อนุกรมของฟังก์ชัน

โดย
นางสาวสำรวย ทองดอนเกรื่อง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2553

อนุกรมของฟังก์ชัน

โดย
นางสาวสำรวย ทองดอนเกรื่อง

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2553

SERIES OF FUNCTIONS

By

Samruay Thongdonkruang

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2010

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง " อนุกรมของฟังก์ชัน " เสนอโดย นางสาวสำรวย ทองดอนเกรื่อง เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปานใจ ธารทัศนวงศ์)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
วันที่.........เดือน................... พ.ศ..........

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)
............/......................../.............

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)
............/......................../.............

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์วารี เกรอต)
............/......................../.............

49308310 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ลำดับของฟังก์ชัน / การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม / อนุกรมของฟังก์ชัน

สำรวย ทองดอนเกรื่อง : อนุกรมของฟังก์ชัน. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รศ.วารี เกรอต. 67 หน้า.

อนุกรมของฟังก์ชันเป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งสร้างจากลำดับของฟังก์ชันหนึ่งที่กำหนดให้ ในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ เราเริ่มต้นศึกษาลำดับของฟังก์ชันและสมบัติต่างๆ อย่างละเอียด โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราศึกษาผลบางประการที่น่าสนใจซึ่งเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับ

ในการศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน เราจะศึกษาการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน และการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน นอกจากนี้เราศึกษาอนุกรมกำลัง และอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งเป็นอนุกรมของฟังก์ชันที่มีการประยุกต์อย่างกว้างขวาง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2553
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

49308310 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORDS : SEQUENCES OF FUNCTIONS / UNIFORM CONVERGENCE / SERIES OF FUNCTIONS
SAMRUAY THONGDONKRUANG : SERIES OF FUNCTIONS. INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC PROF. WAREE KAROT . 67 pp.

A series of functions is a sequence of functions defined from a given sequence of functions. In this independent study, we first study the sequences of functions and their properties in detail, especially we study some interesting results related to the uniform convergence of sequences.

In the study of series of functions we study convergence of series and Weierstrass M-test which is an important tool for tests of convergence. Moreover we study power series and Taylor series which are sequences of functions of being widely applied.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2010
Student's signature ....
Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจากรองศาสตราจารย์ วารี เกรอต อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มและแก้ไขในส่วนที่บกพร่องต่าง ๆ จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จในวันนี้

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ และรุ่นพี่ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศทุกท่าน ที่มีส่วนช่วยเหลือและให้คำแนะนำในเรื่องต่างๆ ตลอดจนช่วยเป็นกำลังใจในการศึกษาและการค้นคว้าอิสระฉบับนี้

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาและครอบครัวของข้าพเจ้าที่ได้ให้กำลังใจมอบความรัก ความดูแลและให้การสนับสนุนการศึกษา จนทำให้ข้าพเจ้าประสบผลสำเร็จ

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ.......... ฉ

บทที่

1 บทนำ.......... 1

2 ทฤษฎีบทพื้นฐาน.......... 2

3 ลำดับของฟังก์ชัน.......... 14

การลู่เข้าแบบทีละจุด.......... 14

การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม.......... 18

ผลบางประการที่น่าสนใจซึ่งเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม.......... 34

4 อนุกรมของฟังก์ชัน.......... 43

การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์.......... 43

อนุกรมกำลัง.......... 48

อนุกรมเทย์เลอร์.......... 58

บรรณานุกรม.......... 66

ประวัติผู้วิจัย.......... 67

บทที่ 1
บทนำ
INTRODUCTION

อนุกรมของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานที่สำคัญในคณิตศาสตร์ และมีการประยุกต์อย่างกว้างขวางในหลายสาขาวิชา การศึกษาอนุกรมของฟังก์ชันต้องอาศัยแนวคิดของลำดับ ซึ่งเราจะศึกษาอย่างละเอียดเพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจ และมีความลึกซึ้งในการศึกษาอนุกรมได้ดียิ่งขึ้น

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราจะนำเสนอแนวคิดของลำดับของฟังก์ชัน อนุกรมของฟังก์ชัน และการลู่เข้าทั้งสองแบบคือการลู่เข้าแบบทีละจุดและการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และจะศึกษาว่าการลู่เข้าทั้งสองแบบมีผลต่อสมบัติบางประการของลิมิตฟังก์ชันอย่างไร โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นแต่ละบทดังรายละเอียดต่อไปนี้

บทที่ 2 : เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่จำเป็นในการศึกษาบทที่ 3 และ บทที่ 4

บทที่ 3 : เราจะศึกษาลำดับของฟังก์ชันและแนวคิดต่าง ๆ ของลำดับได้แก่ การลู่เข้าแบบทีละจุด การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม รวมทั้งได้พิสูจน์ผลบางประการที่น่าสนใจซึ่งเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม และตัวอย่างต่างๆ

บทที่ 4 : เราจะศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน รวมทั้งการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ รวมทั้งได้พิสูจน์ผลบางประการเกี่ยวกับทฤษฎีบทของบทที่ 4

บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
BASIC THEOREMS

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐาน ซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาลำดับและอนุกรมของฟังก์ชันในบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไป ดังนั้นเราจะขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ

ในการค้นคว้าอิสระนี้จะขอกำหนดสัญลักษณ์แทนเซตต่างๆ ดังนี้

I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

และถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงเซตใด ๆ จะหมายถึงสับเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นเซตว่าง

ทฤษฎีบท 2.1 : ให้ x, y เป็นจำนวนจริง ถ้า $x < y$ แล้วจะมีจำนวนจริง z ซึ่ง $x < z < y$

ทฤษฎีบท 2.2 : หลักอาร์คีมีดิส (Archimedean Principle)

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริง แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $na > b$ นั่นคือ ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n, m ซึ่งสอดคล้อง $\frac{1}{n} < \varepsilon$ และ $m > \varepsilon$

บทนิยาม 2.3 : ขอบเขตบน (upper bound) ของเซต X คือ จำนวนจริง u ซึ่งสอดคล้องว่า $x \le u$ สำหรับทุก $x \in X$

บทนิยาม 2.4 : จำนวนจริง u เป็น **ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound** หรือ **supremum)** ของเซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) u เป็นขอบเขตบนของ X

(2) ถ้าจำนวนจริง b เป็นขอบเขตบนของ X แล้ว $b \ge u$

เราจะเขียนแทน u ตามนิยาม 2.4 โดย $\sup X$

บทนิยาม 2.5 : ขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง คือ จำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า $l \le x$ สำหรับทุก $x \in X$

บทนิยาม 2.6 : จำนวนจริง l เป็น **ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greastest lower bound** หรือ **infimum)** ของเซต X ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง ถ้า l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) l เป็นขอบเขตล่างของ X

(2) ถ้าจำนวนจริง a เป็นขอบเขตล่างของ X แล้ว $l \ge a$

เราจะเขียนแทน l ตามบทนิยาม 2.6 โดย $\inf X$

ทฤษฎีบท 2.7 : สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness)

(1) ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ A มีขอบเขตบน แล้ว A มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

(2) ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ A มีขอบเขตล่าง แล้ว A มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

บทนิยาม 2.8 : สำหรับเซต I ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง ให้ $f : I \to P(A)$ และ $f(\alpha) = I_\alpha$ เมื่อ $\alpha \in I$ เราเรียก $\{I_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ว่าเป็น **แฟมมิลี (family)** หรือ **คอลเลกชัน (collection)** ของสับเซตของ A **ที่มี เซตดรรชนี (index set)** คือ I

กล่าวว่า A เป็นเซตเปิด ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in A$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $(x-\delta, x+\delta) \subset A$

บทนิยาม 2.9 : ให้ $A \subset R$ และ $\{I_\alpha \mid \alpha \in I\}$ เป็นแฟมมิลีของเซตเปิด เรากล่าวว่า $\{I_\alpha \mid \alpha \in I\}$ เป็น **ตัวคลุมเปิด (open cover)** สำหรับ A ถ้าสำหรับแต่ละ $a \in A$ จะมี $\alpha \in I$ ซึ่ง $a \in I_\alpha$

บทนิยาม 2.10 : ให้ $\{I_\alpha \mid \alpha \in I\}$ เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ $A \subset R$ ถ้ามี $J \subset I$ ซึ่ง B เป็นเซตจำกัด และ $\{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$ เป็นตัวคลุมเปิด สำหรับ A เรากล่าวว่า $\{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$ เป็น **ตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด (finite subcover)** สำหรับ $\{I_\alpha \mid \alpha \in I\}$

บทนิยาม 2.11 : ให้ $A \subset R$ จะเรียก A ว่าเป็น **เซตคอมแพกต์ (compact set)** ถ้าทุกตัวคลุมเปิดของ A มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด

บทนิยาม 2.12 : ให้ I เป็นช่วงเปิดและ $a \in I$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าที่ทุกจุดใน I และอาจยกเว้นที่จุด a เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิต (limit)** ของ f ที่ a ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $x \in I$ และ $0 < |x - a| < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.13 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบน (a, b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตขวาของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา (limit of f as x approaches a from the right)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $x \in (a, b)$ และ $0 < x - a < \delta$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.14 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบน (a, b) เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตซ้ายของ f เมื่อ x เข้าใกล้ b ทางซ้าย (limit of f as x approaches b from the left)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ถ้า $x \in (a, b)$ และ $-\delta < x - b < 0$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.15 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบน $(a, +\infty)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $+\infty$** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x > M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ และกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.16 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง $(-\infty, b)$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น**ลิมิตของ f ที่ $-\infty$** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x < -M$

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ และกล่าวว่า $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **หาค่าได้ (exists)**

บทนิยาม 2.17 : ให้ $f:E\to R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่** a **(continuous at** a **)** เมื่อ $a\in E$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

ข้อสังเกต 2.18 : ให้ $f:E\to R$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ a เมื่อ $a\in E$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ถ้า $x\in E$ และ $|x-a|<\delta$

ทฤษฎีบท 2.19 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนคือ $D(f)$ และ $D(g)$ ตามลำดับ ถ้ามี $x_0\in D(f)\cap D(g)$ และทั้ง f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 แล้ว

(1) $\alpha f+\beta g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงใดๆ

(2) fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0

(3) $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 ถ้า $g(x_0)\neq 0$

บทนิยาม 2.20 : ให้ $f:E\to R$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม (uniformly continuous)** บน E ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ เมื่อ $x_1,x_2\in E$ และ $|x_1-x_2|<\delta$

ทฤษฎีบท 2.21 : ถ้า A เป็นเซตคอมแพกต์ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน A

ทฤษฎีบท 2.22 : ทฤษฎีบทค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (The Max-Min Theorem)

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว จะมี $x_0,x_1\in[a,b]$ ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับทุก $x\in[a,b]$ เราได้

(1) $f(x_0)\geq f(x)$

(2) $f(x_1)\leq f(x)$

(นั่นคือ f มีค่าสูงสุดและมีค่าต่ำสุดบน $[a,b]$)

บทนิยาม 2.23 : ให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆ และ $a \in I$ เรากล่าวว่า $f : I \to R$ **มีอนุพันธ์ที่** a **(differentiable at** a **)** ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ หาค่าได้

ค่าลิมิตตามบทนิยามข้างบนเรียกว่า **อนุพันธ์ของ** f **ที่** a **(derivative of** f **at** a**)** และเขียนแทนโดย $f'(a)$ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน I จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**อนุพันธ์บน** I **(differentiable on** I **)**

ทฤษฎีบท 2.24 : กฎของโลปิตาล (L'Hopital's Rule)

