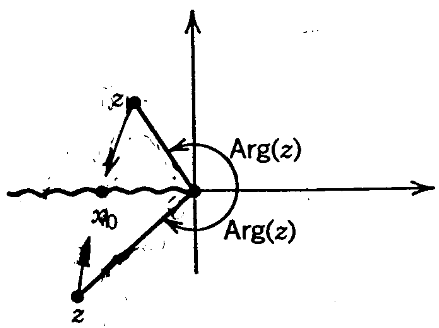
$$Log\ z = \ln|z| + iArg(z) \quad , \quad z \neq 0$$

เมื่อ $Arg(z)$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z และ $-\pi < Arg(z) \leq \pi$
เราอาจเรียกลอการิทึมสำคัญว่า **แขนงสำคัญ *(principal branch)*** ของลอการิทึม

ข้อสังเกต 2.50 : $Log\ z$ ไม่ต่อเนื่อง สำหรับ $z = x_o$ เมื่อ $x_o < 0$ เนื่องจาก

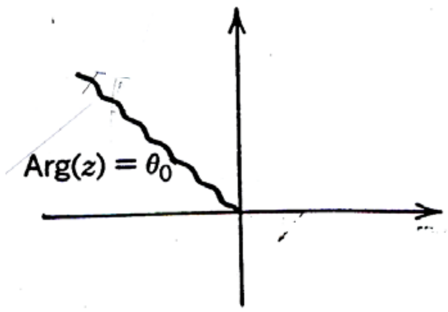
$$\lim_{z \to x_o} Arg(z) = \begin{cases} \pi & , I(z) > 0 \\ -\pi & , I(z) < 0 \end{cases}$$

ดังแสดงด้วยรูป 2.2 เราเรียกเส้นหยักในรูป 2.2 ว่าเป็น**แขนงตัด *(branch cut)*** ของ $Log\ z$ นอกจากนี้เราได้ว่า $Log\, z$ ต่อเนื่องที่ทุก z ซึ่งไม่เป็นจุดบนแขนงตัด



รูป 2.2

สำหรับแขนงทั่วไปของ $\log z$ เมื่อ $\theta_o < \arg(z) \leq \theta_o + 2\pi$ แล้วแขนงตัดของ $\log z$ คือเส้นหยักในรูป 2.3



รูป 2.3

บทนิยาม 2.51 : ฟังก์ชันกำลัง *(power function)* z^{α} เมื่อ α เป็นค่าเชิงซ้อนคงที่ และ นิยามสำหรับทุก $z = (x, y) \in R^2$ สำหรับ $z \neq 0$ ดังนี้

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

บทนิยาม 2.52 : พาร์ทิชัน P_n ของช่วง $[a,b]$ คือ เซต $\{t_o, t_1, ..., t_n\}$ ซึ่ง $a = t_o < t_1 < ... < t_n = b$

นอร์ม *(norm)* ของ P_n เขียนแทนโดย $\|P_n\|$ คือ ค่ามากสุดใน $\{t_j - t_{j-1} : j = 1,2,...,n\}$

ส่วนแต่งเติม *(augmentation)* ของ P_n คือ เซต $\{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$ ซึ่ง $t_{j-1} \le t'_j \le t_j$ ทุก $j = 1,2,...,n$

บทนิยาม 2.53 : ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงกำหนดบน γ เมื่อ $\gamma \subset R^2$ กำหนดโดย $z(t) = x(t) + iy(t)$ และ $t \in [a,b]$ สำหรับพาร์ทิชัน $P_n = \{t_o, t_1, ..., t_n\}$ ของ $[a,b]$ จะได้ลำดับ $(x_o, y_o), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ ของจุดบน γ เมื่อ $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ ทุก $i = 0,1,2,...,n$ ถ้า $Q_n = \{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$ เป็นส่วนแต่งเติมของ P_n แล้ว $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_n, y'_n)$ เป็นจุดบน γ เช่นเดียวกัน เมื่อ $x'_i = x(t'_i)$, $y'_i = y(t'_i)$ ทุก $i = 0,1,2,...,n$

กำหนด

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x'_i, y'_i)\Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

ถ้าลิมิตของ J_n มีเมื่อ $\|P_n\| \to 0$ และค่าของ J ไม่ขึ้นกับจุด $(x_i, y_i), (x'_i, y'_i)$ ทั้งหลาย เรียกลิมิต

นี้ว่า**อินทิกรัลตามเส้น** ***(line integrals)*** ของ $f(x,y)$ เทียบกับ x บน γ เขียนแทนลิมิตนี้โดย $\int_{\gamma} f(x,y)dx$

นิยามอินทิกรัลตามเส้น ของ $g(x,y)$ เทียบกับ y บน γ ได้ในทำนองเดียวกัน ดังนั้น

$$\int_{\gamma} f(x,y)dx = \lim_{\|P_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i')\Delta x_i$$

$$\int_{\gamma} g(x,y)dy = \lim_{\|P_n\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i', y_i')\Delta y_i$$

โดยทั่วไปสัญลักษณ์ $\int_{\gamma} f(x,y)dx + g(x,y)dy$ แทน $\int_{\gamma} f(x,y)dx + \int_{\gamma} g(x,y)dy$

ทฤษฎีบท 2.54 : ถ้า $f(x,y)$ ต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C เมื่อ C กำหนดโดย $z(t) = x(t) + iy(t)$ และ $t \in [a,b]$ แล้ว $\int_{C} f(x,y)dy$ หาค่าได้ และ

$$\int_{C} f(x,y)dx = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt$$

$$\int_{C} f(x,y)dy = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}dt$$

บทนิยาม 2.55 : ให้ R เป็นบริเวณปิดมีขอบเขตบนระนาบ และปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย (กล่าวถึงในบทที่ 3) เราเรียก R ว่า**บริเวณมาตรฐาน** ***(standard region)*** การ**แบ่งย่อย** ***(subdivision)*** ของ R คือ เซต $S(R) = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$ ซึ่ง $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ เมื่อแต่ละ R_i เป็นบริเวณมาตรฐาน ซึ่ง $R_i^{\circ} \cap R_j^{\circ} \neq \phi$ สำหรับ $i \neq j$

บทนิยาม 2.56 : ให้ $A \subset R^2$ นิยาม**เส้นผ่านศูนย์กลาง** ***(diameter)*** ของ A เขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\delta(A)$ ดังนี้

$$\delta(A) = \operatorname{lub}\left\{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} : (x_i, y_i), (x_j, y_j) \in A\right\}$$

บทนิยาม 2.57 : ให้ $S(R)=\{R_1,R_2,...,R_n\}$ เป็นการแบ่งย่อยของบริเวณมาตรฐาน R นิยาม**เมส** ***(mesh)*** ของ R เขียนแทนโดย $\mu_{(S(R))}$ ดังนี้

$$\mu_{(S(R))}=\max\{\delta(R_1),\delta(R_2),...,\delta(R_n)\}$$

บทนิยาม 2.58 : กำหนดให้ $f(x,y)$ ฟังก์ชันต่อเนื่อง บนบริเวณมาตรฐาน R และมีค่าไม่เป็นลบ ถ้า $\lim\limits_{\mu_{(S(R))}\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta_i A$ หาค่าได้ เมื่อ $(x_i,y_i)\in R_i$ และ $\Delta_i A$ เป็นพื้นที่ของ R_i แล้ว เรียกลิมิตนี้ว่า **อินทิกรัลสองชั้น** ***(double integral)*** ของ f บน R เขียนแทนค่าลิมิตโดยสัญลักษณ์ $\iint\limits_R f(x,y)dA$

บทที่ 3
การอินทิเกรตเชิงซ้อน
(COMPLEX INTEGRATION)

เราได้ศึกษาการอินทิเกรตฟังก์ชันของตัวแปรเดียวของจำนวนจริงมาแล้ว ในบทนี้จะศึกษาการอินทิเกรตเชิงซ้อน ซึ่งเป็นแนวคิดของการอินทิเกรตฟังก์ชันเชิงซ้อนบนเส้นโค้งที่เรียกว่า คอนทัวร์ นอกจากนี้เราศึกษาทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชี เมื่อฟังก์ชันเชิงซ้อนนั้น เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญของการอินทิเกรต และจะนำไปประยุกต์ใช้ในบทที่ 4 เริ่มต้นในหัวข้อที่ 3.1 เราจะศึกษาเส้นโค้งในระนาบ xy

3.1 เส้นโค้ง และพาราเมทไทรเซชัน (Curves and Parametrization)

เส้นโค้ง *(curve)* C ในระนาบ xy ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันค่าจริง $x(t)$ และ $y(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ และเขียนแทน C ดังนี้

(3.1.1) $$C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{เมื่อ } t \in [a,b]$$

เรียกตัวแปร t ว่า**พารามิเตอร์ของเส้นโค้ง *(parameter of the curve)*** และเรียก $z(t)$ ว่า **พาราเมทไทรเซชัน *(parametrization)*** ของ C **จุดเริ่มต้น *(initial point)*** ของ C คือ $z(a) = x(a) + iy(a)$ และ**จุดปลาย *(final point)*** ของ C คือ $z(b) = x(b) + iy(b)$ เห็นได้ว่า พาราเมทไทรเซชันของ C จะเป็นการกำหนดทิศทางจากจุดเริ่มต้นของ C ไปยังจุดปลายของ C

เรากล่าวว่า C เป็น**เส้นโค้งปิด *(closed curve)*** ถ้าจุดเริ่มต้นและจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน นั่นคือ

(3.1.2) $$z(a) = z(b)$$

เทรซของ C ***(trace of*** C***)*** เป็นเซตของจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้อง (3.1.1)

ตัวอย่าง 3.1.1 : จงหาเทรซและทิศทางของ C

$$C : z = it \qquad \text{เมื่อ} \quad t \in [-1,1]$$

วิธีทำ : เทรซของ C คือ $\{(x, y) : x = 0 \text{ และ } -1 \le y \le 1\}$
จุดเริ่มต้นและจุดปลาย ของ C คือ $z = -i$ และ $z = i$ ตามลำดับ ●

ตัวอย่าง 3.1.2 : จงหาเทรซและทิศทางของเส้นโค้ง ต่อไปนี้

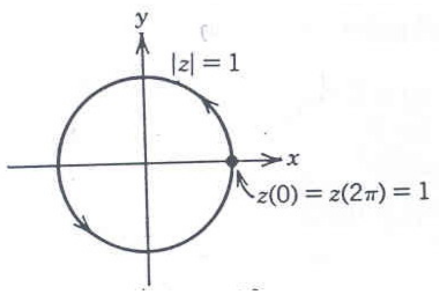
$$C_1 : z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{เมื่อ } t \in [0,2\pi]$$
$$C_2 : z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{เมื่อ } t \in [0,3\pi]$$

