เซตอันดับ

โดย

นางสาวสุนันทา พรายมี

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-11-6137-9

ORDERED SETS

By

Sununta Praymee

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2005

ISBN 974-11-6137-9

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง “เซตอันดับ” เสนอโดย นางสาวสุนันทา พรายมี เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....

(รองศาสตราจารย์ ดร. วิสาข์ จัติวัตร์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ รักษาราชการแทน

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

………../……………/……….

....ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)

………../……………/……….

....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)

………../……………/……….

K 45308311 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : เซตอันดับ

สุนันทา พรายมี : เซตอันดับ (ORDERED SETS) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ : รศ. ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ.59 หน้า. ISBN 974-11-6137-9

ในสารนิพนธ์ฉบับนี้ เราศึกษา เซตอันดับ ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตกับความสัมพันธ์บนเซตที่สอดคล้องสมบัติการสะท้อน การปฏิสมมาตร และการถ่ายทอด แสดงการสร้างเซตอันดับจากเซตอันดับที่มีอยู่เดิม ด้วยการนิยามอันดับบนยูเนียนของเซต และบนผลคูณคาร์ทีเซียน ยิ่งไปกว่านั้นเราศึกษาอันดับบนเซตของสายอักขระฐานสอง และเซตอันดับบนปริภูมิทอพอลอยี นอกจากนี้เรายังพิสูจน์ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2548
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K 45308311 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY
KEY WORD : ORDERED SETS

SUNUNTA PRAYMEE : ORDERED SETS. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. CHAWEWAN RATANAPRASERT, Ph.D. 59 pp. ISBN 974-11-6137-9

In this project, we study an ordered set which is a pair (P; $\leq$) consisting of a nonempty set P and a binary relation $\leq$ satisfying reflexivity, anti - symmetry and transitivity. We show some natural way of constructing an ordered set from ordered sets by defining an order on unions and products of sets. Moreover, we study orders on a set of all binary strings and on a topological T_0 space. Finally, we prove a representation theorem for a finite ordered set.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2005

Student's signature ……………………………………….

Master's Report Advisor's signature ………………………………………………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เพราะด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเติมเต็มในจุดอ่อนต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในระดับปริญญาตรีและปริญญาโท จนทำให้ศิษย์คนนี้ประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง และ รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต ประธานกรรมการ และคณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำ

ขอขอบคุณรุ่นพี่ และเพื่อน ๆ ในภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำแนะนำในเรื่องต่าง ๆ

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ และพี่ ที่มอบความรัก การดูแล และสนับสนุนการศึกษาจนทำให้ลูกมีความสำเร็จในวันนี้ได้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ในสารนิพนธ์นี้ เราศึกษาเซตอันดับ ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตกับความสัมพันธ์บนเซตที่สอดคล้องสมบัติการสะท้อน การปฏิสมมาตร และการถ่ายทอด เซตอันดับเป็นมโนคติของการวางนัยทั่วไปของอันดับ น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) แบบปกติที่รู้จักกันดีบนเซตของจำนวนจริง

ในบทที่ 2 เรากล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทที่เป็นพื้นฐานของมโนคติของเซตอันดับสำหรับเป็นพื้นฐานของการศึกษาในบทต่อ ๆ ไป เราเริ่มต้นบทด้วยการให้นิยามความสัมพันธ์ $\leq$ บนเซต P ที่สอดคล้อง สมบัติการสะท้อน(reflexivity) สมบัติการปฏิสมมาตร(anti - symmetry) และสมบัติการถ่ายทอด(transitivity) แล้ว (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับ ซึ่งเราเขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย Π

เรากล่าวถึงลักษณะหนึ่งที่มีประโยชน์และน่าสนใจของเซตอันดับ กล่าวคือ เราสามารถแทนเซตอันดับจำกัดได้ด้วยแผนภาพ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงการส่งระหว่างเซตอันดับที่ยืนยงอันดับ

ในบทที่ 3 เรากล่าวถึงการสร้างเซตอันดับจากเซตอันดับที่มีอยู่ ในลักษณะที่เซตอันดับที่ได้มีขนาดไม่น้อยกว่าเซตอันดับเดิมที่มีอยู่ ได้แก่ อันดับอินเวอร์ส $\leq^{\partial}$ ของ $\leq$ นั่นคือ $y \leq^{\partial} x$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq y$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ และเราเรียก เซตอันดับ (P; $\leq^{\partial}$) ว่า เซตอันดับคู่กันของ $\Pi :=$ (P;$\leq_P$) อันดับบนยูเนียนของเซต ที่เรียกว่า ยูเนียนต่างสมาชิก(disjoint union) และผลบวกเชิงเส้น (linear sum) และสุดท้ายอันดับบนผลคูณคาร์ทีเซียน ที่เรียกว่า อันดับปทานุกรม และอันดับตามพิกัด โดยแสดงเงื่อนไขที่ทำให้อันดับปทานุกรมเป็นโซ่ ส่วนอันดับตามพิกัดเรารู้จักกันดีในชื่อของผลคูณของเซตอันดับ