สมมติ f และ g หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a,b)$ ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ ซึ่ง $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้

แล้ว $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ข้อสังเกต 2.25 : (1) กฎของโลปิตาลยังคงเป็นจริงสำหรับกรณี $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

(2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณีที่ $x \to \pm\infty$ หรือ $x \to x_0^+$ หรือ $x \to x_0^-$

บทนิยาม 2.26 : ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a < b$ ถ้า $n \in I^+$ และ

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

แล้วจะเรียก $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ว่า**พาร์ทิชัน (partition)** ของช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 2.27: ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วง $[a,b]$ เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน**มีขอบเขต (bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$

บทนิยาม 2.28 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad \text{และ} \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

เราเรียก

$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกล่างของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P (lower sum of f relative to partition P)**

และเรียก $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกบนของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P (upper sum of f relative to partition P)**

บทนิยาม 2.29 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$ ถ้า

$$\sup\{L(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\} = \inf\{U(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ} [a,b]\}$$

เราเรียกค่าที่ได้นี้ว่า **รีมันน์อินทิกรัลของ f (Riemann integral of f)** บน $[a,b]$ และเขียนแทนค่านี้ด้วย

$$\int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad \int_a^b f(x)dx$$

และกล่าวว่า f **รีมันน์อินทิเกรเบิล (Riemann integrable)** บน $[a,b]$

เราอาจจะกล่าวสั้นๆ สำหรับ f ที่สอดคล้องตามบทนิยาม 2.28 ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.30 : ถ้า f มีขอบเขตบน $[a,b]$ และต่อเนื่องบน $[a,b]$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.31 : ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ g มีขอบเขตบน $[a,b]$ และ $f=g$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว g อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $\int_a^b g = \int_a^b f$

ทฤษฎีบท 2.32 : ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.33 : ถ้า f และ g อินทิเกรตได้ บน $[a,b]$ และ $f \le g$ แล้ว

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

ทฤษฎีบท 2.34 : กำหนดให้ f อินทิเกรตได้ แล้ว $|f|$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

ทฤษฎีบท 2.35 : ทฤษฎีบทหลักบทที่ 1 ของแคลคูลัส (The First Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และมีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g' = f$ บน $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

ทฤษฎีบท 2.36 : ทฤษฎีบทหลักบทที่ 2 ของแคลคูลัส(The Second Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และกำหนด F บนช่วง $[a,b]$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

แล้วสำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ $F'(x) = f(x)$

ทฤษฎีบท 2.37 : เกณฑ์การอินทิเกรตได้ (The Integrability Criterion)

กำหนดให้ $f:[a,b] \to R$ มีขอบเขต แล้ว $f:[a,b] \to R$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีพาร์ทิชัน P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

ทฤษฎีบท 2.38 : ถ้า f และ g อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว $\alpha f + \beta g$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ เมื่อ α, β เป็นจำนวนจริง และ

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

ทฤษฎีบท 2.39 : ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,x]$ เมื่อ $x \in [a,b]$

ทฤษฎีบท 2.40 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บน (a,b) แล้วจะมีจำนวนจริง c ซึ่ง $a<c<b$ และ

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

บทนิยาม 2.41 : ลำดับของจำนวนจริง (sequence of real numbers) คือ ฟังก์ชัน

$$f:I^{+}\to R$$

ถ้า f เป็นลำดับของจำนวนจริงและ $f(n)=a_n$ สำหรับทุก $n\in I^{+}$ เราจะเขียนแทนลำดับนี้ด้วย $\{a_n\}$ และในที่นี้เมื่อกล่าวถึงลำดับจะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.42 : เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ **ลู่เข้าสู่จำนวนจริง** a **(converges to** a **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n-a|<\varepsilon$ สำหรับทุก $n>N$

จะเขียนแทนความหมายตามบทนิยามข้างบนโดย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ หรือ $\lim a_n=a$ และเรียก a ว่า **ลิมิต (limit)** ของ $\{a_n\}$

บทนิยาม 2.43 : ถ้าลำดับมีลิมิต เรากล่าวว่าลำดับนั้นเป็น**ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** ถ้าไม่เป็นเช่นนั้น เรากล่าวว่าลำดับนั้นเป็น**ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ทฤษฎีบท 2.44 : ลำดับ $\left\{c^n\right\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ถ้า $c\in R$ และ $|c|<1$

ทฤษฎีบท 2.45 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ ลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้วสำหรับจำนวนจริง c และ d ใดๆ ลำดับ $\{ca_n+db_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim(ca_n+db_n)=ca+db$

ทฤษฎีบท 2.46 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ ลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b แล้วลำดับ $\{a_nb_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim(a_nb_n)=ab$

ทฤษฎีบท 2.47 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และ ลำดับ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b โดยที่ $b_n\neq 0$ สำหรับทุก $n\in I^{+}$ และ $b\neq 0$ แล้วลำดับ $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{a}{b}$

ทฤษฎีบท 2.48 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a , $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ b และ ลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ c ถ้า $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ แล้ว $a \le c \le b$

บทแทรก 2.49 : ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ และ $a \le c_n \le b$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้าลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ c แล้ว $a \le c \le b$

ทฤษฎีบท 2.50 : (The Squeezing Theorem)

ให้ $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่ l แล้วลำดับ $\{c_n\}$ ลู่เข้าสู่ l

บทนิยาม 2.51 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ มี**ขอบเขต (bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ทฤษฎีบท 2.52 : ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้วลำดับ $\{a_n\}$ มีขอบเขต

บทนิยาม 2.53 : เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับโคชี (Cauchy sequence)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n > N$ และ $m > N$

ทฤษฎีบท 2.54 : ทุกลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 2.55 : ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.56 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n > N$ และ $m > N$

ทฤษฎีบท 2.57 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับและ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามค่าบน $[b,\infty)$ และ $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ เมื่อ $n \ge b$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและ $\lim a_n = L$

บทนิยาม 2.58 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

เราเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า**อนุกรมของจำนวนจริง (series of real numbers)**

และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

เรียก a_n ว่าเทอมที่ n (n[th] term) ของอนุกรม และเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่ n (n[th] partial sum)** ของอนุกรม ถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ S เราเรียก S ว่าเป็น**ผลบวก (sum)** ของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และเขียนแทนโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ด้วย $\sum a_n$

ทฤษฎีบท 2.59 : ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ทฤษฎีบท 2.60 : อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{a}{1-r}$ ถ้า $|r| < 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $|r| \geq 1$

ทฤษฎีบท 2.61 : อนุกรม $\sum nr^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$

ทฤษฎีบท 2.62 : การทดสอบเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมไม่เป็นลบ ซึ่ง $a_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $n \geq k$

(1) ถ้า $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.63 : การทดสอบโดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparison Test)

ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และ $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ จะเป็นอนุกรมชนิดเดียวกัน (ลู่เข้าหรือลู่ออกเหมือนกัน)

ทฤษฎีบท 2.64 : การทดสอบอัตราส่วน (Ratio Test)

กำหนดให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมเป็นบวก และ $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(1) ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(ถ้า $r = 1$ ไม่มีข้อสรุป)

ทฤษฎีบท 2.65 : การทดสอบราก (Root Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่มีเทอมไม่เป็นลบ และ $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$

(1) ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า

(2) ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่ออก

(ถ้า $r = 1$ ไม่มีข้อสรุป)

ทฤษฎีบท 2.66 : ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีผลบวกเป็น a และ b ตามลำดับ แล้วสำหรับจำนวนจริง c และ d ใดๆ $\sum (ca_n + db_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$\sum (ca_n + db_n) = ca + bd$

ทฤษฎีบท 2.67 : การทดสอบของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's Test)

ถ้า $0 < a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \in I^+$ และ $\lim a_n = 0$ แล้ว $\sum (-1)^{n-1} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.68 : ให้ $S = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ เป็นอนุกรมสลับลู่เข้า ซึ่ง $0 < a_{n+1} \le a_n$ และ $\lim a_n = 0$ ถ้า $S = S_n + R_n$ เมื่อ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ และ R_n เป็นผลบวกของเทอมหลังจากเทอมที่ n แล้ว $|S - S_n| < a_{n+1}$

บทนิยาม 2.69 : เรากล่าวว่า $\sum a_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent series)** ถ้า $\sum |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทนิยาม 2.70 : ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม **ผลคูณโคชี (Cauchy product)** ของ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ คือ อนุกรม $\sum c_n$ เมื่อ

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{สำหรับ } n \in I^+ \cup \{0\}$$

ทฤษฎีบท 2.71 : ทฤษฎีบทของเมอร์เทน (Merten's Theorem)

ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วผลคูณโคชีของอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าสู่ $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$

บทนิยาม 2.72 : กำหนดให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,u]$ สำหรับทุก $u > a$ นิยาม**อิมพรอบเพออินทิกรัล (improper integral)** ของ f เขียนแทนโดย $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ดังนี้

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} f(x)dx \qquad (1)$$

กล่าวว่า $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า ถ้าลิมิตทางขวามือของ (1) เป็นค่าจำกัด ไม่เช่นนั้นกล่าวว่า $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.73 : การทดสอบอินทิกรัล (Integral Test)

ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกเทอมเป็นจำนวนบวก และ $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น และต่อเนื่องบน $[N,\infty)$ ซึ่ง $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n \ge N$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\int_N^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า

บทที่ 3
ลำดับของฟังก์ชัน
SEQUENCES OF FUNCTIONS

ลำดับของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานของอนุกรมของฟังก์ชัน ในบทนี้เราจะศึกษาลำดับของฟังก์ชัน และแนวคิดต่างๆ ได้แก่ การลู่เข้าแบบทีละจุด การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม รวมทั้งเปรียบเทียบการลู่เข้าแบบทีละจุดและการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

3.1 การลู่เข้าแบบทีละจุด (Pointwise Convergence)

บทนิยาม 3.1.1 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ให้

$$f_n : E \to R$$

เราจะเรียกลำดับ $\{f_n\}$ ว่า **ลำดับของฟังก์ชัน (sequence of functions)** บน E

บทนิยาม 3.1.2 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน E และ $f : E \to R$ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่** f **บน** E **(converges pointwise to** f **on** E **)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in E$ จะได้

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

เรียกฟังก์ชัน f ว่า **ลิมิตทีละจุด (pointwise limit)** ของลำดับ $\{f_n\}$
นอกจากนี้เรากล่าวว่า $\{f_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้าแบบทีละจุด (pointwise convergent sequence)**

ต่อไปนี้ ถ้า $f : E \to R$ และ $f(x) = c$ สำหรับทุก $x \in E$ จะขอเขียนแทน f โดย $f \equiv c$ บน E
ในกรณีที่ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน E และ $f \equiv c$ บน E จะกล่าวว่า $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่** c **บน** E **(converges pointwise to** c **on E)**

ตัวอย่าง 3.1.3 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = x^n$ เมื่อ $0 \le x \le 1$ จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[0,1]$ ซึ่ง $f:[0,1] \to R$ นิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ : เมื่อ $x = 1$ จะได้ว่า $\lim f_n(1) = 1 = f(1)$
เมื่อ $0 \le x < 1$ จะได้ว่า $\lim f_n(x) = \lim x^n = 0 = f(x)$
ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[0,1]$ ■

ตัวอย่าง 3.1.4 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ เมื่อ $x \in R$
จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน R

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า $\lim f_n(a) = 0$ ทุก $a \in R$

เมื่อ $a = 0$ จะได้ว่า
$\lim f_n(a) = 0$
เมื่อ $a \ne 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้

$$a_n = nae^{-na^2} \text{ และ } f(x) = xae^{-xa^2} \text{ สำหรับทุก } x \in [a,\infty)$$