วิธีทำ : เทรซของ C_1 คือ $\{(x, y) : x = \cos t \text{ และ } y = \sin t \text{ เมื่อ } t \in [0,2\pi]\}$
จุดเริ่มต้นและจุดปลาย ของ C_1 คือ $z(0) = 1$ และ $z(2\pi) = 1$ ตามลำดับ ดังนั้น C_1 เป็นเส้นโค้งปิด

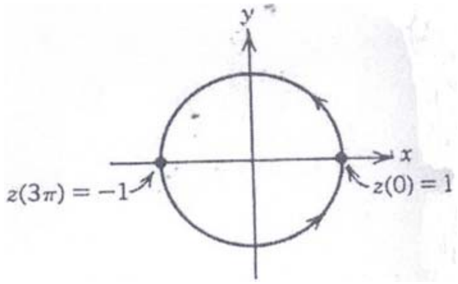
เทรซของ C_2 คือ $\{(x, y) : x = \cos t \text{ และ } y = \sin t \text{ เมื่อ } t \in [0,3\pi]\}$

จุดเริ่มต้นและจุดปลาย ของ C_2 คือ $z(0) = 1$ และ $z(3\pi) = -1$ ตามลำดับ ดังนั้น C_2 ไม่เป็นเส้นโค้งปิด

นอกจากนี้เห็นได้ว่า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่มีเทรซเดียวกัน ดังรูป 3.1.1 ●



(1) C_1



(2) C_2

รูป 3.1.1

หมายเหตุ : เรียกเส้นโค้ง C_1 ว่า**วงกลมหนึ่งหน่วย** ***(unit circle)***

เรากล่าวว่าเส้นโค้ง C ใน (3.1.1) **ต่อเนื่อง** ***(continuous)*** ถ้าฟังก์ชันเชิงซ้อน $z(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $[a,b]$ และ กล่าวว่า C **ต่อเนื่องเป็นช่วง** ***(piecewise continuous)*** ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $[a,b]=I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับ $k=1,2,\ldots,n$

(1) $I_k=[a_k,b_k]$ และ $I_{k_1}{}^{\circ} \cap I_{k_2}{}^{\circ}=\phi$ ถ้า $k_1 \neq k_2$ และ $k_1,k_2 \in \{1,2,\ldots,n\}$

(2) $z(t)$ ต่อเนื่องใน $I_k{}^{\circ}$

(3) $\lim\limits_{t \to a_k{}^+} z(t)$ และ $\lim\limits_{t \to b_k{}^-} z(t)$ หาค่าได้

ตัวอย่าง 3.1.3 : จงตรวจสอบว่าเส้นโค้ง C ต่อไปนี้ มีความต่อเนื่อง หรือมีความต่อเนื่องเป็นช่วงหรือไม่

$$C: z=z(t)=\begin{cases}(1+i)t & \text{ถ้า } 0 \le t \le 1 \\ (3-i)+(i-1)t & \text{ถ้า } 1 \le t \le 2\end{cases}$$

วิธีทำ : ประการแรกจะตรวจสอบว่าเส้นโค้ง C มีความต่อเนื่องหรือไม่

$\lim\limits_{t \to 1^-} z(t)=1+i$ และ $\lim\limits_{t \to 1^+} z(t)=2$

ดังนั้น $z(t)$ ไม่มีความต่อเนื่องที่ 1

เพราะฉะนั้น เส้นโค้ง C ไม่มีความต่อเนื่อง

ต่อไปจะแสดงว่าเส้นโค้ง C มีความต่อเนื่องเป็นช่วง

สำหรับ $t_o \in (0,1)$ เราได้

$\lim\limits_{t \to t_o} z(t)=t_o+it_o=z(t_o)$ และ

$\lim\limits_{t \to 0^+} z(t)=0=z(0)$ และ $\lim\limits_{t \to 1^-} z(t)=1+i=z(1)$

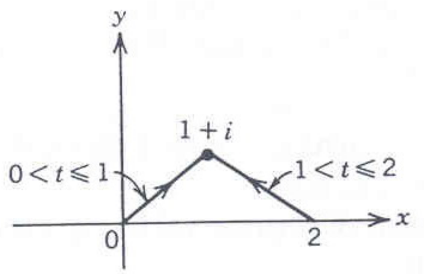
สำหรับ $t_o \in (1,2)$ เราได้

$\lim\limits_{t \to t_o} z(t)=(3-i)+(i-1)t_o$ และ

$\lim\limits_{t \to 1^+} z(t)=2=z(1)$ และ $\lim\limits_{t \to 2^-} z(t)=1+i=z(2)$

ดังนั้น $z(t)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน [0,2]

เพราะฉะนั้นเส้นโค้ง C มีความต่อเนื่องเป็นช่วง รูป 3.1.2 แสดงถึงเทรซ และทิศทางของ C ●



รูป 3.1.2

บทนิยาม 3.1.4 : กำหนดให้ $C : z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ เป็นเส้นโค้ง

(1) เราจะกล่าวว่า C **มีอนุพันธ์ *(differentiable)*** ถ้า $z'(t)$ หาค่าได้ สำหรับ $t \in [a,b]$ และจะกล่าวว่า C **มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง *(continuously differentiable)*** ถ้า $z'(t)$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก $t \in [a,b]$

(2) เส้นโค้ง C เป็น**เส้นโค้งเรียบ *(smooth curve)*** ถ้า C มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$ ทุก $t \in [a,b]$

(3) เส้นโค้ง C เป็น**เส้นโค้งเรียบเป็นช่วง *(piecewise smoot : pws)*** หรือ **คอนทัวร์ *(contour)*** เมื่อสามารถแบ่งโดเมน $[a,b]$ ของ $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ออกเป็นช่วงย่อยจำนวนจำกัด ซึ่ง $x'(t)$ และ $y'(t)$ มีความต่อเนื่องบนทุกช่วงย่อยปิด และ $z'(t) \neq 0$ ที่ทุกจุดภายในของช่วงย่อยปิด

นั่นคือ C เป็นยูเนียนของเส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัด $C_1, C_2, ..., C_n$ เมื่อจุดปลายของ C_i เป็นจุดเริ่มต้นของ C_{i+1} สำหรับ $i = 1,2,...,n-1$ และจะเขียน $C = C_1 + C_2 + ... + C_n$

ตัวอย่าง 3.1.5 : จงพิจารณาเส้นโค้งต่อไปนี้ว่าเป็นเส้นโค้งเรียบ หรือเส้นโค้งเรียบเป็นช่วงหรือไม่

(1) $C_1 : z(t) = i|t|$ เมื่อ $-1 \le t \le 1$

(2) $C_2 : z(t) = t + i|t|$ เมื่อ $-1 \le t \le 1$

วิธีทำ : (1) สำหรับ $t \in [-1,1]$ ให้ $x(t) = 0$ และ $y(t) = |t|$ ดังนั้น

$z(t) = x(t) + iy(t)$

เนื่องจาก $y'(t)$ หาค่าไม่ได้ที่ $t = 0$ และ $y'(t) = -1$ ถ้า $t \in [-1,0)$, $y'(t) = 1$ ถ้า $t \in (0,-1]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.39 (3) จะได้ว่า

$$z'(t) = \begin{cases} -i & \text{ถ้า } -1 < t < 0 \\ i & \text{ถ้า } 0 < t < 1 \end{cases}$$

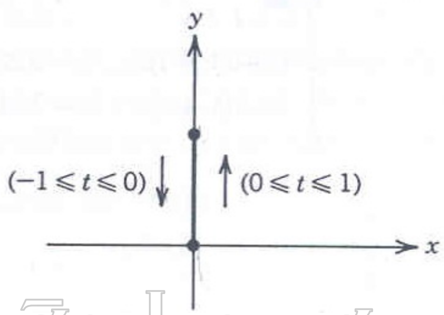
และสรุปว่า C_1 ไม่เป็นเส้นโค้งเรียบ

ต่อไปจะพิจารณาว่า C_1 เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วงหรือไม่

เนื่องจาก $t \in [-1,0]$ เราได้ $z'(t) = -i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

สำหรับ $t \in [0,1]$ เราได้ $z'(t) = i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

ดังนั้น C_1 เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ดังแสดงเทรซ และทิศทางของ C_1 ในรูป 3.1.3



รูป 3.1.3

(2) สำหรับ $t \in [-1,1]$ ให้ $x(t) = t$ และ $y(t) = |t|$ ดังนั้น $z(t) = x(t) + iy(t)$

เนื่องจาก $y'(t)$ หาค่าไม่ได้ที่ $t = 0$ และ $y'(t) = -1$ ถ้า $t \in [-1,0)$, $y'(t) = 1$ ถ้า $t \in (0,-1]$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.9 (3) จะได้ว่า

$$z'(t) = \begin{cases} 1-i & \text{ถ้า } -1 < t < 0 \\ 1+i & \text{ถ้า } 0 < t < 1 \end{cases}$$

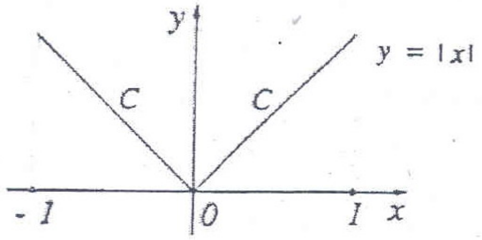
และสรุปว่า C_2 ไม่เป็นเส้นโค้งเรียบ

ต่อไปจะพิจารณาว่า C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วงหรือไม่

เนื่องจาก $t \in [-1,0]$ เราได้ $z'(t) = 1-i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

สำหรับ $t \in [0,1]$ เราได้ $z'(t) = 1+i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

ดังนั้น C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ดังแสดงเทรซ และทิศทางของ C_2 ในรูป 3.1.4



รูป 3.1.4

บทนิยาม 3.1.6 : เรากล่าวว่าเส้นโค้ง $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ เป็น**เส้นโค้งอย่างง่าย** ***(simple curve)*** ถ้า

(3.1.3) $\qquad z(t) = z(\tau)$ ก็ต่อเมื่อ $t = \tau$

นั่นคือในเชิงเรขาคณิต เส้นโค้งอย่างง่ายเป็นเส้นโค้งที่ไม่ตัดตัวเอง และกล่าวว่า C เป็น**เส้นโค้งปิดอย่างง่าย** ***(simple closed curve)*** ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดซึ่งสอดคล้อง (3.1.3) สำหรับทุกค่าของ t และ τ ยกเว้นที่จุดเริ่มต้นและจุดปลาย ตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่สำคัญในการอินทิเกรตเชิงซ้อน คือ Jordan Curve Theorem ซึ่งจะขอกล่าวถึงในที่นี้โดยขอละการพิสูจน์ เนื่องจากการพิสูจน์อยู่นอกเหนือขอบเขตของสารนิพนธ์นี้