ในบทที่ 4 เราแสดงทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับ ในเทอมของเซตด้านลง โดยเริ่มด้วยการให้บทนิยาม เซตด้านลง $\downarrow$Q และเซตด้านขึ้น $\uparrow$Q สำหรับสับเซต Q ของเซตอันดับ และบทนิยามไอดีลอันดับ (O(P); $\subseteq$) และสุดท้าย เราพิสูจน์ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับ

ในบทที่ 5 เรากล่าวถึงบทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของปริภูมิทอพอลอยี แล้วแสดงชนิดของปริภูมิทอพอลอยี ที่เราสามารถนิยามอันดับบนปริภูมิทอพอลอยีนั้นได้

ในบทที่ 6 เราแนะนำมโนคติเบื้องต้นของกราฟซึ่งเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรื่องราวในบทนี้ และนิยามเซตของสายอักขระฐานสอง แล้วแสดงเงื่อนไขบนเซตของสายอักขระฐานสอง ที่ทำให้เราสามารถนิยามอันดับบนเซตของสายอักขระฐานสองได้ สุดท้ายเราพิสูจน์ว่า กราฟของเซตอันดับของสายอักขระฐานสองเป็นทรี

บทที่ 2
เซตอันดับ

ในบทนี้จะขอกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทในมโนคติของเซตอันดับ เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรื่องราวในสารนิพนธ์นี้

บทนิยามเซตอันดับ

ในหัวข้อนี้ เราจะเริ่มเรื่องราวของสารนิพนธ์โดยให้รู้จักกับความสัมพันธ์ที่เป็นอันดับและเซตอันดับ ความสัมพันธ์ที่เป็นอันดับแบบต่าง ๆ ที่เราคุ้นเคยกันเป็นอย่างดี รวมทั้งทฤษฎีบทซึ่งกล่าวถึงสมบัติที่น่าสนใจของเซตอันดับ

2.1 บทนิยาม : ให้ P เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์บนเซต P

(หมายความว่า $\leq \subseteq P \times P$) เราเรียกความสัมพันธ์ $\leq$ ว่า *อันดับ (order)* บนเซต P หรือ “น้อยกว่าหรือเท่ากับ” ถ้า $\leq$ สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. สมบัติการสะท้อน (reflexivity)

นั่นคือ $x \leq x$ สำหรับทุก ๆ x ใน P

2. สมบัติการปฏิสมมาตร (anti - symmetry)

นั่นคือ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก ๆ x, y ใน P

3. สมบัติการถ่ายทอด (transitivity)

นั่นคือ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ สำหรับทุก ๆ x, y, z ใน P

เราเรียกคู่อันดับ $(P;\leq)$ ว่า *เซตอันดับ (ordered set)* และถ้า P เป็นเซตจำกัด เราจะเรียก $(P;\leq)$ ว่า *เซตอันดับจำกัด (finite ordered set)* และอาจแทนเซตอันดับ $(P;\leq)$ ด้วยสัญลักษณ์ Π

ถ้า $(P;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $Q \subseteq P$ แล้วอันดับกำกัด (บน Q) $\leq_Q := \leq_Q$ เป็นอันดับบน Q ด้วย ดังนั้น $(Q; \leq_Q)$ ก็เป็นเซตอันดับซึ่งเราเรียกว่า *เซตอันดับย่อย (subordered set)* ของ Π

2.2 หมายเหตุ : ในกรณีที่มีการกล่าวถึงเซตอันดับพร้อม ๆ กันมากกว่า 1 เซตอันดับ และเพื่อไม่ให้เกิดการสับสน เราจะเขียน $\leq_{P}$ แทนอันดับ $\leq$ บนเซต P

ถ้า (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับ และในกรณีที่ไม่เกิดการสับสน เราอาจจะกล่าวว่า Π เป็นเซตอันดับ โดยละอันดับ $\leq$ ไว้

2.3 ตัวอย่างเซตอันดับ :

1. เห็นได้ชัดว่า“ น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) แบบปกติ ” บนเซตของจำนวนจริง R เป็นอันดับ

2. ความสัมพันธ์ "สับเซต ($\subseteq$)" เป็นอันดับบนเซตกำลัง(power set) ของเซต

3. กำหนดความสัมพันธ์การหารลงตัว (|) บนเซตของจำนวนเต็มบวก ข$^{+}$ ซึ่งนิยามสำหรับแต่ละคู่ a, b $\in$ ข$^{+}$ โดย “ a | b $\leftrightarrow$ ($\exists$c $\in$ ข$^{+}$)(b = ac) “ แล้ว | เป็นอันดับบน ข$^{+}$ ซึ่งจะขอแสดงการพิสูจน์ในที่นี้ ดังนี้