โดยทฤษฎีบท 2.24 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xae^{-xa^2} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} a}{\lim\limits_{x\to+\infty} (a^2e^{xa^2})} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 2.57 จะได้ว่า $\lim a_n = 0$
ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน R ■

ตัวอย่าง 3.1.5 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ให้

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx} \quad x \in [1,\infty)$$

จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[1,\infty)$

พิสูจน์: พิจารณา $\lim \dfrac{\sin nx}{nx}$ เนื่องจาก $0 \le \left|\dfrac{\sin nx}{nx}\right| \le \dfrac{1}{nx}$ และ $\lim \dfrac{1}{nx} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim \frac{\sin nx}{nx} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim f_n(x) = \lim \frac{\sin nx}{nx} = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[1,\infty)$ ■

ตัวอย่าง 3.1.6 : กำหนด ลำดับของฟังก์ชัน $\{f_n\}$ สำหรับ $n \geq 2$ นิยามบน $[0,1]$ ดังนี้

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & , \ \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & , \ \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[0,1]$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $x \in (0,1]$ เราจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{2}{x}$

สำหรับ $n > N$ จะได้ว่า $x > \frac{2}{n}$ และดังนั้น $|f_n(x)| = |0| < \varepsilon$

กำหนดให้ $x = 0$ เห็นได้ชัดว่า $f_n(0) = 0$ สำหรับทุก n

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บนช่วง $[0,1]$ ■

ตัวอย่าง 3.1.7 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = e^{-nx}$ เมื่อ $x \in [0,\infty)$

จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ : เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $\lim f_n(0) = 1 = f(0)$

เมื่อ $x \neq 0$ จะได้ว่า $\lim f_n(x) = \lim e^{-nx} = \lim \frac{1}{e^{nx}}$

พิจารณา $\lim \frac{1}{e^{nx}}$ เนื่องจาก $e^b > 1 + b$ สำหรับทุก $b>0$

ดังนั้น $\frac{1}{e^b} < \frac{1}{1+b}$

สำหรับ $n \in I^{+}$ และ $x \neq 0$ จะได้ $0 < \dfrac{1}{e^{nx}} < \dfrac{1}{1+nx}$ ซึ่ง $\lim \dfrac{1}{1+nx} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim \dfrac{1}{e^{nx}} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim f_n(x) = \lim \dfrac{1}{e^{nx}} = 0 = f(x)$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนช่วง $[0,\infty)$ ■

ตัวอย่าง 3.1.8 : สำหรับแต่ละ $n \in I^{+}$ กำหนด $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{-nx}}$ เมื่อ $x \in R$

จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{ถ้า } x = 0 \\ 1 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ : เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า $\lim e^{-nx} = \infty$ และ $\lim f_n(x) = 0 = f(x)$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $\lim f_n(0) = \lim \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = f(0)$

เมื่อ $x > 0$ จะได้ว่า $\lim e^{-nx} = \lim \dfrac{1}{e^{nx}} = 0$ และ $\lim f_n(x) = 1 = f(x)$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน R ■

ในตัวอย่าง 3.1.3 จะเห็นว่า แต่ละ f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับตัวอย่าง 3.1.4 แต่ละ f_n และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีตัวอย่างซึ่งแต่ละ f_n และ f มีอนุพันธ์บน $[0,\pi]$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x)$ (ตัวอย่าง 3.2.6) ในตัวอย่าง 3.1.6 จะเห็นว่า แต่ละ f_n และ f อินทิเกรตได้ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$ และตัวอย่าง 3.1.7 จะเห็นว่า แต่ละ f_n มีอนุพันธ์ บน $[0,\infty)$ แต่ f ไม่มีอนุพันธ์บน $[0,\infty)$

3.2 การลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Convergence)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้แสดงว่าคุณสมบัติของการลู่เข้าแบบทีละจุดของลำดับของฟังก์ชันไม่เพียงพอที่ลิมิตฟังก์ชันจะมีสมบัติของความต่อเนื่อง การอินทิเกรตได้ และการมีอนุพันธ์ เมื่อแต่ละ f_n ของลำดับ $\{f_n\}$ มีสมบัติดังกล่าว ในหัวข้อนี้จะแสดงว่าการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มจะทำให้ลิมิตฟังก์ชันมีสมบัติดังกล่าวมา เมื่อแต่ละ f_n ของลำดับ $\{f_n\}$ มีสมบัติดังกล่าว

บทนิยาม 3.2.1 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน E และ $f : E \to R$ เราจะกล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (converges uniformly)** สู่ f บน E ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } x \in E \text{ และทุก } n > N$$

เราเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ลิมิตยูนิฟอร์ม (uniform limit)** ของลำดับ $\{f_n\}$

นอกจากนี้ เรากล่าวว่าลำดับ $\{f_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (uniformly convergent sequence)**

ตัวอย่าง 3.2.2 : จากตัวอย่าง 3.1.3 จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$ แต่ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0<k<1$

พิสูจน์: ประการแรกจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$ สมมติลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f ดังนั้นเมื่อให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (*)$$

สำหรับทุก $x \in [0,1]$ และทุก $n > N$

พิจารณา $x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{N}}$ แล้ว $x \in [0,1]$ และ

$$|f_N(x) - f(x)| = \left|\frac{3}{4} - 0\right| > \varepsilon$$

ซึ่งขัดแย้งกับ (*)

ดังนั้น ลำดับ $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,1]$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0<k<1$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \log_k \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in [0,k]$ และทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| x^n - 0 \right| \le x^N \le k^N < k^{\log_k \varepsilon} = \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บนช่วง $[0,k]$ เมื่อ $0 < k < 1$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.3 : กำหนดให้ $\{ f_n \}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ถ้า $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E แล้ว f มีความต่อเนื่องบน E

พิสูจน์ : ให้ $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E และ แต่ละ f_n มีความต่อเนื่องบน E

เราจะแสดงว่า f มีความต่อเนื่องบน E

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากลำดับ $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f จะได้ว่ามี $N \in I^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{สำหรับทุก } n > N \text{ และ ทุก } x \in E$$

ให้ $x_0 \in E$ เนื่องจาก f_N ต่อเนื่องที่ x_0 จะได้ว่า มี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E \quad \text{ซึ่ง } \left| x - x_0 \right| < \delta$$

ดังนั้น เมื่อ $x \in E$ และ $\left| x - x_0 \right| < \delta$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(x_0) \right| &= \left| f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\ &\le \left| f(x) - f_N(x) \right| + \left| f_N(x) - f_N(x_0) \right| + \left| f_N(x_0) - f(x_0) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ x_0 และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ข้อสังเกต 3.2.4 : กำหนดให้ $\{ f_n \}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ซึ่ง $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน E ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E แล้ว $\{ f_n \}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E

จากข้อสังเกตข้างบนเราจะได้ว่าลำดับในตัวอย่าง 3.1.3, 3.1.7 และ 3.1.8 ไม่เป็นลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

ทฤษฎีบท 3.2.5 : ให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บนเซต E และ ให้

$$M_n = \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|$$

แล้ว $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E ก็ต่อเมื่อ $\lim M_n = 0$

พิสูจน์ : ($\longrightarrow$) ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน E

ดังนั้น มี $N \in I^+$ ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $x \in E$ และเมื่อ $n > N$

จะได้ว่า $M_n = \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

($\longleftarrow$) ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim M_n = 0$

ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $0 \le M_n < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$

สำหรับทุก $x \in E$ และทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = M_n < \varepsilon$$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E ■

ตัวอย่าง 3.2.6 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ เมื่อ $x \in [0,\pi]$

จงแสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,\pi]$

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[0,\pi]$

พิจารณา $\lim \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ เนื่องจาก $0 \le \left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ และ $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim f_n(x) = \lim \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$

ดังนั้นลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[0,\pi]$

ต่อไปจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,\pi]$

เนื่องจาก $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|$

สำหรับ $n \in I^+$ เมื่อเลือก $x = \dfrac{\pi}{2n}$ แล้ว $x \in [0,\pi]$ และ

$$M_n = \left| \frac{\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2n} \right) \right]}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

เห็นได้ว่า ลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 จะได้ว่า $\{ f_n \}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,\pi]$ ■

ตัวอย่าง 3.2.7 : พิจารณาลำดับ $\{h_n\}$ บน $[0,2\pi]$ ของฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ เมื่อ

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$$

จงแสดงว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,2\pi]$

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[0,2\pi]$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$

เนื่องจาก $0 \le \left| \frac{1}{n}\sin(n^2 x) \right| \le \frac{1}{n}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n^2 x) = 0$

ดังนั้น ลำดับ $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[0,2\pi]$

ต่อไปจะแสดงว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,2\pi]$

ให้ $M_n = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |h_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n} \right|$

สำหรับ $n \in I^+$ เมื่อเลือก $x = \frac{\pi}{2n^2}$ แล้ว $x \in [0,2\pi]$ และ

$$M_n = \left| \frac{1}{n}\sin\left[n^2 \left(\frac{\pi}{2n^2} \right) \right] \right| = \left| \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{1}{n}$$

เห็นได้ว่าลำดับ $\{M_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 จะได้ว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[0,2\pi]$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.8 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ถ้า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx$$

พิสูจน์ : ประการแรกจะแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$
ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่ง $|f(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และทุก $n \geq N$
นั่นคือ ทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (1)$$

สำหรับพาร์ทิชัน $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ใดๆของ $[a,b]$ และ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ให้

$$L(P, f_N) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad , \quad m_i = \inf\{f_N(x) \mid x \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

$$m_i' = \inf\{f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \mid x \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

$$= m_i - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L(P, f_N - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (m_i - \frac{\varepsilon}{3(b-a)})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (m_i(x_i - x_{i-1})) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= L(P, f_N) - \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$L(P, f_N - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}) = L(P, f_N) - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า

$$L(P, f_N - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}) \leq L(P, f)$$

ให้ $\overline{m}_i = \inf_{x\in[a,b]} |f(x)|$ จาก (1) เราได้ว่า

$$f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad < \quad f(x) \qquad \text{สำหรับทุก } x \in [a,b]$$

และดังนั้น สำหรับทุก $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

เราจะได้

$$m_i' \quad \leq \quad \bar{m}_i$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} L(P, f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= L(P,f) \end{aligned}$$

นั่นคือ $\quad L(P, f_N) - \frac{\varepsilon}{3} \quad \leq \quad L(P,f) \qquad (3)$

ในทำนองเดียวกัน $\quad U(P,f) \quad \leq \quad U(P, f_N) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4)$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$U(P,f) - L(P,f) \quad \leq \quad U(P, f_N) - L(P, f_N) + \frac{2\varepsilon}{3}$$

เนื่องจาก f_N อินทิเกรตได้ โดยทฤษฎีบท 2.37 จะมีพาร์ทิชัน P^* ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(P^*, f_N) - L(P^*, f_N) \quad < \quad \frac{\varepsilon}{3}$$

ดังนั้น

$$U(P^*, f) - L(P^*, f) \quad < \quad \varepsilon$$

และเราสรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ต่อไปจะแสดงว่า $\quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad = \quad \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \quad = \quad \int_a^b f(x)dx$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจากแต่ละ f_n และ f อินทิเกรตได้

โดยทฤษฎีบท 2.34 และ 2.38 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b \left(f_n(x) - f(x) \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right| dx \end{aligned}$$

ทุก ๆ $\; n \in I^+$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$

ดังนั้นมี $N \in I^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

สำหรับทุก $n > N$ และ ทุก $x \in [a,b]$

ดังนั้น ถ้า $n > N$ จะได้ว่า

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx = \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx$ ■

ตัวอย่าง 3.2.9 : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ กำหนด $f_n(x)=\frac{1}{x^n}$ เมื่อ $x \in [2,3]$

เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\int_2^3 f_n(x)dx = \int_2^3 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

วิธีทำ : ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน [2,3]

เนื่องจาก $\frac{1}{3^n} \le \frac{1}{x^n} \le \frac{1}{2^n}$ และ $\lim\frac{1}{3^n} = 0 = \lim\frac{1}{2^n}$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim\frac{1}{x^n}=0$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน [2,3]

ต่อไปจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน [2,3]

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\left(\frac{1}{2}\right)^N \le \varepsilon$ สำหรับทุก $n > N$ เราได้ว่า

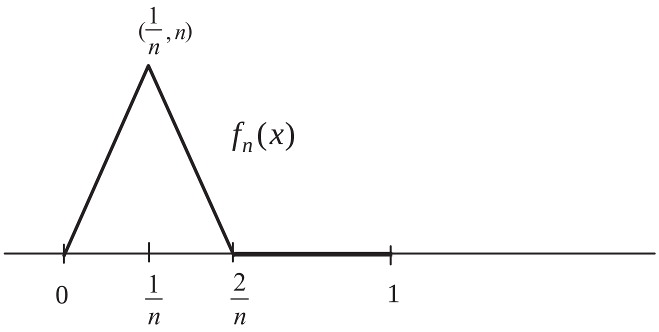
$$\left(\frac{1}{x}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^N \le \varepsilon$$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน [2,3]

โดยทฤษฎีบท 3.2.8 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^3 f_n(x)dx = \int_2^3 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad ■$$

ตัวอย่าง 3.2.10 : จากตัวอย่าง 3.1.6 เราได้ว่า แต่ละ f_n อินทิเกรตได้บน [0,1] โดยพิจารณาจากกราฟของ f_n ต่อไปนี้



ดังนั้น $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times n = 1$ และ $\int_0^1 f(x)dx = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

เราสรุปได้ว่า $\{f_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน [0,1] ■

ตัวอย่าง 3.2.11 : จงแสดงว่าถ้า $f_n(x) = x^n$ บน [0,1] แล้ว

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim f_n(x)dx$$

พิสูจน์ : พิจารณา

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \lim \int_0^1 x^n dx$$

$$= \lim \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$= \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน [0,1] เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$$

ให้ $g(x)=0$ โดยทฤษฎีบท 2.31 เราสรุปได้ว่า $\int_0^1 f(x)dx=0$ นั่นคือ

$$\int_0^1 \lim f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

$$= 0 = \lim \int_0^1 f_n(x)dx \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.2.11 แสดงให้เห็นว่า ถึงแม้ว่าการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของลำดับ $\{f_n\}$ เป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx \qquad (*)$$

แต่เงื่อนไขนี้ไม่เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับ (*)

ตัวอย่าง 3.2.12 : พิจารณาลำดับ $g_n(x)=(n^2+n)x^{n-1}(1-x)$ จงแสดงว่า

(1) แต่ละ g_n อินทิเกรตได้ บน $[0,1]$ และหาค่าของ $\int_0^1 g_n(x)dx$

(2) $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ สำหรับแต่ละ $x\in[0,1]$

(3) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx \neq \int_0^1 0dx$

พิสูจน์ : (1) พิจารณา n^2+n เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ ดังนั้น n^2+n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจาก $x^{n-1}-x^n$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ดังนั้น $x^{n-1}-x^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 2.19 จะได้ว่า g_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และโดยทฤษฎีบท 2.32 จะได้ว่า g_n อินทิเกรตได้บน $[0,1]$

ต่อไปเราจะหาค่าของ $\int_0^1 g_n(x)dx$

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 [(n^2+n)x^{n-1}(1-x)]dx$$

$$= (n^2+n)\int_0^1 (x^{n-1}-x^n)dx$$

$$= (n^2+n)\left[\int_0^1 x^{n-1}dx - \int_0^1 x^n dx\right]$$

$$= (n^2+n)\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= (n^2+n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= (n^2+n)\left(\frac{(n+1)-n}{n^2+n}\right)$$

$$= 1$$

(2) สำหรับแต่ละ $x \in (0,1)$ ให้ $g_n(x) = (n^2+n)x^{n-1}(1-x)$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+(n+1))x^n(1-x)}{(n^2+n)x^{n-1}(1-x)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+(n+1))x}{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)x}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)x}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x+\frac{2x}{n})$$

$$= x$$

เนื่องจาก $x \in (0,1)$ ดังนั้น $x < 1$

ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} < 1$ ดังนั้น โดยการทดสอบอัตราส่วนจะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 2.59 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$

(3) เนื่องจาก $\int_0^1 g_n(x)dx = 1$ สำหรับทุก $n \in I^+$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

แต่

$$\int_0^1 0dx = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx \neq \int_0^1 0dx$$

จะเห็นว่าแต่ละ g_n และ g อินทิเกรตได้ แต่ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx \neq \int_0^1 g(x)dx$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.13 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Cauchy Criterion for Uniform Convergence)

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามบน E แล้ว $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ฟังก์ชัน f บน E ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } x \in E \quad \text{เมื่อ } m > N, n > N$$

พิสูจน์: (⟶) ให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ฟังก์ชัน f บน E ให้ $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } x \in E \quad \text{เมื่อ } n > N$$

ดังนั้น ถ้า $m > N, n > N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(⟵) ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } x \in E \text{ เมื่อ } m > N, n > N$$

สำหรับแต่ละ $x \in E$ จะได้ว่า $\{f_n(x)\}$ เป็นลำดับโคชี

ดังนั้นเราจะนิยาม $f(x)$ บน E โดย

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{สำหรับ } x \in E$$

สำหรับทุก $x \in E$ และ $n > N$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_{N+1}(x) + f_{N+1}(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.14 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]-\{x_0\}$ ซึ่ง $x_0 \in [a,b]$ สำหรับ แต่ละ $n \in I^+$ $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ หาค่าได้ แล้ว

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

พิสูจน์ : สำหรับ ทุก n ซึ่ง $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ หาค่าได้ ให้ $\alpha_n = \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับโคชี

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]-\{x_0\}$

โดยทฤษฎีบท 3.2.13 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $m > N, n > N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{สำหรับทุก} \quad x \in [a,b]-\{x_0\} \qquad (*)$$

ให้ $n > N$ และ $m > N$ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \alpha_n \quad \text{และ} \lim_{x\to x_0} f_m(x) = \alpha_m$$

ดังนั้นมี $\delta_n > 0$ และ $\delta_m > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|\alpha_n - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{ถ้า} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta_n$$

$$|\alpha_m - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{ถ้า} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta_m$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_n, \delta_m\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_m| &\leq |\alpha_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \alpha_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับโคชี

โดยทฤษฎีบท 2.55 จะได้ว่า $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ให้

$$\alpha_0 = \lim \alpha_n$$

เราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha_0$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]-\{x_0\}$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง ถ้า $n > N_1$ แล้ว

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{สำหรับทุก} \quad x \in [a,b]-\{x_0\}$$

เลือก N_2 ซึ่ง ถ้า $n > N_2$ แล้ว $|\alpha_n - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{3}$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to x_0} f_N(x) = \alpha_N$

ดังนั้น จะมี $\delta_N > 0$ ซึ่ง

$$|f_N(x) - \alpha_N| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_N \quad \text{และ} \quad x \in [a,b]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |f(x) - \alpha_0| &\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \alpha_N| + |\alpha_N - \alpha_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha_0$$

นั่นคือ

$$\alpha_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$$

แต่

$$\alpha_0 = \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2.15: ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันมีอนุพันธ์บน $[a,b]$ และลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[a,b]$ ถ้าแต่ละฟังก์ชัน f_n' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ แล้ว f มีอนุพันธ์และ

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$$

พิสูจน์ : ให้ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน $[a,b]$ เนื่องจาก f_n' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และโดยทฤษฎีบท 2.32 จะได้ว่า g อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ให้ $x \in [a,b]$ เนื่องจากลำดับ $\{f_n'\}$ อินทิเกรตได้บน $[a,x]$ และ ลำดับ $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน $[a,x]$ โดยทฤษฎีบท 3.2.8 จะได้ว่า

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt$$

พิจารณา $\int_a^x f_n'(t)dt$ โดยทฤษฎีบท 2.35 จะได้ว่า

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a)\end{aligned}$$

และทุก $x \in [a,b]$ จะได้

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.36 จะได้ว่า

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \blacksquare$$

โดยแท้จริง เราสามารถลดข้อกำหนด ที่ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุด เป็น $\{f_n(x_0)\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสำหรับบางค่าของ $x_0 \in [a,b]$ และข้อสรุปยังเป็นจริง ดังเราจะกล่าวถึงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.2.16: ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I ซึ่ง $[a,b] \subset I$ ถ้า

(1) มีจุด $x_0 \in [a,b]$ ที่ซึ่ง $\{f_n(x_0)\}$ ลู่เข้า

(2) $\{f_n'\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม บน $[a,b]$

แล้ว

(1) $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม สู่ฟังก์ชัน f บน $[a,b]$

(2) $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ บน (a,b)

พิสูจน์ : (1) เราจะใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย แสดงว่าลำดับ $\{f_n\}$ สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.2.14 และดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{f_n(x_0)\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้น $\{f_n(x_0)\}$ เป็นลำดับโคชีและจะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่งถ้า $m > N_1$ และ $n > N_1$ แล้ว

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เนื่องจาก $\{f_n'(x)\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่งถ้า $m > N_2$ และ $n > N_2$ แล้ว

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{สำหรับทุก} \quad x \in [a,b] \qquad (*)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m,n ให้

$$g_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x) \quad \text{สำหรับทุก} \quad x \in [a,b]$$

ดังนั้น $g_{n,m}(x)$ มีอนุพันธ์บน $[a,b]$ และจาก (*) จะได้

$$|g_{n,m}'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{สำหรับทุก} \quad x \in [a,b]$$

สำหรับทุก $x, y \in [a,b]$, $x < y$ และ $m > N_2, n > N_2$ โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยจะมี $z \in (x,y)$ ซึ่ง

$$|g_{n,m}(x) - g_{n,m}(y)| = |g_{n,m}'(z)||y - x|$$

ดังนั้น

$$|g_{n,m}(x) - g_{n,m}(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $w \in [a,b]$

เราจะแสดงว่า

$$|f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon$$

ถ้า $m,n > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|f_n(w) - f_m(w)| &= |f_n(w) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_m(w) + f_m(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\le |(f_n(w) - f_m(w)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&= |g_{n,m}(w) - g_{n,m}(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$

(2) เลือก $z_0 \in (a,b)$ สำหรับทุก $x\in[a,b], x\neq z_0$ และทุกจำนวนเต็มบวก n นิยาม

$$h_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(z_0)}{x-z_0}$$

$$h(x) = \frac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0} \qquad (**)$$

เราจะแสดงว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ h บน $[a,b]-\{z_0\}$

ถ้า $x\neq z_0$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|h_n(x)-h_m(x)\right| &= \left|\frac{f_n(x)-f_n(z_0)}{x-z_0}-\frac{f_m(x)-f_m(z_0)}{x-z_0}\right| \\
&= \frac{1}{\left|x-z_0\right|}\left|(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(z_0)-f_m(z_0))\right| \\
&= \frac{1}{\left|x-z_0\right|}\left|(g_{n,m}(x)-g_{n,m}(z_0)\right| \\
&\leq \frac{1}{\left|x-z_0\right|}\left|x-z_0\right|\sup_{t\in[a,b]}\left|g'_{n,m}(t)\right|\leq\varepsilon \qquad \text{ถ้า } m,n>N_2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{h_n\}$ เป็นลำดับโคชีแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]-\{z_0\}$ นั่นคือ $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ฟังก์ชัน $\phi(x)$ บน $[a,b]-\{z_0\}$ จากสมการ (**) และ $\{f_n\}$ ลู่เข้าสู่ f บน $[a,b]-\{z_0\}$ ทำให้ได้ว่า $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ฟังก์ชัน h บน $[a,b]-\{z_0\}$