ทฤษฎีบท 3.1.7 : Jordan Curve Theorem

ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย แล้ว C แบ่งระนาบออกเป็น 2 บริเวณซึ่งบริเวณหนึ่งมีขอบเขตและอีกบริเวณหนึ่งไม่มีขอบเขตและแต่ละบริเวณมีเทรซของ C เป็นขอบ

เรียกบริเวณที่มีขอบเขตว่า ***interior*** **ของ** $\boldsymbol{C}$ และเรียกบริเวณที่ไม่มีขอบเขตว่า ***exterior*** **ของ** $\boldsymbol{C}$ เขียนแทนโดย $I(C)$ และ $E(C)$ ตามลำดับ

บทนิยาม 3.1.8 : สำหรับเส้นโค้งปิดอย่างง่าย $C : z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ เราจะกล่าวว่า C มี**ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา** ***(counterclockwise oriented)*** ก็ต่อเมื่อ t แปรค่าในโดเมนจาก a ถึง b เราได้ว่า $z(t)$ เคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ทำให้ $I(C)$ อยู่ซ้ายมือของการเคลื่อนที่

บทนิยาม 3.1.9 : กำหนดเส้นโค้ง $C : z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ นิยามเส้นโค้ง $-C$ ดังนี้

(3.1.4) $$-C : z_1 = z(-t) \qquad \text{เมื่อ } t \in [-b,-a]$$

ข้อสังเกต 3.1.10 : เห็นได้ว่า C และ $-C$ เป็นเส้นโค้งที่มีเทรซเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

พิสูจน์ : ให้ $C : z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ และ T_1, T_2 เป็นเทรซของ C และ $-C$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$T_1 = \{ z(t) : t \in [a,b] \}$$
$$T_2 = \{ z_1(t) : t \in [-b,-a] \}$$

(1) จะแสดงว่า $T_1 \subset T_2$ ให้ $t \in [a,b]$ ดังนั้น $-t \in [-b,-a]$ และ

$$z(t) \in T_1$$

แต่

$$z(t) = z_1(-t) \in T_2$$

(2) จะแสดงว่า $T_2 \subset T_1$ ให้ $t \in [-b,-a]$ ดังนั้น $-t \in [a,b]$ และ

$$z_1(t) \in T_2$$

แต่

$$z_1(t) = z(-t) \in T_1$$

จะเห็นว่าจุดเริ่มต้นของ C คือ $z(a)$ และ $z(a) = z_1(-a)$ ซึ่งเป็นจุดปลายของ $-C$
ในทำนองเดียวกันจุดปลายของ C คือ $z(b)$ และ $z(b) = z_1(-b)$ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของ $-C$ ■

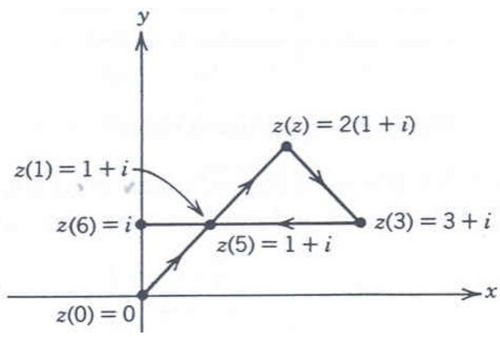
ตัวอย่าง 3.1.11 : จงแสดงว่าเส้นโค้ง C กำหนดดังต่อไปนี้

$$C : z(t) = \begin{cases} (1+i)t & 0 \le t \le 2 \\ 4i-(1-i)t & 2 < t \le 3 \\ 6-t+i & 3 < t \le 6 \end{cases}$$

เป็นคอนทัวร์

วิธีทำ : เนื่องจากบนช่วง[0,2] เราได้ $z'(t) = 1+i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$ สำหรับช่วง [2,3] เราได้ $z'(t) = 1-i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$ และ สำหรับช่วง [3,6] เราได้ $z'(t) = -1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

ดังนั้น $z'(t)$ ไม่ต่อเนื่องบน $[0,6]$ และ C เป็นคอนทัวร์ ดังแสดงเทรซ และทิศทางของ C ในรูป 3.1.5 ●



รูป 3.1.5

ตัวอย่าง 3.1.12 : จงหาเส้นโค้ง C และ $-C$ เมื่อเทรซของ C คือส่วนของเส้นตรงกำหนดโดยสมการ $y = 2x$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ $1+2i$ และ จุดปลายที่ $2+4i$

วิธีทำ : ให้ $x = t$ และ $y = 2t$ จะได้ว่า

$$C : z(t) = t + i2t \qquad \text{เมื่อ } t \in [1,2]$$

เป็นเส้นโค้งที่มีจุดเริ่มต้นที่ $(1,2)$ และจุดปลายที่ $(2,4)$ และ เทรซเป็นส่วนของเส้นตรง $y = 2x$ ดังนั้น เส้นโค้ง $-C$ กำหนดดังนี้

$$-C : z(t) = -(1+i2)t \qquad \text{เมื่อ } t \in [-2,-1]$$ ●

ตัวอย่าง 3.1.13 : จงแสดงว่าเส้นโค้ง C ซึ่งมีเทรซเป็นวงรี $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย และจงหาพาราเมทไทรเซชันของ C ซึ่งให้ทิศทางของเส้นโค้งเป็นทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ : ให้ $x = 2\cos t$ และ $y = \sin t$

จะได้ว่า $C : z(t) = 2\cos t + i\sin t$ เมื่อ $t \in [0,2\pi]$

เป็นเส้นโค้งซึ่งมีเทรซเป็นวงรี และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เนื่องจาก $z'(t) = -2\sin t + i\cos t$ สำหรับทุก $t \in [0,2\pi]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $z'(t) \neq 0$

นอกจากนี้ $z(0) = z(2\pi) = 2$ ดังนั้น C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย

เห็นได้ว่าเส้นโค้ง $-C$ เป็นดังนี้

$$-C: z(t) = 2\cos t - i\sin t \qquad \text{เมื่อ } t \in [-2\pi, 0]$$ ●

บทนิยาม 3.1.14 :

(1) ให้ $D \subset R^2$ เป็นบริเวณ เรากล่าวว่า D เป็น**บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว *(simply connected region)*** ก็ต่อเมื่อ D สอดคล้องว่า ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย ซึ่ง $C \subset D$ แล้ว $I(C) \subset D$

(2) ถ้าบริเวณ D ไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว เรากล่าวว่า D เป็น**บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง *(multiply connected region)***

ในกรณีที่ D เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว และ D เป็นโดเมน เราจะเรียก D ว่า**โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว *(simply connected domain)*** เช่นเดียวกับ ในกรณีที่ D เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง และ D เป็นโดเมน เราจะเรียก D ว่า**โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง *(multiply connected domain)***

ตัวอย่าง 3.1.15 : พิจารณาโดเมนในรูป 3.1.6

(1) (2)

รูป 3.1.6

จะเห็นว่า โดเมน รูป3.1.6 (1) เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว และโดเมนรูป3.1.6 (2) เป็นโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง ●

ต่อไปจะนิยามเส้นโค้งที่สมมูลกัน ซึ่งมีความสำคัญในการนิยามคอนทัวร์อินทิกรัล

บทนิยาม 3.1.16 : ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง กำหนดดังนี้

$C_1 : z = z_1(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$

$C_2 : z = z_2(\tau)$ เมื่อ $\tau \in [c,d]$

เรากล่าวว่า C_1 และ C_2 เป็น**เส้นโค้งที่สมมูลกัน** ***(equivalent curves)*** ถ้ามี $\phi:[c,d]\to[a,b]$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) ϕ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(2) ϕ' ต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[c,d]$

(3) $z_1(\phi(\tau)) = z_2(\tau)$ สำหรับทุก $\tau\in[c,d]$

เมื่อ $t=\phi(\tau)$

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราจะนำไปใช้โดยขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.1.17 : ให้ $C_1 : z = z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ เมื่อ $t\in[a,b]$

$C_2 : z = z_2(\tau) = x_2(\tau) + iy_2(\tau)$ เมื่อ $\tau\in[c,d]$

(1) ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่สมมูลกัน และเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง แล้ว C_1 และ C_2 จะมีจุดเริ่มต้น จุดปลาย เทรซ และทิศทางเดียวกัน

(2) ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบอย่างง่าย และไม่เป็นเส้นโค้งปิด ที่มีเทรซ จุดเริ่มต้นและจุดปลายเดียวกัน แล้ว C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่สมมูลกัน

(3) ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งปิดเรียบอย่างง่าย ที่มีเทรซ และทิศทางเดียวกัน แล้ว C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่สมมูลกัน

3.2 คอนทัวร์อินทิกรัล (Contour Integrals)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาแนวคิดของการอินทิเกรตฟังก์ชันเชิงซ้อนบนคอนทัวร์ โดยเริ่มต้นจะนิยามอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง

บทนิยาม 3.2.1 : กำหนดให้ $F:[a,b]\to R^2$ เมื่อ $F(t)=U(t)+iV(t)$ นิยาม**อินทิกรัลจำกัดเขต** ***(definite integral)*** ของ F บน $[a,b]$ เขียนแทนโดย $\int_a^b F(t)dt$ ดังนี้

(3.2.1) $$\int_a^b F(t)dt \equiv \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

ถ้า $\int_a^b U(t)dt$ และ $\int_a^b V(t)dt$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า F **อินทิเกรตได้บน** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ ***(integrable over the interval*** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$***)***

ตัวอย่าง 3.2.2 : จงหาค่าของ $\int_0^1 F(t)dt$ เมื่อ $F(t) = te^{t^2} + \frac{i}{\sqrt{t}}$

วิธีทำ : จาก $F(t)$ ที่กำหนด โดยบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 te^{t^2}dt + i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= \frac{1}{2}(e^{t^2})\Big|_0^1 + i(2\sqrt{t})\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e-1) + 2i$$

●

ตัวอย่าง 3.2.3 : จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{dt}{(t-i)}$

วิธีทำ : เนื่องจาก $\frac{1}{(t-i)} = \frac{1}{(t-i)} \cdot \frac{(t+i)}{(t+i)} = \frac{(t+i)}{(t^2+1)}$

ดังนั้น

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t-i)} = \int_0^1 \frac{t+i}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt + \int_0^1 \frac{i}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(t^2+1)]\Big|_0^1 + i\tan^{-1}t\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2) + \frac{\pi i}{4}$$

●

บทนิยาม 3.2.4 : ให้ $F:[a,b] \to R^2$ เรากล่าวว่า F **ต่อเนื่องเป็นช่วง *(piecewise continuous)*** บน $[a,b]$ ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $[a,b] = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$