3.1 ให้ a $\in$ ข$^{+}$ แล้วเพราะ a = (a)(1) ดังนั้น a | a ทำให้ได้ว่า a | a สำหรับทุก ๆ a ใน ข$^{+}$ เพราะฉะนั้น | สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

3.2 ให้ a, b $\in$ ข$^{+}$ ซึ่ง a | b และ b | a แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก k และ q ที่ทำให้ b = ak และ a = bq ดังนั้น b = (kq)b แสดงว่า kq = 1 แต่เพราะว่า k ,q $\in$ ข$^{+}$ ทำให้ได้ k = 1 และ q = 1 จึงได้ว่า a = b เพราะฉะนั้น | สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3.3 ให้ a, b, c $\in$ ข$^{+}$ ซึ่ง a | b และ b | c แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก k และ q ที่ทำให้ b = ak และ c = bq ดังนั้น c = (ak)q = (kq)a ทำได้ว่า a | c เพราะฉะนั้น | สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น (ข$^{+}$; |) เป็น เซตอันดับ

●

2.4 บทนิยาม : ให้ (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับและ a, b $\in$ P เรากล่าวว่า a และ b *เปรียบเทียบกันได้ (comparable)* ถ้า a $\leq$ b หรือ b $\leq$ a แต่ถ้าข้อความ “a $\leq$ b หรือ b $\leq$ a” ไม่จริง เราจะกล่าวว่า a และ b *เปรียบเทียบกันไม่ได้ (non - comparable)*

2.5 ตัวอย่าง : เซตอันดับ (ข$^{+}$; |) ของตัวอย่าง 2.3 ข้อ 3 ประกอบด้วยสมาชิก 9 และ 3 ซึ่ง

เปรียบเทียบกันได้ แต่สมาชิก 5 และ 7 เปรียบเทียบกันไม่ได้ เป็นต้น ●

2.6 บทนิยาม : เราเรียกเซตอันดับ $\Pi := (P; \leq)$ ว่า *โซ่ (chain)* หรือ *เซตอันดับเชิงเส้น (linearly ordered set หรือ totally ordered set)* ถ้าทุก ๆ คู่สมาชิกใน P เปรียบเทียบกันได้ นั่นคือ " $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ " และถ้าไม่มีสมาชิกคู่ใดเลยใน P ซึ่งเปรียบเทียบกันได้ เราจะเรียก $(P,\leq)$ ว่า *ปฏิโซ่(antichain)* นั่นคือ " ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ "

ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนจริง R กับ น้อยกว่าหรือเท่ากับแบบปกติที่รู้จักกัน " $\leq$ " เป็นโซ่

2.7 บทนิยาม : ให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $r \subseteq P \times P$ เรากล่าวว่า r เป็น *อันดับโดยแท้ (strict order)* บน P ถ้า r สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. สมบัติการไม่สะท้อน (irreflexive)

นั่นคือ $(x, x) \notin r$ สำหรับทุก ๆ x ใน P

2. สมบัติการถ่ายทอด

ทฤษฎีบทต่อไป เราแสดงการเชื่อมโยงระหว่าง "อันดับ" กับ "อันดับโดยแท้"

2.8 ทฤษฎีบท : ให้ P เป็นเซต

1. ถ้า R เป็นอันดับบน P และนิยาม $r \subseteq P \times P$ โดย

" $a\,r\,b \Leftrightarrow a\,R\,b$ และ $a \neq b$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in P$ " แล้ว r เป็นอันดับโดยแท้บน P

2. ถ้า r เป็นอันดับโดยแท้บน P และนิยาม $R \subseteq P \times P$ โดย

" $a\,R\,b \Leftrightarrow a\,r\,b$ หรือ $a = b$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in P$ " แล้ว R เป็นอันดับบน P

บทพิสูจน์ 1. กำหนดให้ R เป็นอันดับบน P และนิยาม $r \subseteq P \times P$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in P$ โดย $a\,r\,b \Leftrightarrow a\,R\,b$ และ $a \neq b$

1.1 ให้ $a \in P$ แล้ว $a = a$ ดังนั้น โดยนิยามของ r จะได้ $(a, a) \notin r$ เพราะฉะนั้น r สอดคล้องสมบัติการไม่สะท้อน

1.2 ให้ $a, b, c \in P$ ซึ่ง $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว ($a\,R\,b$ และ $a \neq b$) และ