เนื่องจาก $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ $\phi(x)$ และลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ $h(x)$ บน $[a,b]-\{z_0\}$ ดังนั้น $h(x)=\phi(x)$ บน $[a,b]-\{z_0\}$ เพราะฉะนั้น $\{h_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ h บน$[a,b]-\{z_0\}$

จากทฤษฎีบท 3.2.14 ซึ่งกล่าวว่า

$$\lim_{x\to z_0}\left(\lim_{n\to\infty}h_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to z_0}h_n(x)\right)$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to z_0}h_n(x) = f'_n(z_0)$ เนื่องจาก f_n หาอนุพันธ์ได้ และ $\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x)=h(x)$

ถ้า $x\neq z_0$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.2.14 เราได้ว่า

$$\lim_{x\to z_0} h(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0)$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.14 เราทราบว่า $\lim_{n\to\infty} f_n'(z_0)$ หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) \;=\; \lim_{x\to z_0} h(x) \;=\; \lim_{x\to z_0} \frac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0} \;=\; f'(z_0) \qquad \blacksquare$$

3.3 ผลบางประการที่น่าสนใจซึ่งเกี่ยวข้องกับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (Some Interesting Results Related to Uniform Convergence)

ทฤษฎีบท 3.3.1 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามบน $[a,b]$ และแต่ละ f_n มีขอบเขตบน $[a,b]$ ถ้า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ แล้ว f มีขอบเขตบน $[a,b]$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ และ f_n มีขอบเขตบน $[a,b]$ ให้ $\varepsilon > 0$ โดยบทนิยาม 3.2.1 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } x \in [a,b] \text{ และทุก } n > N$$

นั่นคือ ทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$f_m(x) - \varepsilon < f(x) < f_m(x) + \varepsilon \qquad \text{เมื่อ } m = N+1$$

เนื่องจาก f_m มีขอบเขต ดังนั้น จะมีจำนวนจริง M_m ซึ่ง

$$|f_m(x)| < M_m \quad \text{ทุก } x \in [a,b]$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$-M_m - \varepsilon < f_m(x) - \varepsilon < f(x) < f_m(x) + \varepsilon < M_m + \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $M = M_m + \varepsilon$ แล้วจะได้ว่า

$$-M < f(x) < M$$

นั่นคือ $|f(x)| < M$ ทุก $x \in [a,b]$

ดังนั้น f มีขอบเขต $\blacksquare$

ตัวอย่าง 3.3.2 : สำหรับ $n \in I^+$ กำหนด

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(n, \frac{1}{x}) & \text{ถ้า} \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{ถ้า} \quad x = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันมีขอบเขตซึ่งลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[0,1]$ แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ถ้า} \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{ถ้า} \quad x = 0 \end{cases}$$

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่า แต่ละ f_n มีขอบเขต ให้ $n \in I^+$ และ $x \in (0,1]$

ถ้า $\frac{1}{x} \le n$ จะได้ว่า $f_n(x) = \frac{1}{x} \le n$

ถ้า $\frac{1}{x} > n$ จะได้ว่า $f_n(x) = n$

เพราะฉะนั้น $f_n(x) \le n$

เนื่องจาก ทุก $x \in (0,1]$ เราได้ว่า $\frac{1}{x} > 1$ และ ทุก $n \in I^+$ จะได้ว่า $n \ge 1$

เพราะฉะนั้น $f_n(x) \ge 1$

ดังนั้น $1 \le f_n(x) \le n$ เมื่อ $x \in (0,1]$

นั่นคือ แต่ละ f_n มีขอบเขต

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[0,1]$

ให้ $x \in (0,1]$ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N \in I^+$ ซึ่งสอดคล้อง $N \ge \frac{1}{x}$

ดังนั้น ทุก $n > N$ จะได้ $f_n(x) = \frac{1}{x}$ และ

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า f ไม่มีขอบเขต ให้ $M > 0$

เลือก $x \in (0,1]$ ซึ่ง $0 < x < \frac{1}{M}$

จะได้ว่า $\frac{1}{x} > M$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 3.3.3 : ถ้า $\{f_n\}$ และ $\{g_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชัน ซึ่งลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f และ g บน E ตามลำดับ แล้ว

(1) $\{f_n + g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ $f + g$ บน E

(2) $\{kf_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ kf บน E เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิสูจน์ : (1) เนื่องจาก ลำดับ $\{f_n\}$ ลู่เข้าสู่ f และลำดับ $\{g_n\}$ ลู่เข้าสู่ g บน E

โดยทฤษฎีบท 2.45 จะได้ว่า $\{f_n + g_n\}$ ลู่เข้าสู่ $f + g$ บน E

ดังนั้น $\{f_n + g_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ $f + g$ บน E

ต่อไปจะแสดงว่า $\{f_n + g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ $f + g$ บน E

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{และ} \quad \left| g_n(x) - g(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และ

ทุก $n > N$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|(f_n + g_n)(x) - (f+g)(x)\right| &= \left| f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x) \right| \\
&= \left| f_n(x) - f(x) + g_n(x) - g(x) \right| \\
&\le \left| f_n(x) - f(x) \right| + \left| g_n(x) - g(x) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{f_n + g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ $f + g$ บน E

(2) ให้ $\varepsilon > 0$ จะพิจารณาค่า k เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 : $k = 0$

เพราะฉะนั้น $kf_n = 0$ ดังนั้น $\{kf_n\}$ ลู่เข้าสู่ $0 = kf$

กรณีที่ 2 : $k \neq 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $|k| > 0$ และ $\dfrac{\varepsilon}{|k|} > 0$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าสู่ f ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > N$ เราได้ว่า

$$|kf_n(x) - kf(x)| = |k||f_n(x) - f(x)| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\{kf_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ kf บน E ■

ตัวอย่าง 3.3.4 : ให้ $f_n(x) = g_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ บน $[0, \infty)$ จงพิสูจน์ว่า

(1) ลำดับ $\{f_n\}$ และลำดับ $\{g_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

(2) $\{f_n g_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบทีละจุด แต่ไม่เป็นลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

สำหรับทุก $x \in [0, \infty)$ และทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$\left|(x + \frac{1}{n}) - x\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้น ลำดับ $\{x + \dfrac{1}{n}\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ x บน $[0, \infty)$

(2) ประการแรกเราจะแสดงว่า $\{f_n g_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ fg บน $[0, \infty)$

พิจารณา $(f_n g_n)(x) = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2$ และ $(fg)(x) = x^2$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}
\lim (f_n g_n)(x) &= \lim \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \lim \left(x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim x^2 + \lim \frac{2x}{n} + \lim \frac{1}{n^2} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับ $\{(x+\frac{1}{n})^2\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ x^2 บน $[0,\infty)$

สมมติให้ $\{f_n g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ fg บน $[0,\infty)$

ให้ $\varepsilon=\frac{1}{2}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|(f_n g_n)(x)-(fg)(x)| = \left|(x+\frac{1}{n})^2-x^2\right| = \left|\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$$

พิจารณา $x=N$ ดังนั้น $x\in[0,\infty)$ และ

$$|(f_N g_N)(x)-(fg)(x)| = \left|\frac{2N}{N}+\frac{1}{N^2}\right| = 2+\frac{1}{N^2}>\varepsilon$$

ดังนั้น ลำดับ $\{f_n g_n\}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ fg บน $[0,\infty)$ ■

ทฤษฎีบท 3.3.5 : ถ้า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน E และ g เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน E แล้ว $\{gf_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน E

พิสูจน์ : เนื่องจาก $g(x)$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ดังนั้นจะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|g(x)|\le M$ สำหรับทุก $x\in E$

ให้ $\varepsilon>0$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน E ดังนั้นมี N ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|f_n(x)-0|<\frac{\varepsilon}{M} \qquad \text{สำหรับทุก } n>N \text{ และทุก } x\in E$$

ดังนั้น พิจารณา $n>N$ และ $x\in E$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |g(x)f_n(x)| &= |g(x)||f_n(x)| \\ &\le M|f_n(x)| \\ &< M(\frac{\varepsilon}{M}) = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{g(x)f_n(x)\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน E ■

ทฤษฎีบท 3.3.6: ให้ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f และ $\{g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ g บน E ถ้าแต่ละ f_n และ g_n เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน E แล้ว $\{f_n g_n\}$ ลู่เข้าแบบนิฟอร์มสู่ fg บน E

พิสูจน์ : เนื่องจาก f_n และ g_n เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต
ดังนั้นจะมีจำนวนจริงบวก M และ K ซึ่ง $|f_n| \le M$ และ $|g_n| \le K$

ให้ $\varepsilon > 0$

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ซึ่ง $n > N$ จะได้ว่า

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2N} \quad \text{และ} \quad |g_n - g| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

เลือก $N = \max(K, M)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f_n g_n - fg| &= |f_n g_n - f g_n + f g_n - fg| \\ &= |(f_n - f) g_n + f(g_n - g)| \\ &\le |f_n - f||g_n| + |f||g_n - g| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2N} K + \frac{\varepsilon}{2N} M \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.3.7 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[a,b]$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

พิสูจน์ : สมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ดังนั้นจะมี $x_0, x_1 \in [a,b]$ ที่ซึ่ง $x_0 > x_1$ แล้ว $f(x_0) < f(x_1)$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{4}(f(x_1) - f(x_0))$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f ดังนั้นจะมี $N \in I^+$ ซึ่ง $n > N$
แล้ว $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ และ $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon$
จะได้ว่า

$$f_n(x_0) - f(x_0) + f(x_1) - f_n(x_1) \; < \; 2\varepsilon \; = \; 2\left(\frac{1}{4}(f(x_1) - f(x_0))\right) \; = \; \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_0))$$

$$[f_n(x_0) - f_n(x_1)] + [f(x_1) - f(x_0)] \quad < \quad \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_0))$$

$$f_n(x_0) - f_n(x_1) \; < \; -\frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_0)) < 0$$

เพราะฉะนั้น $f_n(x_0) < f_n(x_1)$

นั่นคือ f_n ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก่อให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ■

ทฤษฎีบท 3.3.8 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นซึ่งลู่เข้าสู่ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $[a,b]$ จงแสดงว่า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x, y \in [a,b]$ และ $0 < |x - y| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้องว่า

ถ้า $|x - y| \le \dfrac{1}{N}$ แล้ว $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

เลือก N ให้ใหญ่พอ ซึ่งจะทำให้มีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้

$$a + \frac{k}{N} \in [a,b] \qquad \text{ให้}$$

$$A = \{k \mid a + \frac{k}{N} \in [a,b]\}$$

เห็นได้ว่า A เป็นเซตจำกัด สมมุติ $A = \{1, 2, \ldots, r\}$ สำหรับแต่ละ $k \in A$ ให้

$$x_k = a + \frac{k}{N}$$

แล้ว $\{f_n(x_k)\}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_k)$

เลือก N_k ซึ่งถ้า $n > N_k$ แล้ว $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

ถ้า $n > \bar{N} = \max\{N_k\}$ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ถ้า $x \in [x_k, x_{k+1}]$ สำหรับ

$1 \le k \le r-1$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\
&\le |f_n(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&\le |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่ $x \in [a, x]$ หรือ $x \in [x_r, b]$ เราได้ผลในทำนองเดียวกันว่า $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 3.3.9 :ทฤษฎีบทของดีนี (Dini's theorem)