(1) I_k เป็นช่วงปิด และ ${I_{k_1}}^{o} \cap {I_{k_2}}^{o} = \phi$ ถ้า $k_1 \neq k_2$

(2) F มีความต่อเนื่องใน ${I_k}^{o}$

(3) $\lim_{t \to {a_k}^{+}} F(t)$ และ $\lim_{t \to {b_k}^{-}} F(t)$ หาค่าได้

เมื่อ a_k และ b_k เป็นจุดปลายซ้ายและจุดปลายขวาของช่วง I_k ตามลำดับ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าการมีคุณสมบัติต่อเนื่องเป็นช่วงเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการอินทิเกรตได้

ทฤษฎีบท 3.2.5 : ถ้า $F:[a,b] \to R^2$ สอดคล้องบทนิยาม 3.2.4 แล้ว F อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

(3.2.2)
$$\int_a^b F(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} F(t)dt$$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $F:[a,b] \to R^2$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง และ

$$F(t) = U(t) + iV(t)$$

แล้วโดยทฤษฎีบท 2.39 (2) U และ V มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$

โดยทฤษฎีบท 2.11 สรุปได้ว่า U และ V อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} U(t)dt + i\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} V(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{a_k}^{b_k} U(t)dt + i\int_{a_k}^{b_k} V(t)dt \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} F(t)dt \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2.6 : กำหนดให้ F และ G เป็นฟังก์ชันจาก $[a,b]$ ไป R^2

(1) ถ้า F และ G อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว $\alpha F+\beta G$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ

(3.2.3) $$\int_a^b [\alpha F(t)+\beta G(t)]dt=\alpha\int_a^b F(t)dt+\beta\int_a^b G(t)dt$$

(2) ***(fundamental theorem of calculus for complex numbers)***

กำหนดให้ $G:[a,b]\to R^2$ ถ้าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ G เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขต และต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว

(3.2.4) $$\int_a^b G'(t)dt=G(t)\Big|_a^b=G(b)-G(a)$$

พิสูจน์ : (1) เป็นผลที่ได้จากบทนิยาม 3.2.1 และ ทฤษฎีบท 2.9

(2) กำหนดให้ $G:[a,b]\to R^2$ และ G' มีขอบเขต และต่อเนื่องบน $[a,b]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.8 และโดยบทนิยาม 3.2.1 สรุปได้ว่า G อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\int_a^b G'(t)dt=\int_a^b\left[U'(t)+iV'(t)\right]dt$$

โดยทฤษฎีบท 2.12 จะได้ว่า

$$\int_a^b U'(t)dt=U(b)-U(a)$$

และ

$$\int_a^b V'(t)dt=V(b)-V(a)$$

ดังนั้น

$$\int_a^b G'(t)dt=\int_a^b U'(t)dt+i\int_a^b V'(t)dt$$

$$=\left[U(b)-U(a)\right]+i\left[V(b)-V(a)\right]$$

$$=\left[U(b)+iV(b)\right]-i\left[U(a)+V(a)\right]$$

$$= G(b) - G(a) \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2.7 : กำหนดให้ $F:[a,b] \to R^2$ และ F อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว $|F|$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

(3.2.5) $$\left| \int_a^b F(t)dt \right| \le \int_a^b |F(t)|\, dt$$

พิสูจน์ : ให้ $F(t) = U(t) + iV(t)$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ให้ $I = \int_a^b F(t)dt$ เขียน I ในรูปเชิงขั้วได้ คือ $I = |I| e^{i\theta}$

จะแสดงว่า $\mathrm{Re}(I) = \int_a^b \mathrm{Re}[F(t)]dt$ เนื่องจาก

$$I = \int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Re}(I) = \mathrm{Re}\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}[F(t)]dt$$

จะแสดงว่า $|I| = \int_a^b \mathrm{Re}[e^{i\theta}F(t)]dt$ เนื่องจาก

$$|I| e^{i\theta} = \int_a^b F(t)dt$$

$$|I| = e^{-i\theta}\int_a^b F(t)dt$$

$$= \int_a^b e^{-i\theta} F(t)dt$$

เพราะว่า $|I|$ เป็นจำนวนจริง เราสรุปได้ว่า

$$|I| = \text{Re}\int_a^b e^{-i\theta}F(t)dt = \int_a^b \text{Re}[e^{-i\theta}F(t)]dt$$

จะแสดงว่า $\left|\int_a^b F(t)dt\right| \le \int_a^b |F(t)|\, dt$ เนื่องจาก

$$\text{Re}[e^{-i\theta}F(t)] \le \left|e^{-i\theta}F(t)\right| = \left|e^{-i\theta}\right||F(t)| = |cis(-\theta)||F(t)|$$

ดังนั้น

$$|I| = \int_a^b \text{Re}[e^{-i\theta}F(t)]dt \le \int_a^b |F(t)|\,dt$$

เพราะฉะนั้น $\left|\int_a^b F(t)dt\right| \le \int_a^b |F(t)|\, dt$ ■

บทนิยาม 3.2.8 : กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่มีอนุพันธ์ เมื่อ

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{เมื่อ } a \le t \le b$$

นิยาม**ความยาวของเส้นโค้ง C** ***(length of C)*** เขียนแทนโดย L ดังนี้

(3.2.6) $$L = \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int_a^b \left\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right\}^{1/2} dt$$

เราเห็นได้ว่า ในกรณีที่ C เป็นเส้นโค้งเรียบ $L(C)$ จะหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.2.9 : จงหาความยาวของเส้นโค้ง $C : z(t) = (1+i)t^2, t \in [-1,1]$

วิธีทำ : $z'(t) = 2t(1+i)$

$$L = \int_{-1}^{1} |2t(1+i)|\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left\{(2t)^2 + (2t)^2\right\}^{1/2} dt = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{2}\, t\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\int_{-1}^{1} t\, dt\right] = 2\sqrt{2}\left[\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{1} t\, dt\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{1}\right] = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\sqrt{2}$$ ●

บทนิยาม 3.2.10 : กำหนดให้ $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ สำหรับ $t \in [a,b]$ เป็นเส้นโค้งเรียบ และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ นิยามบนเทรซของ C

เรานิยาม**คอนทัวร์อินทิกรัล *(contour integral)*** ของ f บน C เขียนแทนโดย $\int_C f(z)dz$ ดังนี้

(3.2.7) $$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

เมื่อ $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$

เรากล่าวว่า f **อินทิเกรตได้บน C *(integrable over C)*** เมื่ออินทิกรัลทางขวามือของ (3.2.7) หาค่าได้

บทนิยาม 3.2.11 : ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ซึ่ง $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ และ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนนิยามบนเทรซของ C

เรานิยาม**คอนทัวร์อินทิกรัล *(contour integral)*** ของ f บน C เขียนแทนโดย $\int_C f(z)dz$ ดังนี้

(3.2.8) $$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

และกล่าวว่า f อินทิเกรตได้บน C ถ้าอินทิกรัลแต่ละเทอมทางขวามือของ (3.2.8) หาค่าได้ เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ f ที่จะอินทิเกรตได้บนเส้นโค้งเรียบ C คือ f ต่อเนื่องเป็นช่วงบน C ดังจะพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.12 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงบนเทรซของเส้นโค้งเรียบ $C : z = z(t)$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน C และ

(3.2.9) $$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

เมื่อ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

พิสูจน์ : ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบนเทรซของเส้นโค้งเรียบ $C : z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$

จากบทนิยาม 3.2.10 เราได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]dt +$$
$$i[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)] +$$
$$i\int_a^b [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.13 : ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบอย่างง่าย ที่มีเทรซ จุดเริ่มต้นและจุดปลายเดียวกัน (หรือ ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งปิด ที่มีทิศทางเดียวกัน) แล้ว ถ้า $f(z)$ มีความต่อเนื่องในบางโดเมนที่เป็นจุดภายในเทรซของ C_1 และ C_2 จะได้ว่า

(3.2.10) $$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 3.1.17 (3) จะได้ว่า C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งที่สมมูลกัน ดังนั้น มี $\phi:[c,d]\to[a,b]$ ซึ่งสอดคล้องบทนิยาม 3.1.16 และ

$$C_1 : z = z_1(t) \qquad \text{เมื่อ } t \in [a,b]$$

$$C_2 : z = z_1(\phi(\tau)) \qquad \text{เมื่อ } \tau \in [c,d]$$

และ $t = \phi(\tau)$

โดยบทนิยามของคอนทัวร์อินทิกรัล เราได้

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z)dz &= \int_c^d f(z_1(\phi(\tau)))\frac{d}{d\tau}[z_1(\phi(\tau))]d\tau \\ &= \int_c^d f(z_1(\phi(\tau)))z_1'(\phi(\tau))\frac{d\phi}{d\tau}d\tau \\ &= \int_a^b f(z_1(t))z_1'(t)dt \qquad \text{(แทนค่า } t=\phi(\tau)\text{)} \\ &= \int_{C_1} f(z)dz\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 3.2.14 : จงหาค่าของ $\int_C (x + y^2 + ixy)dz$

$$\text{เมื่อ } C : z = z(t) = \begin{cases} t+2i & , \quad 1 \le t \le 2 \\ 2+i(4-t) & , \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

วิธีทำ : ในที่นี้ C เป็นคอนทัวร์ และ $C = C_1 + C_2$ ดังแสดงเทรซของ C_1 และ C_2 (ดูรูป 3.2.1)

ให้ $f(z) = x + y^2 + ixy$ เมื่อ $z = x + iy$

ดังนั้น

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

ในการหาค่าของ $\int_{C_1} f(z)dz$ เราให้

$$z(t) = t + 2i \qquad \text{เมื่อ } 1 \le t \le 2$$

ดังนั้น

$$z'(t) = 1$$

และ

$$f(z(t))z'(t) = f(t+2i) = (t+4) + i(2t)$$

ดังนั้นโดยบทนิยาม 3.2.10 จะได้ว่า

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_1^2 (t+4)dt + i\int_1^2 2tdt$$

$$= (\frac{t^2}{2} + 4t)\Big|_1^2 + i(t^2)\Big|_1^2$$

$$= \frac{31}{2} + 3i$$

ในทำนองเดียวกันเราหาค่าของ $\int_{C_2} f(z)dz$ โดยให้

$$z(t) = 2 + i(4-t) \qquad \text{เมื่อ } 2 \le t \le 3$$

ดังนั้น

$$z'(t) = -i$$

และ

$$\begin{aligned} f(z(t))z'(t) &= f(2+i(4-t))(-i) \\ &= (20 + t^2 - 8t + 16i - 4ti)(-i) \\ &= -20i - t^2 i - 8ti + 16 - 4t \\ &= (16-4t) - i(t^2 + 8t + 20) \end{aligned}$$