($b\,R\,c$ และ $b \neq c$) ดังนั้น $a\,R\,b$ และ $b\,R\,c$ โดยที่ R เป็นอันดับ ทำให้ได้ $a\,R\,c$ ต่อไปสมมติว่า $a = c$ เนื่องจาก ($a\,R\,b$ และ $a \neq b$) และ ($b\,R\,c$ และ $b \neq c$) ดังนั้น $a\,R\,b$ และ $b\,R\,c$ แต่ $a = c$ ทำให้ได้ $a\,R\,b$ และ $b\,R\,a$ โดยที่ R เป็นอันดับ เราจึงได้ $a = b$ แต่ $a \neq b$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกันเอง ดังนั้น $a \neq c$ ทำให้ได้ $a\,R\,c$ และ $a \neq c$ ซึ่งแสดงว่า $a\,r\,c$ เพราะฉะนั้น r สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น r เป็น อันดับโดยแท้

2. กำหนดให้ r เป็นอันดับโดยแท้บน P และนิยาม $R \subseteq P \times P$ โดย $a\,R\,b \Leftrightarrow a\,r\,b$ หรือ $a = b$ สำหรับทุก ๆ $a, b \in P$

2.1 ให้ $a \in P$ แล้ว $a = a$ ดังนั้น $a\,R\,a$ แสดงว่า R สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2.2 ให้ $a, b \in P$ ซึ่ง $(a, b) \in R$ และ $(b, a) \in R$ แล้ว ($a\,r\,b$ หรือ $a = b$) และ ($b\,r\,a$ หรือ $b = a$) ทำให้แยกพิจารณาได้ 4 กรณีคือ

- $a\,r\,b$ และ $b\,r\,a$ ทำให้ได้ $a\,r\,a$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(a, a) \notin r$
- $a\,r\,b$ และ $b = a$ ทำให้ได้ $a\,r\,a$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(a, a) \notin r$
- $a = b$ และ $b\,r\,a$ ทำให้ได้ $a\,r\,a$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(a, a) \notin r$
- $a = b$ และ $b = a$ ทำให้ได้ $a = b$

เพราะฉะนั้น $a = b$ แสดงว่า R สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

2.3 ให้ $a, b, c \in P$ ซึ่ง $(a, b) \in R$ และ $(b, c) \in R$ จะได้ว่า ($a\,r\,b$ หรือ $a = b$) และ ($b\,r\,c$ หรือ $b = c$) ฉะนั้นแยกพิจารณาได้ 4 กรณีคือ

- $a\,r\,b$ และ $b\,r\,c$ ทำให้ได้ $a\,r\,c$
- $a\,r\,b$ และ $b = c$ ทำให้ได้ $a\,r\,c$
- $a = b$ และ $b\,r\,c$ ทำให้ได้ $a\,r\,c$
- $a = b$ และ $b = c$ ทำให้ได้ $a = c$

ฉะนั้นไม่ว่ากรณีใด ก็จะได้ ($a\,r\,c$ หรือ $a = c$) นั่นคือ $a\,R\,c$ แสดงว่า R สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น R เป็นอันดับ

■

หมายเหตุ : ในกรณีที่ $\leq$ เป็นอันดับ เราจะใช้สัญลักษณ์ $<$ แทนอันดับโดยแท้ที่กำหนดโดย $\leq$ และเรียก $<$ ว่า "น้อยกว่า"

แผนภาพเซตอันดับ

ลักษณะหนึ่งที่มีประโยชน์และน่าสนใจของเซตอันดับ คือ เราสามารถแทนเซตอันดับจำกัดได้ด้วยแผนภาพ แต่การเขียนแผนภาพของเซตอันดับต้องอาศัยแนวคิดเกี่ยวกับการปกคลุมดังต่อไปนี้

2.9 บทนิยาม : ให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับและให้ $x, y \in P$ เรากล่าวว่า x *ถูกปกคลุม(is covered by)* โดย y หรือ y *ปกคลุม(cover)* x และเขียนแทนด้วย $x \prec y$ หรือ $y \succ x$ ตามลำดับ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $x < y$ และ $x \leq z \leq y$ แล้ว $x = z$ หรือ $z = y$
[หมายความว่า ไม่มีสมาชิก z ใน P ตัวใดที่ทำให้ $x < z < y$ เป็นจริง]

2.10 ตัวอย่างสมาชิกปกคลุมในเซตอันดับ :

1. ในโซ่ (ข$^+$; $\leq$) เราจะได้ว่า $m \prec n$ ก็ต่อเมื่อ $n = m+1$ สำหรับทุก $m, n \in$ ข$^+$

2. ในโซ่ $(P ; \leq)$ เราจะได้ว่า ไม่มีคู่ x, y ใด ๆ ใน P ซึ่ง $x \prec y$

3. ในเซตกำลัง $(\wp(X) ; \subseteq)$ เราจะได้ว่า $A \prec B$ ก็ต่อเมื่อ $B = A \cup \{b\}$ สำหรับแต่ละ $b \in X \setminus A$