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$และเป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ซึ่งสอดคล้อง

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots \quad (x \in [a,b]) \qquad (*)$$

ถ้า $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $[a,b]$ แล้ว $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$

พิสูจน์ : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ให้ $g_n = f - f_n$

จะได้ว่า $g_1 = f - f_1 \ge f - f_2 = g_2$

ดังนั้น $g_1(x) \ge g_2(x) \ge \ldots \ge g_n(x) \ge \ldots$ เมื่อ $x \in [a,b]$ (**)

สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} [f(x) - f_n(x)] \\
&= \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{g_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ 0 บน $[a,b]$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[a,b]$ ให้ $\varepsilon > 0$

ถ้า $x \in [a,b]$ ดังนั้นมี N ซึ่ง ถ้า $n > N$ แล้ว

$$|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เลือก $N(x) > N$ ซึ่งสอดคล้อง $|g_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก $g_{N(x)}(x) = f(x) - f_{N(x)}(x)$ และ $f(x) \ge f_{N(x)}(x)$ ดังนั้น

$$0 \le g_{N(x)}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน $g_{N(x)}$ ต่อเนื่องที่ x เราจะได้ว่ามี $\delta_x > 0$ ซึ่ง ถ้า $y \in [a,b]$ และ $|y - x| < \delta_x$ แล้ว $|g_{N(x)}(x) - g_{N(x)}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$

ถ้า $y \in [a,b]$ และ $y \in I_x$ แล้ว $|g_{N(x)}(y) - g_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

พิจารณา

$$g_{N(x)}(y) = |g_{N(x)}(y)| \le |g_{N(x)}(y) - g_{N(x)}(x)| + |g_{N(x)}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เนื่องจาก $\mathfrak{I} = \{I_x \mid x \in [a,b]\}$ เป็นตัวคลุมเปิดของ $[a,b]$ และโดยบทนิยาม 2.11 $[a,b]$ เป็นเซตคอมแพกต์ จะได้ว่า $\mathfrak{I}$ มีตัวคลุมเปิดย่อยจำกัด สมมุติคือ $\{I_{x_1}, I_{x_2}, ..., I_{x_k}\}$

ให้ $N = \max\{N(x_1), N(x_2), ..., N(x_k)\}$

ถ้า $y \in [a,b]$ แล้ว $y \in I_{x_j}$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, ..., k\}$

ดังนั้น

$$g_{N(x_j)}(y) < \varepsilon$$

แต่ $N(x_j) \le N$ จะได้ว่า

$$g_N(y) \le g_{N(x_j)}(y) < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก $y \in [a,b]$ ซึ่ง $n > N$ จะได้ว่า

$$0 \le g_n(y) < \varepsilon$$

ดังนั้น $\{g_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ 0 บน $[a,b]$

นั่นคือ $\{f_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ ■

บทที่ 4

อนุกรมของฟังก์ชัน

SERIES OF FUNCTIONS

ในบทที่ 3 เราได้กล่าวถึงลำดับของฟังก์ชันซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน ในบทนี้เราจะศึกษาอนุกรมของฟังก์ชัน และการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน

4.1 การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass M - test)

ในหัวข้อนี้เราจะพิสูจน์การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมของฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1.1 : กำหนดให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน E สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ นิยาม $S_n : E \to R$ ดังนี้

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ สำหรับทุก } x \in E$$

เรากล่าวว่า $\{S_n\}$ เป็น**อนุกรมของฟังก์ชัน (Series of functions)** บน E ซึ่งมีเทอมที่ k คือ f_k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และเขียนแทนอนุกรมด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ หรือ } f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$$

เราเรียก S_n ว่า**ผลบวกย่อยที่** n **(n^{th} partial sum)** ของอนุกรม

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ด้วย $\sum f_n$

บทนิยาม 4.1.2 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน E และ $f : E \to R$ เรากล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **ลู่เข้าแบบทีละจุด (converges pointwise)** สู่ f บน E ถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน E

เราเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

และเรียก f ว่า**ลิมิตทีละจุด (pointwise limit)** ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

นอกจากนี้เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าแบบทีละจุด(pointwise convergent series)**

บทนิยาม 4.1.3 : เรากล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม (converges uniformly)** สู่ f บน E ถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E

นอกจากนี้เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม(uniform convergent series)**

ทฤษฎีบท 4.1.4 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มของอนุกรม (Cauchy Criterion for Uniform Convergence of a Series)

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามบน E แล้วอนุกรม $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน E ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E \text{ เมื่อ } m > n > N$$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม $\sum f_n$ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in E$ และทุกจำนวนเต็มบวก $m > n$ จะได้ว่า

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$$
$$S_m(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)$$

เนื่องจาก $m > n$ ดังนั้น

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right|$$

$(\rightarrow)$ ให้ $\varepsilon > 0$

ดังนั้นมีฟังก์ชัน S นิยามบน E ซึ่งลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ S บน E จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งโดยบทนิยาม 3.2.1

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E \text{ เมื่อ } n > N$$

ดังนั้น ถ้า $m > n > N$ แล้ว

$$\left|\sum f_i(x)\right| = \left|S_m(x) - S_n(x)\right| \quad = \left|S_m(x) - S(x) + S(x) - S_n(x)\right|$$
$$\leq \left|S_m(x) - S(x)\right| + \left|S_n(x) - S(x)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\leftarrow$) ให้ $\varepsilon > 0$ จากกำหนดให้จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\left|S_m(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum f_i(x)\right| < \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E \text{ เมื่อ } m > n > N$$

สำหรับแต่ละ $x \in E$ จะได้ว่า $\{S_n(x)\}$ เป็นลำดับโคชี

ดังนั้นเราจะนิยาม $S(x)$ บน E โดย

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad \text{สำหรับ } x \in E$$

สำหรับทุก $x \in E$ และ $n > N$ เราได้ว่า

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| \quad = \left|S_n(x) - S_{N+1}(x) + S_{N+1}(x) - S(x)\right|$$
$$\leq \left|S_n(x) - S_{N+1}(x)\right| + \left|S_{N+1}(x) - S(x)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 4.1.5 : การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (*Weierstrass M - test*)

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามบน E สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n มีจำนวนจริงบวก M_n ซึ่ง

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E$$

ถ้า $\sum M_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว $\sum f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน E

พิสูจน์: สำหรับจำนวนเต็มบวก n,m ใดๆ ซึ่ง $m > n$ เราได้ว่า

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} M_i \qquad \text{สำหรับทุก } x \in E$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\sum M_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยเกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของจำนวนจริง จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$\sum_{i=n+1}^{m} M_i < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } m > n > N$$

ดังนั้น $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in E$ และ ทุก $m > n > N$

โดยทฤษฎีบท 4.1.4 จะได้ว่า $\sum f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน E ■

ตัวอย่าง 4.1.6 : ให้ $f_n(x) = n^2 e^{-nx}$ บน $[1,\infty)$ จงแสดงว่า $\sum f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[1,\infty)$

พิสูจน์ : เนื่องจาก e^{-nx} เป็นฟังก์ชันลด และ $|f_n(x)| \le n^2 e^{-n}$ บน $[1,\infty)$

พิจารณา อนุกรม $\sum n^2 e^{-n}$

สำหรับทุก $n \in I^+$ ให้ $g_n = n^2 e^{-n}$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+1)}{n^2} e^{-1}$$

$$= e^{-1} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

โดยทฤษฎีบท 2.64 จะได้ว่า อนุกรม $\sum n^2 e^{-n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ โดยทฤษฎีบท 4.1.5 เราสรุปได้ว่า อนุกรม $\sum n^2 e^{-nx}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[1,\infty)$ ■

ทฤษฎีบท 4.1.7 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบน E ถ้า $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

พิสูจน์ : สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ นิยาม $S_n : E \to R$ ดังนี้

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

เนื่องจากแต่ละ f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.19 S_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E จากสิ่งที่กำหนดให้เราทราบว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E โดยทฤษฎีบท 3.2.3 เราสรุปได้ว่า f มีความต่อเนื่องบน E ■

บทแทรก 4.1.8 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบน E และ $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน E ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องบน E แล้ว $\sum f_n$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน E

ตัวอย่าง 4.1.9 : จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{k=0}^{\infty} x(1+x)^{-k}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[0,1]$ แต่ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน$[0,1]$

วิธีทำ : ประการแรกจะหาลิมิตทีละจุดของ $\sum_{k=0}^{\infty} x(1+x)^{-k}$ บน $[0,1]$ สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ ให้

$$S_n(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1+x)^{n-1}}$$

พิจารณา $x = 0$ จะได้ว่า $S_n(0) = 0$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0$

พิจารณา $0 < x \le 1$ จะได้ว่า $\frac{1}{2} \le (1+x)^{-1} < 1$

และอนุกรม $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots$ มีผลบวกเท่ากับ $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}} = 1+x$

ดังนั้น $\sum_{k=0}^{\infty} x(1+x)^{-k}$ ลู่เข้าแบบทีละจุดสู่ f บน $[0,1]$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ 1+x & \text{ถ้า } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องบน $[0,1]$ ดังนั้นโดยบทแทรก 4.1.8 จะได้ว่า $\sum_{k=0}^{\infty} x(1+x)^{-k}$ ไม่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[0,1]$ ■

สองทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.2.8 และ 3.2.16 และการพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.7 ดังนั้นเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทโดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.1.10 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันซึ่งแต่ละ f_n อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ถ้า $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ f บน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx$ หาค่าได้ และ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right)dx = \sum\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

ทฤษฎีบท 4.1.11 : ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I ซึ่ง $[a,b]\subset I$ ถ้า

(1) $\sum f_n(x_0)$ ลู่เข้าสำหรับบางค่า $x_0 \in [a,b]$

(2) $\sum f_n'$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ h บน $[a,b]$

แล้ว

(1) $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มสู่ฟังก์ชัน f บน $[a,b]$

(2) $\sum f_n'(x) = h(x) = f'(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$

4.2 อนุกรมกำลัง (Power Series)

ให้ a, a_0 เป็นจำนวนจริง และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นิยาม $f_n : E \to R$ ดังนี้

$$f_n(x) = a_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

ดังนั้น $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชัน และ $\sum f_n$ เป็นอนุกรมของฟังก์ชัน

เราจะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมกำลัง (power series)** และจะเขียนแทนอนุกรมกำลังโดย

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

สิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาเกี่ยวกับอนุกรมกำลัง คือการหาเซต E ที่ใหญ่ที่สุดซึ่งทำให้ $\sum a_n(x-a)^n$ ลู่เข้าบน E

ตัวอย่างของอนุกรมกำลังได้แก่

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{4.2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{4.2.2}$$

จะเห็นได้ว่าถ้าเราแทนค่า x ในอนุกรมกำลังใดๆ ข้างบนด้วยจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ผลที่ได้จะเป็นอนุกรมหนึ่ง และถ้าแทน x ในอนุกรมกำลังนั้นด้วยจำนวนจริงอีกจำนวนหนึ่งก็จะได้อนุกรมที่ต่างกันออกไป เช่น การแทน x ด้วย $\frac{1}{3}$ และ 3 ในอนุกรม (4.2.1) จะได้อนุกรมต่อไปนี้

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots \tag{4.2.3}$$

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots \tag{4.2.4}$$

ซึ่งอนุกรม (4.2.3) เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่อนุกรม (4.2.4) เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้นอนุกรมกำลังจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกขึ้นอยู่กับค่าของ x