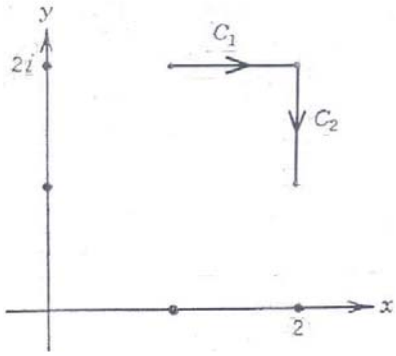
ดังนั้นโดยบทนิยาม 3.2.10 จะได้ว่า

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_2^3 (16-4t)dt - i\int_2^3 (t^2 + 8t + 20)dt$$

$$= (16t - 2t^2)\Big|_2^3 - i(\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 20t)\Big|_2^3$$

$$= 6 - \frac{139}{3}i$$

เพราะฉะนั้น $\int\limits_C (x+y^2+ixy)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz = \frac{17}{2} - \frac{4}{3}i$ ●



รูป 3.2.1

หมายเหตุ : สำหรับ $\int\limits_C f(z)dz$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเรียบ เราจะใช้ทิศทางของ C ที่เป็นทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 3.2.15 : ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเรียบกำหนด ดังนี้

$$C : z(t) = i + e^{it} \quad \text{เมื่อ } 0 \le t \le 2\pi$$

จงหา

(1) $\int\limits_C z dz$ (2) $\int\limits_C \bar{z} dz$ (3) $\int\limits_C \frac{1}{(z-i)^n} dz \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

วิธีทำ : เทรซของ C เป็นวงกลม ดังแสดงในรูป 3.2.2 โดยทฤษฎีบท 3.1.4 (2) จะได้ว่า

$$z'(t) = ie^{it}$$

(1) ให้ $f(z) = z$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(z(t))z'(t) &= z(t)z'(t) \\ &= (i+e^{it})(ie^{it}) = ie^{2it} - e^{it} \end{aligned}$$

$$\int_C z\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{2it}\,dt - \int_0^{2\pi} e^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2it})\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{i}(e^{it})\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(2) ให้ $f(z) = \bar{z}$

ดังนั้น

$$f(z(t))z'(t) = \overline{z(t)}z'(t)$$

$$= (-i + e^{-it})(ie^{it})$$

$$= i + e^{it}$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dt - \int_0^{2\pi} e^{it}\,dt$$

$$= (it)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{i}(e^{it})\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi i$$

(3) ให้ $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^n}$

ดังนั้น

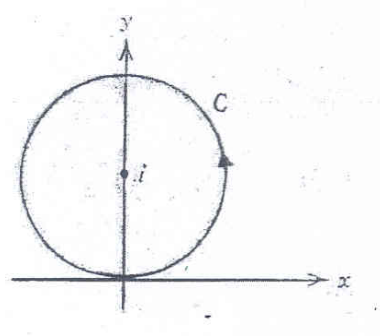
$$f(z(t))z'(t) = \frac{1}{(z(t)-i)^n}\,z'(t)$$

$$= \frac{1}{((i+e^{it})-i)^n}(ie^{it})$$

$$= i(e^{it})^{1-n}$$

$$\int_C \frac{1}{(z-i)^n}\,dz = \int_0^{2\pi} i(e^{it})^{1-n}\,dt$$

$$= \begin{cases} (it)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i & \text{เมื่อ } n = 1 \\ -(e^{-it})\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{เมื่อ } n \neq 1 \end{cases}$$



รูป 3.2.2

ตัวอย่าง 3.2.16 : จงหาค่าของ $\int_C \sqrt{z}dz$ เมื่อ $C : z(t) = e^{it}$ สำหรับ $t \in [0,2\pi]$ และ ใช้แขนงสำคัญของ $z^{1/2}$

วิธีทำ : ถ้าใช้อาร์กิวเมนต์หลักของ e^{it} เราได้ว่าทุก $z(t) = e^{it}$ จะได้ว่า

$$-\pi < Arg(e^{it}) \le \pi \qquad \text{เมื่อ } t \in [0,2\pi]$$

เนื่องจาก

$$\arg(e^{it}) = t + 2\pi n \quad ,n = 0,\pm1,...$$

ดังนั้นทุก $z(t)$ บน C

$$Arg[z(t)] = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le \pi \\ t - 2\pi & , \quad \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

แขนงสำคัญของ $z^{1/2}$ คือ

$$\sqrt{z(t)} = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z(t)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\left[\ln|z(t)| + iArg(z(t))\right]} \qquad \text{เมื่อ } z \ne 0$$

และจาก $|z(t)| = 1$

จะได้ว่า

$$\sqrt{z(t)} = e^{\frac{i}{2}Arg[z(t)]}$$

ดังนั้น

$$\sqrt{z(t)} = \begin{cases} e^{it/2} & , \quad 0 \le t \le \pi \\ e^{(i/2)(t-2\pi)} & , \quad \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

นอกจากนี้ $z'(t) = ie^{it}$ และโดยบทนิยาม 3.2.10

$$\int_C \sqrt{z}dz = \int_0^{2\pi} \sqrt{z(t)}ie^{it}dt$$

$$= \int_0^{\pi} ie^{3it/2}dt + \int_{\pi}^{2\pi} ie^{-\pi i}e^{3it/2}dt$$

$$= (-\frac{2}{3} - \frac{2i}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{2i}{3})$$

$$= -\frac{4i}{3}$$ ●

โดยทฤษฎีบท 3.2.12 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.17 : ให้ C เป็นคอนทัวร์ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วงบนเทรซของ C แล้ว f อินทิเกรตได้บน C แล้วได้ว่า

(1) ถ้า f และ g อินทิเกรตได้บน C แล้ว $\alpha f + \beta g$ อินทิเกรตได้บน C และ

(3.2.11) $$\int_C [\alpha f + \beta g]dz = \alpha \int_C fdz + \beta \int_C gdz$$

สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน α และ β

(2) ถ้า f อินทิเกรตได้บน C แล้ว $|f(z)|$ อินทิเกรตได้บน C และ

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

ดังนั้น ถ้า $|f(z)| \le M$ สำหรับ z บนเทรซของ C แล้ว

(3.2.12) $$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML$$

เมื่อ L เป็นความยาวของ C

(3) ถ้า f อินทิเกรตได้บน C แล้ว $f(z)$ อินทิเกรตได้บน $-C$ และ

(3.2.13) $$\int_{-C} f(z)dz = -\int_{C} f(z)dz$$

(4) ถ้า $F(z)$ มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนที่มีเทรซของ C เป็นจุดภายใน แล้ว

(3.2.14) $$\int_{C} F'(z)dz = F(z)\Big|_{z_o}^{z_1} = F(z_1) - F(z_o)$$

เมื่อ z_o และ z_1 เป็นจุดเริ่มต้นปละจุดปลายของ C ตามลำดับ

โดยเฉพาะเมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิด จะได้ว่า $\int_{C} F'(z)dz = 0$

พิสูจน์ : (1) เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.2.6 (1)

(2) เนื่องจาก f อินทิเกรตได้บน C ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.7 สรุปได้ว่า $|f|$ อินทิเกรตได้บน C และจะได้

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| = \left|\int_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt\right|$$

$$\leq \int_{a}^{b} |f(z(t))z'(t)|dt$$

$$= \int_{a}^{b} |f(z(t))||z'(t)|dt$$

ถ้า $|f(z)| \leq M$ จะได้ว่า

$$\left|\int_{C} f(z)dz\right| \leq \int_{a}^{b} M|z'(t)|dt$$

$$= M\int_{a}^{b} |z'(t)|dt$$

$$= ML$$

(3) $$\int_{-C} f(z)dz = -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)dt$$

$$= \int_{b}^{a} f(z(\tau))z'(\tau)d\tau \qquad \text{เมื่อ } \tau = -t$$

$$= -\int_{C} f(z)dz$$

(4) ให้ $F = u + iv$ และ $z(t) = x(t) + iy(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$

เพราะว่า $F'(z) = f(z)$

ดังนั้น

$$[F(z(t))]' = F'(z(t))z'(t)$$

$$= f(z(t))z'(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{C} F'(z)dz = \int_{C} f(z)dz$$

$$= \int_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_{a}^{b} F'(z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_{a}^{b} [F(z(t))]'dt$$

$$= F(z(t))\Big|_{a}^{b}$$

$$= F(z(b)) - F(z(a))$$

$$= F(z_1) - F(z_o) \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้นำไปใช้ในบทที่ 4 เราจะขอกล่าวถึงโดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.2.18 : การเปลี่ยนตัวแปร ***(Change of Variables)***

ให้ C_z เป็นคอนทัวร์ในระนาบเชิงซ้อน z และ $w = g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งมีอินเวอร์ส และ $g' \neq 0$ ในบางอาณาเขตทุกจุดในเทรซของ C_z ไปยังคอนทัวร์ C_w ในระนาบเชิงซ้อน w ถ้า f อินทิเกรตได้บน C_z เราได้ว่า

(3.2.15)
$$\int_{C_z} f(z)dz = \int_{C_w} \frac{f(g^{-1}(w))dw}{g'(g^{-1}(w))}$$

เมื่อ $w(C_z) = C_w$

3.3 ทฤษฎีบทหลักมูลของคอนทัวร์อินทิกรัล (Fundamental Theorems of Contour Integrals)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาทฤษฎีบทหลักมูลของคอนทัวร์อินทิกรัล ซึ่งมีการประยุกต์ตัวอย่างกว้างขวาง คือ ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชี ก่อนอื่นจะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทของกรีน โดยขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 3.3.1 : ทฤษฎีบทของกรีน *(Green's Theorem)*

ให้ D เป็นบริเวณภายในของเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย และ เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ถ้า $\phi(x, y)$ และ $\psi(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ต่อเนื่องบน $D \cup C$ แล้ว

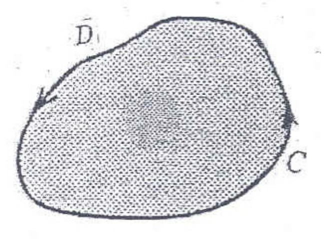
(3.3.1)
$$\int_C \phi dx + \psi dy = \iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy$$

สามารถดูการพิสูจน์จาก [6]

ทฤษฎีบท 3.3.2 : ทฤษฎีบทของโคชี – กอซาท์ *(Cauchy – Goursat Theorem)*

กำหนดให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย และ $D = C \cup I(C)$ (ดูรูป 3.1.1)
ถ้า $f \in A(D)$ แล้ว