●

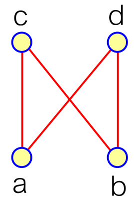
2.11 การสร้างแผนภาพ

เราสามารถแทนเซตอันดับจำกัด $(P; \leq)$ ได้ด้วยแผนภาพโดยใช้วงกลมเล็ก ο แทนแต่ละสมาชิกของ P และสำหรับแต่ละสมาชิก x และ y ของ P ซึ่ง $x \prec y$ เราจะลากเส้นตรง 1 เส้นเชื่อมโยงวงกลมของ x และ y และเราจะให้ความหมาย $x \leq y$ เมื่อ $x \neq y$ ก็ต่อเมื่อ มีการลากเส้นเชื่อมโยงต่อเนื่องกันระหว่าง " ο " เป็นจำนวนจำกัดเส้น ในลักษณะที่ลากจาก " ο " ของ x ไปในทิศทางขึ้นบนหรือแนวนอนจากซ้ายไปขวาไปยังจุด " ο " ของ y และแผนภาพที่เกิดขึ้น จากการสร้างดังกล่าวบน P เราเรียกว่า *แผนภาพ(diagram)* ของเซตอันดับ

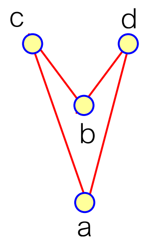
2.12 ตัวอย่างแผนภาพของเซตอันดับจำกัด :

1. ให้ $P = \{a, b, c, d\}$ และ $\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (a, d), (b, c),$

(b, d)} แล้ว (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับจำกัด ที่มีแผนภาพแสดงดังรูปที่ 2.3



หรือ

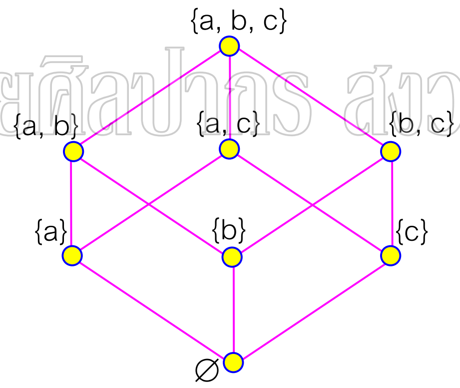


รูปที่ 2.3

สังเกตว่า เซตอันดับเดียวกันอาจมีได้หลายแผนภาพ

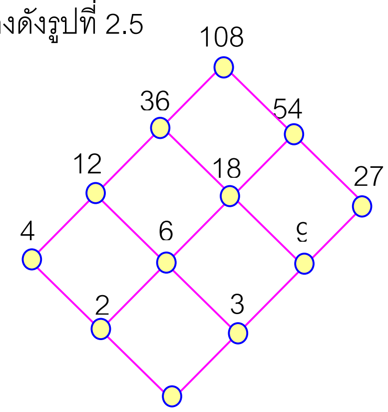
2. ให้ A = {a, b, c} แล้วเซตกำลังของเซต A คือ

$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$ เราจะได้แผนภาพของเซตอันดับ ($\wp(A)$; $\subseteq$) เป็นดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4

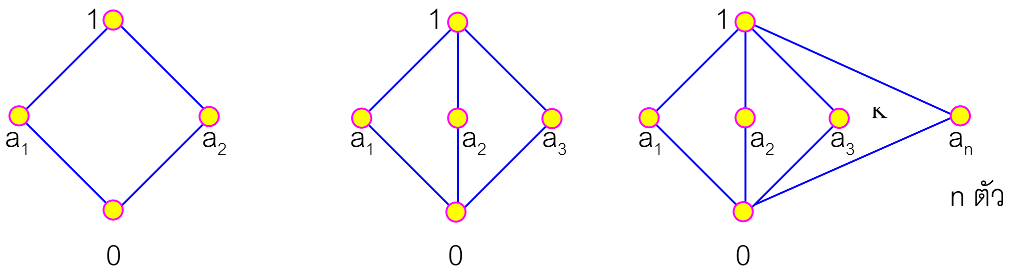
3. ให้ B เป็นเซตของตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของ 108 และอันดับคือ การหารลงตัว (|) ดังนิยามในตัวอย่าง 2.3 ข้อ (3) แล้ว B = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108} โดยมีแผนภาพของ (B; |) แสดงดังรูปที่ 2.5



1

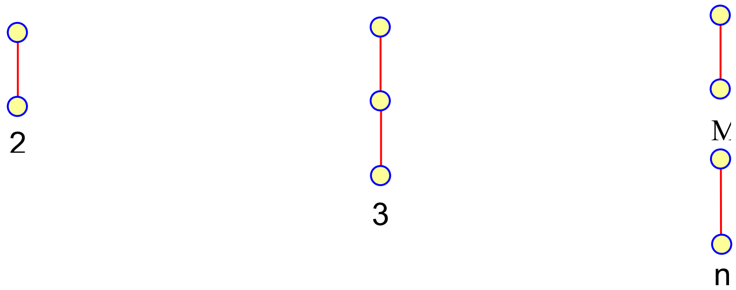
รูปที่ 2.5

4. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $M_n = \{0, 1, a_1, \ldots, a_n\}$ แล้วความสัมพันธ์ $\leq := \{(x, x) \mid x \in M_n\} \cup \{(0, a_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(a_i, 1) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นอันดับบน M_n โดยมีแผนภาพของเซตอันดับ M_2, M_3 และ M_n แสดงตามลำดับ ดังรูปที่ 2.6