ตัวอย่าง 4.2.1 : จงหาค่า x ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2(3)^2} + \frac{x^3}{3(3)^3} + \ldots + \frac{x^n}{n(3)^n} + \ldots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ : สำหรับ $n \in I^+$ ให้ $u_n = \dfrac{x^n}{n(3)^n}$

$$\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \frac{n3^n}{|x|^{n+1}}$$

$$= \lim \frac{n}{(n+1)} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3}$$

ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2.64 จะได้ว่าอนุกรมที่กำหนดมาเป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $\frac{|x|}{3}<1$ หรือ $|x|<3$ และเป็นอนุกรมลู่ออกถ้า $|x|>3$ ถ้า $|x|=3$ จะได้อนุกรมฮาร์โมนิก

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

เมื่อ $x=3$ อนุกรมที่กำหนดจะเป็นอนุกรมลู่ออก และเมื่อ $x=-3$ อนุกรมที่กำหนดมาคืออนุกรม

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-3\le x<3$ และเป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $x\ge 3$

ทฤษฎีบท 4.2.2 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x=x_0\neq 0$ แล้วอนุกรมนี้จะลู่เข้าสัมบูรณ์ทุก x ซึ่ง $|x|<|x_0|$

พิสูจน์ : เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.52 ได้ว่า มีจำนวนบวก M ซึ่ง

$$\left|a_n {x_0}^n\right|\le M \qquad \text{เมื่อ } n\in I^+$$

พิจารณา x ใดๆ ซึ่ง $|x|<|x_0|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|a_n x^n\right| &= \left|a_n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n {x_0}^n\right| \\ &= \left|a_n {x_0}^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.60 เราได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ลู่เข้า เนื่องจาก $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.62 จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

นั่นคือ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับทุก x ซึ่ง $|x|<|x_0|$ ■

บทแทรก 4.2.3 : ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(1) ถ้าอนุกรมลู่เข้าที่ $x_1 \neq 0$ แล้วอนุกรมนี้จะลู่เข้าสัมบูรณ์สำหรับทุก $|x|<|x_1|$ นอกจากนี้อนุกรมลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s,s]$ เมื่อ $0<s<|x_1|$

(2) ถ้าอนุกรมลู่ออกที่ x_2 แล้วอนุกรมจะลู่ออกที่ทุก $x>|x_2|$

พิสูจน์ : (1) เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_1}^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 2.59 จะได้ว่า

$\lim_{n\to\infty} a_n {x_1}^n = 0$

โดยบทนิยามของลิมิตจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสำหรับทุก $n>N$ จะได้

$\left|a_n {x_1}^n\right|<1$

พิจารณาจำนวนจริง s ซึ่งสอดคล้อง $0<s<|x_1|$

ถ้า $x\in[-s,s]$ และ $n>N$ แล้วได้ว่า

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n {x_1}^n\right|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq \left|\frac{s}{x_1}\right|^n$$

ถ้าให้ $r=\left|\frac{s}{x_1}\right|$ แล้ว $0<r<1$ และจะได้ว่า

$$\left|a_n x^n\right| \leq r^n \quad \text{เมื่อ } n>N$$

โดยทฤษฎีบท 2.60 ได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.62 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์บน $[-s,s]$

โดยการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s, s]$ เนื่องจาก สำหรับ x ใดๆ ซึ่ง $|x| < |x_1|$ อยู่ในบางช่วงของ $[-s, s]$ ซึ่ง $s < |x_1|$ ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์สำหรับทุก x ซึ่ง $|x| < |x_1|$

(2) ให้ y ใดๆ ซึ่ง $|y| > |x_2|$ สมมติให้ อนุกรมกำลังลู่เข้าที่ y โดย (1) จะได้ว่าอนุกรมจะลู่เข้าสัมบูรณ์สำหรับทุก x ซึ่ง $|x| < |y|$ รวมทั้ง $x = x_2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นอนุกรมลู่ออกสำหรับทุก $x > |x_2|$ ■

บทนิยาม 4.2.4 : รัศมีของการลู่เข้า (radius of convergence) ของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ คือค่า r (เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ) ซึ่งสอดคล้อง

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{ลู่เข้าเมื่อ} \quad |x-a| < r \quad \text{และ ลู่ออกเมื่อ} \quad |x-a| > r$$

และเรียกช่วง $(a-r, a+r)$ ว่า**ช่วงของการลู่เข้า (interval of convergence)** ของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

ทฤษฎีบท 4.2.5 : ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าสำหรับบางค่า $x_1 \neq 0$ และ ลู่ออกสำหรับบางค่า x_2 แล้วจะมีจำนวนจริงบวก r ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) ถ้า $|x| < r$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์

(2) ถ้า $|x| > r$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่ออก

พิสูจน์ : พิจารณา $S = \{x \mid \sum a_n x^n \text{ ลู่เข้า } \}$
เห็นได้ว่า $x_1 \in S$ และ $x_2 \notin S$ ดังนั้น $S \neq \phi$
ให้ $x \in S$ ถ้า $|x| > |x_2|$ แล้วโดยบทแทรก 4.2.3 ได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ที่ x_2
ดังนั้น $x_2 \in S$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้
เพราะฉะนั้น $|x| \leq |x_2|$

นั่นคือ S มีขอบเขตบนและโดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ r เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

เนื่องจาก $\left|\frac{x_1}{2}\right| \in S$ และ $\left|\frac{x_1}{2}\right| > 0$

เพราะฉะนั้น $r > 0$

(1) ให้ $|x| < r$ เนื่องจาก r เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

ดังนั้น $|x|$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ S เพราะฉะนั้นมี $y \in S$ ซึ่ง $|x| < y$

โดยบทแทรก 4.2.3 เราสรุปได้ว่าอนุกรมกำลังลู่เข้าที่ x

(2) ให้ $|x| > r$ โดยทฤษฎีบท 2.1 จะมี z ซึ่งสอดคล้อง $r < z < |x|$

สมมติ อนุกรมกำลังลู่เข้าที่ x ดังนั้นโดยบทแทรก 4.2.3 อนุกรมกำลังลู่เข้าที่ z

เพราะฉะนั้น $z \in S$ และจะได้ $z \le r$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ดังนั้นอนุกรมกำลังลู่ออกที่ x ■

ข้อสังเกต 4.2.6 : (1) ทุกอนุกรมกำลัง ซึ่งสอดคล้องทฤษฎีบท 4.2.5 จะมีรัศมีของการลู่เข้าเป็นจำนวนจริงบวก

(2) สำหรับอนุกรมกำลังซึ่งลู่เข้าที่ $x = 0$ เท่านั้น เราจะกล่าวว่าอนุกรมกำลังนี้มีรัศมีของการลู่เข้าเท่ากับ 0

(3) สำหรับอนุกรมกำลังซึ่งลู่เข้าที่ทุกจำนวนจริง x เราจะกล่าวว่าอนุกรมกำลังนี้มีรัศมีของการลู่เข้าเท่ากับ $+\infty$

ตัวอย่าง 4.2.7 : จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรม

$$1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

วิธีทำ : ให้ $u_n=\dfrac{x^n}{n2^n}$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|\left|\frac{x}{2}\right|=\left|\frac{x}{2}\right|$$

ดังนั้นอนุกรมกำลังลู่เข้า ถ้า $|x|<2$ และอนุกรมกำลังลู่ออก ถ้า $|x|>2$

เพราะฉะนั้นรัศมีของการลู่เข้าเท่ากับ 2 ■

ตัวอย่าง 4.2.8 : จงหาช่วงของการลู่เข้าสำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n}$$

วิธีทำ : เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x^n|}{2^n n}}=\dfrac{|x|}{2}<1$ ถ้า $|x|<2$ และ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x^n|}{2^n n}}>1$ ถ้า $|x|>2$

ดังนั้น รัศมีของการลู่เข้าสำหรับอนุกรมคือ 2 และอนุกรมลู่เข้าบนช่วง (-2,2) เรายังต้องตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่จุดปลายของช่วง

ที่จุด $x=2$ อนุกรมที่กำหนดให้คืออนุกรมฮาร์โมนิก $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก

ที่จุด $x=$ -2 อนุกรมที่กำหนดให้คืออนุกรมฮาร์โมนิกสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1^n}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าสำหรับอนุกรมคือ [-2,2) ■

ตัวอย่าง 4.2.9 : จงหารัศมีของการลู่เข้าและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม

$$1+(x-2)+(x-2)^2+\ldots+(x-2)^n+\ldots$$

วิธีทำ : อนุกรมนี้มีเทอมที่ n เป็น $(x-2)^n$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(x-2)^{n+1}\right|}{(x-2)^n} = |x-2|$$

เนื่องจากอนุกรมที่กำหนดมาจะเป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า $|x-2|<1$ และเป็นอนุกรมลู่ออกถ้า $|x-2|>1$ ดังนั้นรัศมีของการลู่เข้าเป็น 1 และช่วงของการลู่เข้าคือ (1,3) ■

ข้อสังเกต 4.2.10 : รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ เป็นค่าเดียวกัน

บทนิยาม 4.2.11 : ให้ r เป็นรัศมีของการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ซึ่งมีค่าไม่เป็น 0 สำหรับทุก x ซึ่ง $|x|< r$ นิยาม

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

เรากล่าวว่าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **แทนฟังก์ชัน** f (***represents*** f) ภายในช่วงของการลู่เข้า หรือ f **ถูกแทนด้วย (*is represented by*)** อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ทฤษฎีบท 4.2.12 : ถ้าฟังก์ชัน f ถูกแทนด้วยอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ในช่วง $(-r,r)$ เมื่อ $r>0$ แล้วได้ว่า

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-r,r)$

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx$ สำหรับทุก α,β ใน $(-r,r)$

พิสูจน์ : (1) สำหรับทุก $n \in I^+$ และทุก $x \in (-r,r)$ ให้ $f_n(x) = a_{n-1}(x-a)^{n-1}$ ให้ $y \in (-r,r)$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $y > 0$ เลือก $s, x_1 \in (-r,r)$ ซึ่ง $y < s < x_1$ โดยบทแทรก 4.2.3 จะได้ว่า $\sum a_n x^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s,s]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.7 จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[-s,s]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ y

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $y \le 0$ เลือก $s, x_1 \in (-r,r)$ ซึ่ง $|y| < s < |x_1|$ โดยบทแทรก 4.2.3 จะได้ว่า $\sum a_n x^n$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s,s]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.7 จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[-s,s]$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ y

(2) ให้ $\alpha, \beta \in (-r,r)$ และ $\alpha < \beta$

เนื่องจาก f_n อินทิเกรตได้บน $[\alpha,\beta]$ โดยทฤษฎีบท 4.1.10 จะได้ว่า $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ หาค่าได้ และ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta \left(a_n x^n\right) dx$$

สำหรับกรณีที่ $\alpha > \beta$ เราอาศัยผลต่อไปนี้คือ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$$

แล้วใช้ผลที่พิสูจน์แล้วข้างต้นกับ $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ ก็จะได้ข้อสรุปตามที่ต้องการ ■

ทฤษฎีบท 4.2.13 : ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ แทนฟังก์ชัน f บนช่วง $(-r,r)$ เมื่อ $r > 0$ แล้วได้ว่า

(1) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ เมื่อ $x \in (-r,r)$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็นค่าเดียวกัน

พิสูจน์ : (1) จะแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s,s]$ เมื่อ $0 < s < r$ สำหรับ $s \in (0,r)$ จะมีจำนวนจริงบวก x_0 ซึ่ง $s < x_0 < r$