(3.3.2) $$\int_C f(z)dz = 0$$



รูป 3.3.1

พิสูจน์ : ในหัวข้อต่อไปเราจะแสดงว่าฟังก์ชันวิเคราะห์มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ โดยกำหนดว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ให้

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

และ

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{เมื่อ} \quad t \in [a,b]$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.12

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.1

$$\int_C f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$= \iint_D [-(v_x + u_y) + i(u_x - v_y)]dxdy$$

โดยทฤษฎีบท 2.37 $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$

ดังนั้น $$\int_C f(z)dz = 0$$ ■

ตัวอย่าง 3.3.3 : จงแสดงว่า $\int_C \frac{dz}{2+z^4} = 0$ เมื่อ C คือ วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ : ให้ $f(z) = \frac{1}{2+z^4}$

เนื่องจากรากที่ 4 ของ -2 มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับ $\sqrt[4]{2}$ ซึ่งมากกว่า 1

ดังนั้น $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ ทุกจุดบน C และทุกจุดซึ่งอยู่ภายใน C

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.2

$$\int_C \frac{dz}{2+z^4} = 0 \qquad \bullet$$

ตัวอย่าง 3.3.4 : ให้ z_o เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย ซึ่ง $z_o \in E(C)$ จงแสดงว่า $\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ : ให้ $D = C \cup I(C)$ และ

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$$

ดังนั้น $f(z) \in A(D)$ โดยทฤษฎีบท 3.3.2

เราได้ว่า $$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0 \qquad \bullet$$

ผลสืบเนื่องที่สำคัญของทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ คือ ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.5 : ให้ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว และ $f \in A(D)$ ถ้า C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์อย่างง่ายใน D ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดปลาย เดียวกัน แล้ว

(3.3.3) $$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

พิสูจน์ : ให้ C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์อย่างง่ายใน D (ดูรูป 3.3.2(1)) ซึ่งมีจุดเริ่มต้น z_o และจุดปลาย z_1 ดังนั้น $C_1 - C_2$ เป็นคอนทัวร์อย่างง่ายที่อยู่ใน D โดยทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)dz = 0$$

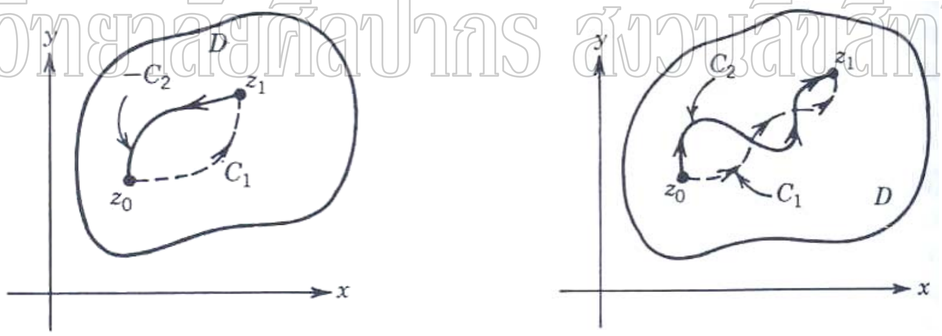
เนื่องจาก

$$\int_{C_1 - C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

$$= \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

ดังนั้น

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$



(1) (2)

รูป 3.3.2

ข้อสังเกต 3.3.6 : (1) จากทฤษฎีบท 3.3.5 เราสรุปได้ว่าค่าของ $\int_C f(z)dz$ ไม่ขึ้นกับเทรซของ C กล่าวคือ ไม่ว่า C ซึ่งเป็นคอนทัวร์อย่างง่ายใน D โดยมีจุดเริ่มต้น z_o และจุดปลาย z_1 จะมีเทรซลักษณะใด จะได้ค่า $\int_C f(z)dz$ มีค่าคงที่ และจะเขียนแทนค่าอินทิกรัลนี้โดย $\int_{z_o}^{z_1} f(z)dz$

(2) ทฤษฎีบท 3.3.5 ยังคงเป็นจริง ถึงแม้ว่า C_1 และ C_2 จะตัดกันจำนวนจำกัดครั้ง (ดูรูป 3.3.2(2)) เนื่องจากเราจะพิจารณาผลบวกจำกัดของอินทิกรัลบนคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย

ตัวอย่าง 3.3.7 : จงหาค่า $\int_C \frac{z}{(1+z^2)} dz$ เมื่อ C เป็นครึ่งวงกลม $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ซึ่งอยู่เหนือแกน x

วิธีทำ : ให้ $f(z) = \dfrac{z}{(1+z^2)}$ และ $F(z) = \frac{1}{2}[\log(1+z^2)]$

ดังนั้น $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดยกเว้นที่ $z=-i$ หรือ $z=i$

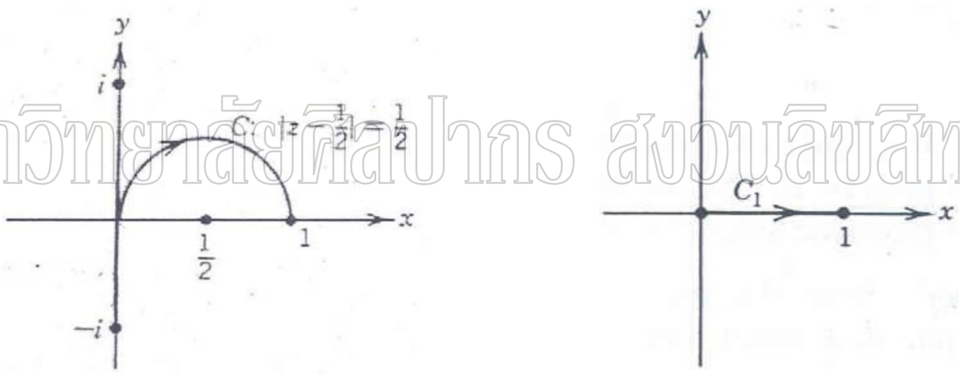
ให้ C_1 เป็นส่วนของเส้นตรงที่ $(0,0)$ และ $(1,0)$

ดังนั้น C_1 กำหนดโดย $C_1 : z(t) = t$ เมื่อ $t \in [0,1]$

โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)} dt = \frac{1}{2}(\ln 2)$$

●



(1) (2)

รูป 3.3.3

ทฤษฎีบท 3.3.8 : Indefinite Integrals

กำหนดให้ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว และ $f \in A(D)$

ให้ $z_o \in D$ นิยามฟังก์ชัน F สำหรับทุก z ใน D ดังนี้

$$F(z) = \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

แล้วได้ว่า

(1) $F \in A(D)$

(3.3.4) $$F'(z) = f(z)$$

(2) สำหรับทุก $z_1 \in D$ จะได้ว่า

(3.3.5)
$$\int_{z_o}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_o)$$

พิสูจน์ : (1) ให้ $z \in D$ เราต้องการแสดงว่า

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = 0$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน h ซึ่ง $z+h \in D$ เราได้ว่า

$$F(z+h)-F(z) = \int_{z_o}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

เนื่องจาก

$$f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta$$

ดังนั้น

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{z_o}^{z+h}[f(\zeta) - f(z)]d\zeta\right|$$

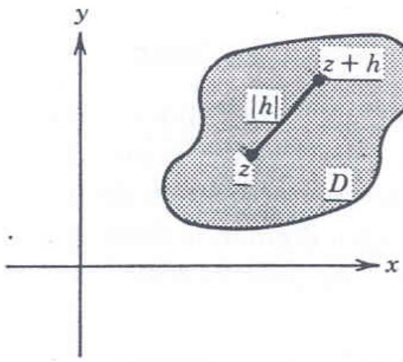
ถ้าเลือก $|h|$ เล็กพอ และเลือกคอนทัวร์อย่างง่าย C เป็นส่วนของเส้นตรง ซึ่งมีความยาว $|h|$ (ดูรูป 3.3.4) แล้วจะได้

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{M_h|h|}{|h|} = M_h$$

เมื่อ M_h เป็นค่ามากสุดของ $|f(\zeta) - f(z)|$ บนเซต $\{\zeta : |\zeta - z| \le h\}$
เนื่องจาก f มีความต่อเนื่อง เราสามารถเลือก $|h|$ ให้เล็กพอ ซึ่งจะทำให้ M_h มีค่าน้อยเท่าที่ต้องการ ดังนั้น

$$F'(z) = f(z)$$

(2) เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.2.17(4) ■



รูป 3.3.4

ทฤษฎีบท 3.3.9 : ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ สำหรับโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง *(Cauchy –Goursat for multiply connected domain)*

ให้ $C_o, C_1, C_2, ..., C_n$ เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน R^2 ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

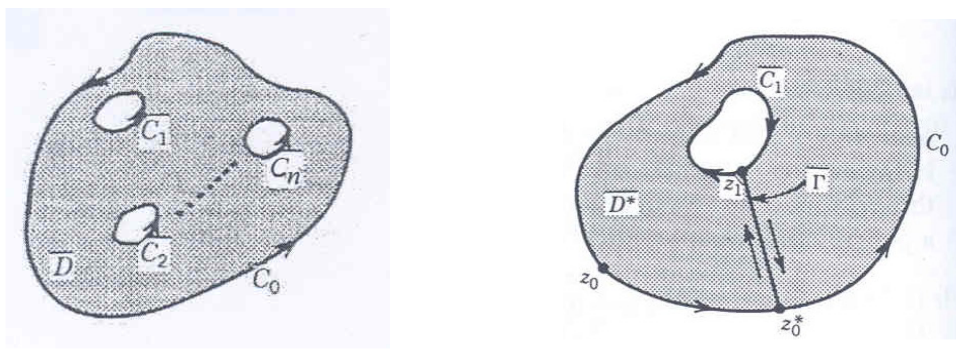
(1) $C_j \subset I(C_o)$ เมื่อ $j = 1,2,...,n$

(2) $C_j \subset E(C_k)$ ถ้า $j,k \in \{1,2,...,n\}$ และ $j \neq k$

ถ้า $f \in A(D)$ เมื่อ $D = C_o \cup I(C_o) - \bigcup_{j=1}^{n} (I(C_j))$

แล้ว

(3.3.6) $$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$



(1) (2)

รูป 3.3.5

พิสูจน์ : เราจะพิจารณาการพิสูจน์ตามรูป 3.3.5 (2) เมื่อ $n = 1$
จะได้ว่า

$$C = \Gamma + (-C_1) + (-\Gamma) + C_o$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า

$$\int_C f(z)dz = 0$$

และ

$$\int_C f(z)dz = \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{C_o} f(z)dz = 0$$

$$= -\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_o} f(z)dz = 0$$

ดังนั้น

$$\int_{C_o} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $n > 1$ ในทำนองเดียวกัน $\int_{C_o} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$ ■