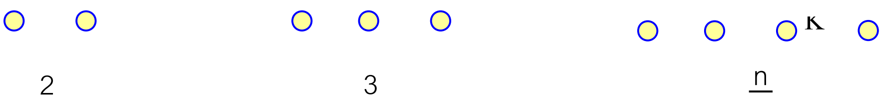
รูปที่ 2.6

5. ถ้า Π เป็นโซ่ ที่มีขนาด n แล้วเราเขียนแทนโซ่นี้ด้วย **n** เช่นตัวอย่างโซ่ขนาด **2**, **3** และ **n** แสดงตามลำดับได้ด้วยแผนภาพดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7

6. ถ้า Π เป็นปฏิโซ่ ที่มีขนาด n แล้วเราเขียนแทนปฏิโซ่นี้ด้วย $\underline{n}$ เช่นตัวอย่างปฏิโซ่ขนาด $\underline{2}$, $\underline{3}$ และ $\underline{n}$ แสดงตามลำดับได้ด้วยแผนภาพดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8

การส่งระหว่างเซตอันดับ

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงการส่งระหว่างเซตอันดับ

2.13 **บทนิยาม** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq)$ และ $\Theta := (Q; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เราจะเรียกฟังก์ชัน

$\varphi : P \rightarrow Q$ ว่า

1. *ฟังก์ชันยืนยงอันดับ (order – preserving)* หรือ *ฟังก์ชันทางเดียว (monotone)* ถ้า φ สอดคล้องเงื่อนไขที่ว่า ถ้า $x \leq_P y$ แล้ว $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

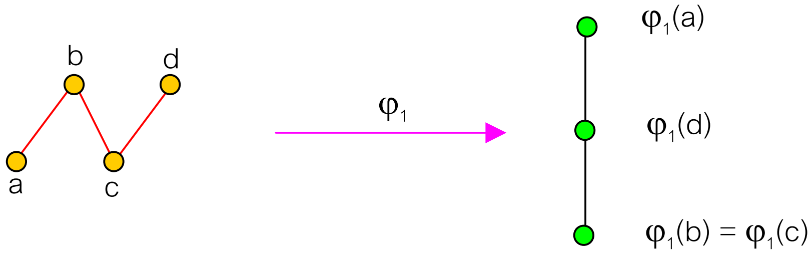
2. *ฟังก์ชันฝังอันดับ (order – embedding)* ถ้า φ สอดคล้องเงื่อนไขที่ว่า $x \leq_P y$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

3. *ฟังก์ชันถอดแบบอันดับ (order – isomorphism)* ถ้า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ แบบทั่วถึง (onto) [φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงก็ต่อเมื่อข้อความ $(\forall y \in Q)(\exists x \in P)(\varphi(x) = y)$ เป็นจริง]

ถ้ามีฟังก์ชันถอดแบบจากเซตอันดับ Π ไปบนเซตอันดับ Θ เราจะกล่าวว่า Π *ถอดแบบอันดับ(order - isomorphic)* กับ Θ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Pi \cong \Theta$ และถ้า $\Pi \cong \varphi(\Pi)$ เราจะกล่าวว่า Π *ฝังใน (embed)* Θ

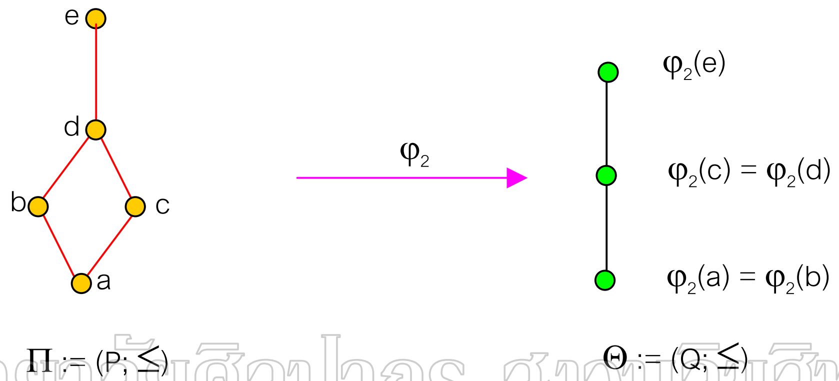
เพื่อให้เข้าใจลักษณะการส่งระหว่างเซตอันดับอย่างชัดเจนขึ้น เราจะแสดงการส่งแบบต่าง ๆ ให้เห็นด้วยแผนภาพ ในตัวอย่างต่อไปนี้