เนื่องจากอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ ลู่เข้า ดังนั้น $\{a_n x_0^n\}$ มีขอบเขต และสรุปได้ว่ามีจำนวนบวก M ซึ่งสำหรับทุก ๆ n เราได้ว่า

$$\left|a_n x_0^n\right| = \left|a_n\right| x_0{}^n \le M$$

แล้วได้ว่า ถ้า $x \in [-s, s]$ แล้ว

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| \le n\left|a_n\right| s^{n-1} = n\frac{\left|a_n\right| x_0{}^n s^{n-1}}{x_0{}^n} \le nM\,\frac{s^{n-1}}{x_0{}^n} = n\frac{M}{s}\left(\frac{s}{x_0}\right)^n$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{M}{s}\left(\frac{s}{x_0}\right)^n = \frac{M}{s}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{s}{x_0}\right)^n$$

พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{s}{x_0}\right)^n$ โดยทฤษฎีบท 2.64 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{s}{x_0}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จากการทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ เราสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์มบน $[-s, s]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.1.11(2) จะได้ว่า

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{เมื่อ } x \in [-s, s]$$

นั่นคือ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ เมื่อ $x \in (-r, r)$

(2) จาก (1) เราได้ว่ารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ มีค่าอย่างน้อยเท่ากับ r

ต่อไปเราจะแสดงว่ารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ มีค่าอย่างมากเท่ากับ r

สมมติ มี x_0 ซึ่ง $|x_0| \ge r$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0{}^{n-1}$ ลู่เข้า

เลือกจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $k > |x_0|$

ดังนั้น $\left|a_k x_0{}^k\right| < \left|k a_k x_0{}^{k-1}\right|$ และสรุปได้โดยทฤษฎีบท 2.62 ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $|x_0| < r$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้นรัศมีของการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ จะมีค่าอย่างมาก

เท่ากับ r นั่นคือ อนุกรม $\sum a_n x^n$ และอนุกรม $\sum na_n x^{n-1}$ มีรัศมีของการลู่เข้าเป็นค่าเดียวกัน ■

ทฤษฎีบท 4.2.14 : ถ้า $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ เมื่อ $|x|<r$ แล้ว $a_n = b_n, n\in\{0,1,2,\ldots\}$

พิสูจน์ : ให้ $x=0$ ดังนั้น $a_0=b_0$ โดยทฤษฎีบท 4.2.13 ได้ว่า

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} \tag{1}$$

แทนค่า $x=0$ ใน (1) จะได้ $a_1=b_1$ โดยการหาอนุพันธ์ของ $f'(x)$ และแทนค่า $x=0$ จะได้ $a_2=b_2$ กระทำเช่นนี้เรื่อยๆ ไปจะได้ $a_n=b_n$ ทุก n ■

ข้อสังเกต 4.2.15 : กำหนดให้ r เป็นรัศมีของการลู่เข้าของ $\sum a_n x^n$ และให้ $n\in I^+$ แล้วได้ว่า

$$f^{(n)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)a_n x^{n-k} \quad \text{เมื่อ} \quad x\in(-r,r)$$

และ $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)a_n x^{n-k}$ มีรัศมีของการลู่เข้าเท่ากับ r

4.3 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

ในหัวข้อนี้เราต้องการศึกษาว่า ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ มาให้จะมีเงื่อนไขอะไรบ้างที่ทำให้สามารถหาอนุกรมกำลังที่แทนฟังก์ชันนั้นได้

บทนิยาม 4.3.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับที่ a แล้วเราจะเรียกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ว่า**อนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ** $f(x)$ **รอบจุด** a **(Taylor serie for** $f(x)$ **about** $x=a$**)** ในกรณีที่ $a=0$ เราเรียกอนุกรมนี้ว่า**อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin series)**

ทฤษฎีบท 4.3.2 : ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับในเซต $(a-R, a+R)$ และ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ สำหรับบางค่าของ u ซึ่งอยู่ระหว่าง a กับ x แล้ว

ทุก $x \in (a-R, a+R)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

พิสูจน์ : ให้ $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

เราสังเกตว่า

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

ดังนั้น $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ก็ต่อเมื่อ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ■

ตัวอย่าง 4.3.3 : จงแสดงว่าอนุกรมแมคลอริน สำหรับ $f(x) = e^x$ ลู่เข้าสู่ e^x สำหรับทุกๆ x

พิสูจน์ : เนื่องจาก $f^{(n)}(x) = e^x$ สำหรับทุก $n \geq 0$ ดังนั้น $f^{(n)}(0) = 1$

แล้วจะได้ว่าอนุกรมแมคลอรินสำหรับ e^x คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ เราได้ว่า

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$$ สำหรับบาง t ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 กับ x

เนื่องจาก $0 < |t| < |x|$ ดังนั้น

$$|R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

โดยการทดสอบอัตราส่วน จะได้ว่า $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 2.59 จะได้ว่า

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

พิจารณา $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$ เนื่องจาก $0 \le |R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0$

โดยทฤษฎีบท 2.50 จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

นอกจากนี้เราได้ว่า

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

และ

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 4.3.4 : จงแสดงว่า $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x

พิสูจน์ : เริ่มต้นเราจะหาอนุกรมแมคลอริน สำหรับ $f(x) = \cos x$

เนื่องจาก $f'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots$, $f''(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots$

$$f'''(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad , \quad f^{(4)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

จะได้ว่า $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ และ $f^{(2k+1)}(0) = 0$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอริน สำหรับ $\cos x$ คือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

พิจารณา x ใด ๆ ใน R เราได้ว่า

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$ สำหรับบาง t ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 กับ x

แต่ $f^{(n+1)}(t)$ คือ $\pm\cos(t)$ หรือ $\pm\sin(t)$

ดังนั้น $\left| f^{(n+1)}(t) \right| \le 1$ เพราะฉะนั้น

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

จากตัวอย่าง 4.3.3 เราได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ และดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

ดังนั้น สำหรับ x ใด ๆ จะได้ว่า

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \blacksquare$$

ข้อสังเกต 4.3.5 : ในการตรวจสอบว่าฟังก์ชันหนึ่งถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ได้หรือไม่ เราอาจไม่จำเป็นต้องตรวจสอบจากเงื่อนไขว่า $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ตัวอย่างเช่น ถ้าฟังก์ชันนี้เขียนเป็นผลบวก ผลต่างหรือผลคูณของสองฟังก์ชัน ซึ่งแต่ละฟังก์ชันถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์หรืออนุกรมแมคลอรินได้ เราสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่พิจารณาจะถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์หรืออนุกรมแมคลอรินได้ ทั้งนี้เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 2.66 และความจริงเกี่ยวกับผลคูณของอนุกรมกำลังในทฤษฎีบท 2.71 และทฤษฎีบท 4.2.14

ตัวอย่าง 4.3.6 : จงแทน $\sinh x$ ด้วยอนุกรมแมคลอริน

วิธีทำ : เนื่องจาก $\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ และ

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ดังนั้น

$$\sinh x = \frac{1}{2}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) - \frac{1}{2}(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots)$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 4.3.7 : จงแทน $\ln x$ ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $x = a > 0$

วิธีทำ : พิจารณา $\ln x = \ln a + \ln [1 + \frac{x-a}{a}]$ (1)

หาอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ $\ln [1 + \frac{x-a}{a}]$ ที่จุด $x = a$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x dx - \int_0^x xdx + \int_0^x x^2dx - \ldots$$

นั่นคือ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

ดังนั้น จาก (1) จะได้

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \ldots \qquad \text{เมื่อ } 0 < x < 2a \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 4.3.8 : จงแทน $\left[\dfrac{1+x}{1+x^2}\right]^{1/2}$ ด้วยอนุกรมแมคลอริน เมื่อ $|x|<1$

วิธีทำ : พิจารณา $\left[\dfrac{1+x}{1+x^2}\right]^{1/2} = (1+x)^{1/2}(1+x^2)^{-1/2}$

สามารถแสดงได้ว่า $(1+x)^m$ เมื่อ m เป็นจำนวนจริงถูกแทนด้วยอนุกรมแมคลอริน เมื่อ $|x|<1$ ได้ดังนี้

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

ดังนั้น

$$\left[\frac{1+x}{1+x^2}\right]^{1/2} = (1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\ldots)(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\ldots)$$

ถ้าต้องการกระจายถึงเทอมของ x ที่มีกำลังไม่เกิน 3 จะได้

$$\left[\frac{1+x}{1+x^2}\right]^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+\ldots \quad ■$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงว่ามีฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับแต่ไม่สามารถถูกแทนด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ได้

ตัวอย่าง 4.3.9 : จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ กำหนดข้างล่างนี้จะไม่เป็นผลบวกของอนุกรมแมคลอรินสำหรับฟังก์ชันนี้ทุก $x \neq 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ : ประการแรกเราแสดงว่า $f'(0)=0$ ดังนี้

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{1/h^2}} \qquad (\text{ ลิมิตรูป } \frac{\infty}{\infty} \ )$$

โดยกฎของโลปิตาลจะได้

$$f'(0) \ = \ \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-1}{h^2}}{\frac{-2e^{1/h^2}}{h^2}} \ = \ \lim_{h \to 0} \frac{h}{2e^{1/h^2}} = 0$$

ในทำนองเดียวกันเราแสดงได้ว่า $f''(0) = 0, \ldots f^{(n)}(0) = 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะฉะนั้นอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

แต่ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$

ดังนั้นอนุกรมแมคลอรินสำหรับ $f(x)$ ไม่แทน $f(x)$ เมื่อ $x \neq 0$ ■

ตัวอย่าง 4.3.10 : จงใช้อนุกรมประมาณค่าของ $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สาม

วิธีทำ : พิจารณา $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

ดังนั้น $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots$ เมื่อ $x \in [0, \infty)$

ซึ่งทำให้ $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 (1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots)dx$

อินทิกรัลทางขวามือหาได้โดยการหาอินทิกรัลแต่ละเทอม ดังนั้น

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx = (x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 6!} + \ldots)\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \frac{1}{4\cdot 6!} + \ldots$$

$$\approx 1\text{-}0.25\text{+}0.0139\text{-}0.0003$$

โดยทฤษฎีบท 2.68 เทอมที่สี่ทางขวามือมีค่าน้อยกว่า 0.0005 เราจึงคำนวณค่าของอินทิกรัลถึงเทอมที่สามเท่านั้น และได้ $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx 0.764$

บรรณานุกรม

[1] นริศรา สุขผ่อง. **ผลสืบเนื่องของการมีคุณสมบัติการลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม**. สารนิพนธ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2549.

[2] วารี เกรอต. **แคลคูลัส.** สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2539.

[3] อังคณา ศรีเตชานุพงศ์. **อนุกรมของจำนวนจริง.** การค้นคว้าอิสระ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2551.

[4] อรวรรณ์ กลั่นบุศย์. **ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา**. การค้นคว้าอิสระ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2551.

[5] Belding, D.F. **Foundations of Analysis**. Prentice-Hall,Inc, 1991.

[6] Kirkwood, J.R. **An Introduction to Analysis**.2nd ed. PWS Publishing Company, 1995.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล	นางสาวสำรวย ทองดอนเกรื่อง
ที่อยู่	28 หมู่ 2 ตำบลดอนข่อย อำเภอกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม 73140
ที่ทำงาน	โรงเรียนวัดหนองศาลา(ประชานุกูล) ตำบลทุ่งลูกนก อำเภอกำแพงแสน จังหวัดนครปฐม
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2547	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ เกียรตินิยมอันดับ 2 จากมหาวิทยาลัยศิลปากร
พ.ศ. 2548	สำเร็จการศึกษาประกาศนียบัตรบัณฑิต สาขาวิชาชีพครูวิทยาศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร
พ.ศ. 2549	ศึกษาต่อระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2549-ปัจจุบัน	ครู ค.ศ.1 โรงเรียนวัดหนองศาลา(ประชานุกูล) จังหวัดนครปฐม