ตัวอย่าง 3.3.10 : จงหาค่า $\int_C \frac{1}{z(z-1)} dz$ เมื่อ C เป็นรูปสี่เหลี่ยม ดังรูป 3.3.6

วิธีทำ : ให้ $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$
เนื่องจาก $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจุด z ยกเว้นที่ $z = 0$ หรือ $z = 1$
ให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลม $|z-1| = \frac{1}{3}$ และ $|z| = \frac{1}{3}$ ตามลำดับ
$C_1 : z(t) = \frac{1}{3}e^{it} + 1$ และ $C_2 : z(t) = \frac{1}{3}e^{it}$ เมื่อ $t \in [0, 2\pi]$
โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่า

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

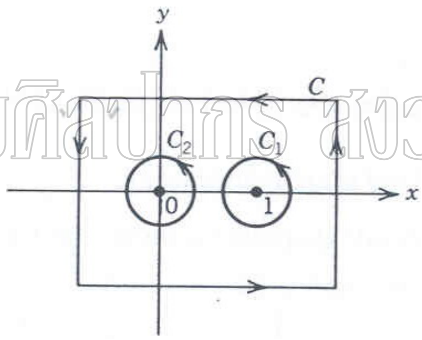
$$= \int_{C_1} (\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z})dz + \int_{C_2} (\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z})dz$$

$$= \left[\int_{C_1} \frac{1}{z-1} dz - \int_{C_1} \frac{1}{z} dz \right] + \left[\int_{C_2} \frac{1}{z-1} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z} dz \right]$$

$$= \int_{C_1} \frac{1}{z-1} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} i dt - \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

●



รูป 3.3.6

ทฤษฎีบท 3.3.11 : สูตรอินทิกรัลของโคชี *(The Cauchy Integral Formula)*

ให้ D เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว และ C เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่ายใน D ถ้า $z_o \in I(C)$ และ $f \in A(D)$ แล้ว

(3.3.7) $$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_o} dz = f(z_o)$$

พิสูจน์ : ให้ $z_o \in I(C)$ เนื่องจาก z_o เป็นจุดภายในของ f ดังนั้น จะมี C_o ซึ่ง $C_o \subset I(C)$
สมมติ C_o เป็นวงกลม $|z - z_o| = R_o$

โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o}dz = \int_{C_o} \frac{f(z)}{z-z_o}dz$$

$$= \int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)+f(z_o)}{z-z_o}dz$$

$$= \int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz + f(z_o)\int_{C_o} \frac{1}{z-z_o}dz$$

โดยตัวอย่าง 3.2.15 (3) เราได้ว่า

$$\int_{C_o} \frac{1}{z-z_o}dz = 2\pi i$$

ดังนั้น

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_o}dz - 2\pi i f(z_o)\right| = \left|\int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz\right|$$

เนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จึงมีความต่อเนื่องที่ทุกจุดซึ่งอยู่ใน $C_o \cup I(C_o)$
ดังนั้น ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|z-z_o| < \delta \quad \text{แล้ว} \; |f(z)-f(z_o)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

เมื่อเลือก $R_o < \delta$ และ จะได้ว่าความยาวของ C_o เป็น $2\pi R_o$

$$\left|\int_{C_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}dz\right| \le \left(\frac{\varepsilon}{4\pi R_o}\right)(2\pi R_o) = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

ดังนั้น $$\int_C \frac{f(z)}{z-z_o}dz = 2\pi i f(z_o)$$ ■

ตัวอย่าง 3.3.12 : จงหาค่าของ $\int_C \frac{1}{z}dz$ เมื่อ

(1) C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย

(2) C เป็นวงรี $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$

วิธีทำ : (1) ให้ $f(z)=1$
เนื่องจาก $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจุด $z \in R^2$
ดังนั้น ถ้าให้ $D=R^2$ และ $z_o=0$ แล้ว $z_o \in I(C)$
โดยทฤษฎีบท 3.3.11 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0)$$

$$= 2\pi i$$

(2) ให้ $f(z)=1$
เนื่องจาก $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจุด $z \in R^2$
ดังนั้น ถ้าให้ $D=R^2$ และ $z_o=0$ แล้ว $z_o \in I(C)$
โดยทฤษฎีบท 3.3.11 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0)$$

$$= 2\pi i$$ ●

ตัวอย่าง 3.3.13 : จงหาค่าของ $\int_C \frac{e^z}{z-1}dz$ เมื่อ C คือ วงกลม $|z-1/2|=1$

วิธีทำ : ให้ $f(z)=e^z$ เห็นได้ว่า $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
ถ้าให้ $D=R^2$ และ $z_o=1$ แล้ว $z_o \in I(C)$
และโดยทฤษฎีบท 3.3.11 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f(z)}{z-1}dz = (2\pi i)(f(z_o))$$

$$= (2\pi i)(f(1)) = 2\pi i e$$ ●

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นนัยทั่วไปของสูตรอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 3.3.14 : สูตรอินทิกรัลของโคชีสำหรับการอนุพันธ์ *(The Cauchy Integral Formula for Derivatives)*

กำหนดฟังก์ชัน $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดซึ่งอยู่บนหรืออยู่ภายในคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย C ถ้า z_o เป็นจุดภายในของ C แล้ว สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n $f^{(n)}(z_o)$ หาค่าได้ และ

(3.3.8) $$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}\,dz$$

พิสูจน์ : จะพิสูจน์ทฤษฎีบท เฉพาะเมื่อ $n=1$ เราจะแสดงว่า

$$f'(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^2}\,dz$$

นั่นคือ ต้องการแสดงว่า

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z_o+h)-f(z_o)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^2}\,dz\right| = 0$$

ถ้า $z_o \in I(C)$ แล้ว z_o+h เมื่อ $|h|$ มีระยะทางที่น้อยพอ สำหรับ $z_o+h \in I(C)$
โดยทฤษฎีบท 3.3.11 เราสรุปได้ว่า

$$\frac{f(z_o+h)-f(z_o)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{h}\left[\frac{1}{z-(z_o+h)} - \frac{1}{z-z_o}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)(z-z_o-h)}\,dz$$

ดังนั้น

$$\frac{f(z_o+h)-f(z_o)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^2}\,dz = \frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^2(z-z_o-h)}\,dz$$

เพราะว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จึงมีความต่อเนื่องบน C
ดังนั้น

$$|f(z)| \le M$$

และ $z_o \in I(C)$ ให้ d เป็นระยะทางจาก z_o ถึง C

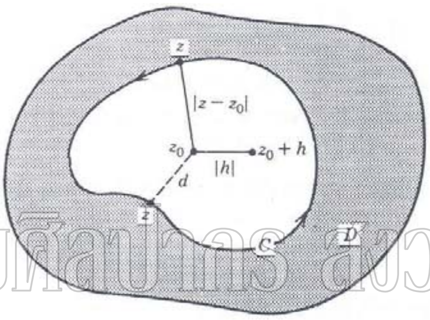
$$\left| z - z_o \right| \geq d$$

เราจะได้

$$\left| z - z_o - h \right| \geq \left| \left| z - z_o \right| - \left| h \right| \right| \geq d - \left| h \right|$$

ดังนั้น

$$\left| \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_o)^2} dz \right| \leq \frac{ML\left| h \right|}{2\pi d^2 (d - \left| h \right|)}$$



รูป 3.3.7

เพราะฉะนั้น เมื่อ $n = 2$ ในทำนองเดียวกัน เราต้องแสดงว่า

$$f''(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_o)^3} dz$$

หรือ
$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f'(z_o + h) - f'(z_o)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_o)^3} dz \right| = 0$$ ■

ตัวอย่าง 3.3.15 : กำหนดให้ C เป็นวงกลม $|z|=2$ จงหา

(1) $\int_C \frac{e^z}{z^2}dz$ (2) $\int_C \frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz$

วิธีทำ : (1) ให้ $f(z)=e^z$ เห็นได้ว่า $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
และ $f'(z)=e^z$
ถ้าให้ $D=R^2$ และ $z_o=0$ แล้ว $z_o\in I(C)$
และโดยทฤษฎีบท 3.3.14 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz=(2\pi i)(f'(z_o))$$

$$=(2\pi i)(f'(0))=2\pi i$$

(2) ให้ $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}$ เห็นได้ว่า $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ยกเว้นที่ $z=0$ และ $z=\dfrac{i}{2}$

กำหนดให้ C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์ปิดอย่างง่าย ซึ่ง $z_o=0\in I(C_1)$ และ $z_o=\dfrac{i}{2}\in I(C_2)$
ตามลำดับ (ดูรูป 3.3.8) และโดยทฤษฎีบท 3.3.9

$$\int_C \frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz=\int_{C_1}\frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz+\int_{C_2}\frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz$$

พิจารณา $\int_{C_1}\frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz$

ให้ $f_1(z)=\dfrac{\sin z}{(2z-i)^3}$ เห็นได้ว่า $f_1(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจำนวนเชิงซ้อน z

$f_1'(z)=\dfrac{(2z-i)^3\cos z-6\sin z(2z-i)^2}{(2z-i)^6}$ และ $z_o=0$ แล้ว $z_o\in I(C_1)$

โดยทฤษฎีบท 3.3.14 จะได้ว่า

$$\int_C \frac{f_1(z)}{(z-0)^2}dz = \frac{(2\pi i)}{1!}(f_1'(z_o))$$

$$= (2\pi i)(f_1'(0)) = (2\pi i)(-i) = 2\pi$$

พิจารณา $\int_{C_2} \frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz = \int_{C_2} \frac{\sin z}{8z^2(z-\frac{i}{2})^3}dz$

ให้ $f_2(z) = \frac{\sin z}{8z^2}$ เห็นได้ว่า $f_2(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจำนวนเชิงซ้อน z

จะได้ว่า $f_2''(z) = \frac{1}{8}(\frac{6\sin z}{z^4} - \frac{4\cos z}{z^3} - \frac{\sin z}{z^2})$ และ $z_o = \frac{i}{2}$ แล้ว $z_o \in I(C_2)$

ดังนั้น

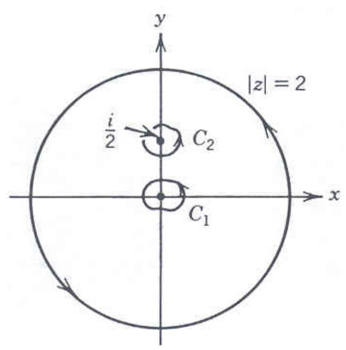
$$\int_{C_2} \frac{f_2(z)}{(z-\frac{i}{2})^3}dz = \frac{(2\pi i)}{2!}(f_2''(z_o))$$

$$= (\pi i)(f_2''(\frac{i}{2}))$$

$$= (\pi i)\left[\frac{1}{i}(\frac{-25}{2}\sinh\frac{1}{2} + 4\cosh\frac{1}{2})\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}(-25\sinh\frac{1}{2} + 8\cosh\frac{1}{2})$$