2.14 **ตัวอย่างฟังก์ชันบนเซตอันดับ** : กำหนด φ_1 , φ_2 และ φ_3 เป็นฟังก์ชันจากเซต P ของเซตอันดับ Π ไปยังเซต Q ของเซตอันดับ Θ ซึ่งแสดงการนิยามดังแผนภาพในรูปที่ 2.6 ถึงรูปที่ 2.8 ตามลำดับ

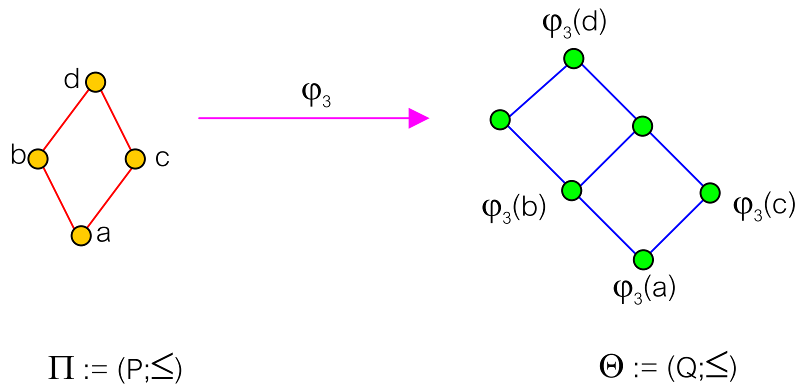


$\Pi := (P; \leq)$ $\Theta := (Q; \leq)$

รูปที่ 2.6 : φ_1 ไม่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เพราะว่า $a <_P b$ แต่ $\varphi_1(b) <_Q \varphi_1(a)$



รูปที่ 2.7 : φ_2 เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เพราะว่า ถ้า $x \leq_P y$ แล้ว $\varphi_2(x) \leq_Q \varphi_2(y)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ แต่ φ_2 ไม่เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ เพราะ $\varphi_2(b) <_Q \varphi_2(c)$ ในขณะที่ b กับ c เปรียบเทียบกันไม่ได้ใน Π



รูปที่ 2.8 : φ_3 เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เพราะว่า ถ้า $x \leq_P y$ แล้ว $\varphi_3(x) \leq_Q \varphi_3(y)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ และ φ_3 เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ เพราะว่า $x \leq_P y$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi_3(x) \leq_Q \varphi_3(y)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ แต่ φ_3 ไม่เป็นฟังก์ชันถอดแบบอันดับ เพราะว่า φ_3 ไม่ใช่ฟังก์ชันแบบทั่วถึง ●

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงสมบัติของการส่งที่เป็นฟังก์ชันผลประกอบบนเซตอันดับ

2.15 ทฤษฎีบท : ให้ $\Pi := (P; \leq)$, $\Theta := (Q; \leq)$ และ $\mathrm{P} := (R; \leq)$ เป็นเซตอันดับ

1. ถ้า $\varphi : P \to Q$ และ $\psi : Q \to R$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ แล้วฟังก์ชันผลประกอบ (composite function) $\psi \circ \varphi$ ซึ่งนิยามโดย $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

2. ถ้า $\varphi : P \to Q$ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ และ $\varphi(P)$ เป็น *ภาพถอด(image)* ของ φ (นั่นคือ $\varphi(P) = \{\varphi(x) \mid x \in P\}$) แล้ว $\varphi(P) \cong P$

3. ถ้า $\varphi : P \to Q$ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ แล้ว φ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

4. $(P; \leq)$ และ $(Q; \leq)$ เป็นอันดับถอดแบบ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันยืนยงอันดับ $\varphi : P \to Q$ และ $\psi : Q \to P$ ซึ่ง $\varphi \circ \psi = id_Q$ และ $\psi \circ \varphi = id_P$ (เมื่อ $id_S : S \to S$ แทน identity map นั่นคือการส่งบน S ซึ่งกำหนดโดย $id_S(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$)

บทพิสูจน์ 1. กำหนดให้ $\varphi : P \to Q$ และ $\psi : Q \to R$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ และให้ $x \leq_P y$ แล้ว $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ ดังนั้น $\psi(\varphi(x)) \leq_R \psi(\varphi(y))$ หรือก็คือ $(\psi \circ \varphi)(x) \leq_R (\psi \circ \varphi)(y)$ เพราะฉะนั้น $\psi \circ \varphi$ เป็น ฟังก์ชันยืนยงอันดับ

2. กำหนดให้ $\varphi : P \to Q$ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ เราเห็นได้ชัดว่า φ เป็นฟังก์ชันจาก P แบบทั่วถึง $\varphi(P)$ แล้วโดยบทนิยาม 2.13 ข้อ 3 จะได้ว่า $\varphi(P) \cong P$