เพราะฉะนั้น $\int_C \frac{\sin z}{z^2(2z-i)^3}dz = 2\pi + \frac{\pi}{2}(-25\sinh\frac{1}{2} + 8\cosh\frac{1}{2})$ ●



รูป 3.3.8

บทที่ 4
การประยุกต์ของคอนทัวร์อินทิกรัล
(Applications of Contour Integrals)

ในบทนี้เราจะศึกษาการประยุกต์ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และสูตรอินทิกรัลของโคชีในการหาค่าของรีมันน์อินทิกรัลของบางรูป ประการแรกเราจะหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

$$I = \int_0^{2\pi} F(\sin x, \cos x)dx$$

โดยการใช้สูตรอินทิกรัลของโคชี

ตัวอย่าง 4.1 : จงหาค่า $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}dx$

วิธีทำ : เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}$

ดังนั้น ถ้าให้ $$f(z) = \frac{1}{2+\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})}$$

และ $C_z : z = x$ เมื่อ $x \in [0,2\pi]$ (ดูรูป 4.1(1)) แล้วได้

$$I = \int_{C_z} \frac{1}{2+\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})}dz$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.18 เมื่อให้ $w = e^{iz}$ แล้ว $dw = ie^{iz}dz = iwdz$

และ C_w เป็นวงกลม $|w| = 1$ (ดูรูป 4.1(2)) และจะได้ว่า

$$I = \int_{C_w} \frac{1}{iw[2+\frac{1}{2}(w+\frac{1}{w})]}dw = \frac{2}{i}\int_{C_w} \frac{1}{w^2+4w+1}dw$$

$$= \frac{2}{i} \int_{C_w} \frac{1}{[w-(-2-\sqrt{3})][w-(-2+\sqrt{3})]} dw$$

จะเห็นว่า $\dfrac{1}{[w-(-2-\sqrt{3})][w-(-2+\sqrt{3})]}$ วิเคราะห์ที่ทุกจุด w ยกเว้นที่ $w=-2-\sqrt{3}$ และ $w=-2+\sqrt{3}$

โดยทฤษฎีบท 3.3.11 เมื่อให้

$$f(w) = \frac{1}{w-(-2-\sqrt{3})} \quad \text{และ } w_o = -2+\sqrt{3}$$

ดังนั้น

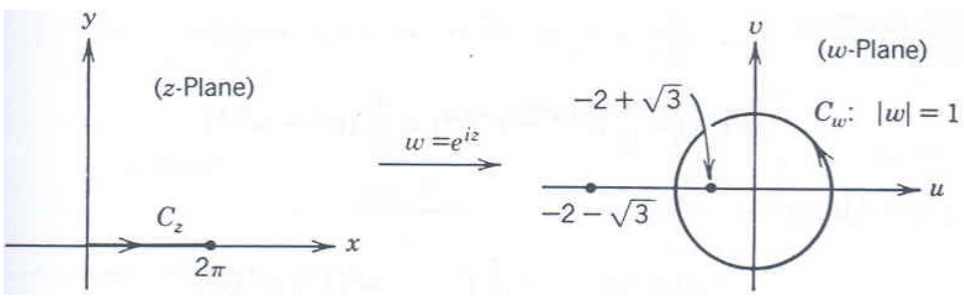
$$\frac{2}{i} \int_{C_w} \frac{1}{[w-(-2-\sqrt{3})][w-(-2+\sqrt{3})]} dw = (\frac{2}{i})(2\pi i)(f(w_o))$$

$$= (\frac{2}{i})(2\pi i)(f(w_o))$$

$$= (\frac{2}{i})(2\pi i)(\frac{1}{2\sqrt{3}})$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ●



(1) (2)

รูป 4.1

ต่อไปเราจะใช้ทฤษฎีบทของโคชี-กอซาท์ และ สูตรอินทิกรัลของโคชี หาค่าของรีมันน์อินทิกรัล และอิมพรอบเพออินทิกรัลบางรูป

ตัวอย่าง 4.2 : ให้ $R > 0$ จงแสดงว่า $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2} d\theta = 1$ เมื่อ $0 < r < R$

อินทิแกรนด์ $\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}$ นี้มีชื่อเรียกว่า **Poisson kernel** ซึ่งมีความสำคัญในการวิเคราะห์เชิงซ้อน

วิธีทำ : พิจารณา

$$\frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} = \frac{(R + re^{i\theta})(R - re^{-i\theta})}{(R - re^{i\theta})(R - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2 + i2rR\sin\theta}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2} + \frac{i2rR\sin\theta}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2} d\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} d\theta\right)$$

ให้ $z = re^{i\theta}$ แล้ว $\frac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta} = iz$

แล้ว

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{R + z}{R - z}\frac{dz}{z}$$

เมื่อ C คือวงกลม $|z| = r$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{R + z}{z(R - z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{R - z}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{2}{R - z} dz$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.11 จะได้

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z} dz = 1$$

หาค่าของ $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{2}{R-z}dz$ ได้ดังนี้

ให้ $f(z)=\dfrac{2}{R-z}$ ดังนั้น $f'(z)=\dfrac{2}{(R-z)^2}$, $|z|\le r$ เมื่อ $z\neq R$

เนื่องจาก $f(z)$ วิเคราะห์ที่ทุกจุด ซึ่งอยู่ภายใน หรือ อยู่บน C โดยทฤษฎีบท 3.3.2 ได้ว่า

$$\int\limits_C \frac{2}{R-z}dz=0$$

หรือ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{2}{R-z}dz=0$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}d\theta=1$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}d\theta=1$$ ●

ตัวอย่าง 4.3 : จงแสดงว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bx dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$

วิธีทำ : ให้ $f(z)=e^{-z^2}$ แล้ว $f(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดบนบริเวณ ซึ่งบรรจุรูปสี่เหลี่ยม $\{(x,y):|z|\le a$ และ $0\le y\le b\}$ (ดูรูป 4.2)

ให้ $C=C_1+C_2+C_3+C_4$

โดยทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า

$$0=\int\limits_C f(z)dz$$

$$0=\int\limits_{C_1} f(z)dz+\int\limits_{C_2} f(z)dz+\int\limits_{C_3} f(z)dz+\int\limits_{C_4} f(z)dz$$

และ

$$0=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+\int_{0}^{b}e^{-(a+iy)^2}idy+\int_{a}^{-a}e^{-(x+ib)^2}dx+\int_{b}^{0}e^{-(-a+iy)^2}idy$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+ie^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{(y^2-2ayi)}dy$$

$$-e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}(\cos 2bx-i\sin 2xb)dx-ie^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{(y^2+2ayi)}dy$$

เนื่องจาก $\int_{-a}^{a}\sin 2xbdx=0$ และ $e^{2iay}-e^{-2iay}=2i\sin 2ay$

ดังนั้น

$$0=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx-e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\cos 2bxdx+2e^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{y^2}\sin 2aydy$$

จากแคลคูลัส เราทราบว่า

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\sqrt{\pi}$$

และเนื่องจาก

$$\lim_{a\to\infty}2e^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{y^2}\sin 2aydy=0$$

เพราะฉะนั้น

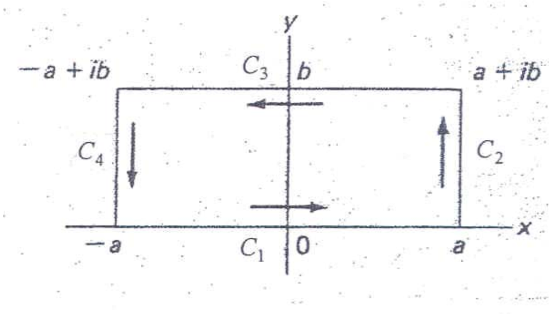
$$\lim_{a\to\infty}e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\cos 2bxdx$$ หาค่าได้

และ

$$\lim_{a\to\infty}e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\cos 2bxdx=e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2bxdx$$

$$=\sqrt{\pi}$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$ ●



รูป 4.2

บรรณานุกรม

[1] นริศรา สุขผ่อง **ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม** สารนิพนธ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2549.

[2] นุวัฒน์ คงอยู่สุข **ฟังก์ชันวิเคราะห์** สารนิพนธ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2549.

[3] บวร น้อยแสง **จำนวนเชิงซ้อน** เอกสารประกอบการสัมมนาทางคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร 2548.

[4] วารี เกรอต **แคลคูลัส** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ 2539.

[5] วารี เกรอต **ทฤษฎีของตัวแปรเชิงซ้อน** โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร 2526.

[6] Derrick, W. R., **Complex Analysis and Applications** 2 nd ed.,Wadsworth International Group, 1984.

[7] Moore, T. O. and Hadlock, E. H., **Complex Analysis**, World Scientific Publishing, 1991.

[8] Rubenfeld, L. A., **A First Course In Applied Complex Variables**, John Wiley & Sons, 1985.

บัญชีสัญลักษณ์

$R(f)$	:	ส่วนจริงของฟังก์ชันเชิงซ้อน f
$I(f)$	:	ส่วนจินตภาพของฟังก์ชันเชิงซ้อน f
$Arg(z)$	:	อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z
S^{o}	:	เซตของจุดภายในทั้งหมดของ S
S^{*}	:	เซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S
$\overline{S}$	:	เซต $S \cup S^{*}$
$N(p,\varepsilon)$	:	อาณาเขตของ p ในรัศมี ε
$N'(p,\varepsilon)$	:	อาณาเขตของ p ในรัศมี ε ซึ่งไม่รวม p
$f \in C(z_o)$	:	ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด z_o
$f \in PC[a,b]$	:	ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$
$f \in A(S)$	:	ฟังก์ชัน f วิเคราะห์ได้ใน S
$I(C)$	:	interior ของ C
$E(C)$	:	exterior ของ C
$L(C)$	:	ความยาวของเส้นโค้ง C

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ - สกุล	นางสาวอารีรัตน์ ว่องก๊ก
ที่อยู่	7 ถนนรัษฎา ตำบลกันตัง อำเภอกันตัง จังหวัดตรัง 92110
ที่ทำงาน	คณะสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วังท่าพระ ถนนหน้าพระลาน กรุงเทพมหานคร 10200

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2544	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ จังหวัดนครปฐม
พ.ศ. 2545	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ จังหวัดนครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2544-2546	เจ้าหน้าที่สถิติ โรงพยาบาลเทพากร จังหวัดนครปฐม
พ.ศ. 2546-ปัจจุบัน	นักวิเคราะห์นโยบายและแผน คณะสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร กรุงเทพมหานคร