3. กำหนดให้ $\varphi : P \to Q$ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ และให้ $x, y \in P$ ซึ่ง $\varphi(x) = \varphi(y)$ แล้วจากสมบัติการสะท้อนของอันดับบน Θ จะได้ $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ และ $\varphi(y) \leq_Q \varphi(x)$ แต่ φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ ดังนั้น $x \leq_P y$ และ $y \leq_P x$ และจากสมบัติการปฏิสมมาตรของอันดับบน Π ทำให้ได้ว่า $x = y$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

4. กำหนดให้ $\Pi \cong \Theta$ แล้วจะมีฟังก์ชันถอดแบบอันดับ $\varphi : P \to Q$ และโดยบทนิยาม 2.13 ข้อ 3 จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับแบบทั่วถึง และจากข้อ 3 ที่พิสูจน์แล้วข้างต้น เราจะได้ φ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้นจะมี $\psi = \varphi^{-1}: Q \to P$ ที่ทำให้ $\varphi \circ \psi = id_Q$ และ $\psi \circ \varphi = id_P$ เราจึงเหลือเพียงการแสดงว่า $\psi : Q \to P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $c, d \in Q$ ซึ่ง $c \leq_Q d$ แล้วเพราะ φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง จะมี $a, b \in P$ ซึ่ง $\varphi(a) = c$ และ $\varphi(b) = d$ ทำให้ได้ว่า $a = \psi(c)$ และ $b = \psi(d)$ แต่จาก $c \leq_Q d$ จะได้ $\varphi(a) = c \leq_Q d = \varphi(b)$

และเพราะว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ ฉะนั้น $a \leq_P b$ นั่นคือ $\psi(c) \leq_P \psi(d)$ ดังนั้น ψ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ในการพิสูจน์บทกลับ กำหนดให้ $\varphi : P \rightarrow Q$ และให้ $\psi : Q \rightarrow P$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ซึ่ง $\varphi \circ \psi = id_Q$ และ $\psi \circ \varphi = id_P$ แล้วจะแสดงว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ แบบทั่วถึง ให้ $a, b \in P$ ซึ่ง $\varphi(a) \leq_Q \varphi(b)$ แล้ว $\psi(\varphi(a)) \leq_P \psi(\varphi(b))$ และจาก $\psi \circ \varphi = id_P$ ทำให้ได้ว่า $a \leq_P b$ และเพราะ $\varphi \circ \psi = id_Q$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ทำให้ได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับแบบทั่วถึง เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันถอดแบบอันดับ นั่นคือ $\Pi \cong \Theta$

■

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงความสมมูลกันของฟังก์ชันถอดแบบอันดับ ในรูปฟังก์ชันฝังอันดับ และการปกคลุม

2.16 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq)$ และ $\Theta := (Q; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และให้ $\varphi : P \rightarrow Q$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. φ เป็น ฟังก์ชันถอดแบบอันดับ
2. $x \leq_P y$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$
3. $x \; p_P \; y$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(x) \; p_Q \; \varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$

บทพิสูจน์ (1) $\rightarrow$ (2) กำหนดให้ข้อความ (1) เป็นจริง แล้วจากบทนิยาม 2.13 ทำให้ได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ ดังนั้น $x \leq_P y$ ก็ต่อเมื่อ $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ ทำให้ได้ว่า ข้อความ (2) เป็นจริง

(2) $\rightarrow$ (3) กำหนดให้ $x \, p_P \, y$ แล้ว $x <_P y$ ดังนั้นโดยข้อความ (2) จะได้ $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ แต่ φ เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทำให้ได้ $\varphi(x) <_Q \varphi(y)$ ต่อไปให้ $w \in Q$ ซึ่ง $\varphi(x) < w < \varphi(y)$ แล้วเพราะว่า φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ดังนั้น มี $u \in P$ ซึ่ง $w = \varphi(u)$ แต่โดยข้อความ (2) และ φ เป็นฟังก์ชัน นั่นคือ ถ้า $\varphi(x) \neq \varphi(u)$ และ $\varphi(u) \neq \varphi(y)$ แล้ว $x \neq u$ และ $u \neq y$ ทำให้ได้ว่า $x <_P u <_P y$ ซึ่งขัดแย้งกับที่เรากำหนด $x \, p_P \, y$ ดังนั้น $\varphi(x) \; p_Q \; \varphi(y)$

ในการพิสูจน์บทกลับ กำหนดให้ $\varphi(x) \; p_Q \; \varphi(y)$ แล้ว $\varphi(x) <_Q \varphi(y)$ ดังนั้นโดยข้อความ (2) จะได้ $x \leq_P y$ แต่ φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทำให้ได้ $x <_P y$ ต่อไปให้ $z \in P$ ซึ่ง $x < z < y$ แล้วเพราะว่า φ เป็นฟังก์ชันจาก P ไปบน Q ดังนั้น จะมี $w \in Q$ ซึ่ง $\varphi(z) = w$ แต่จากข้อความ

(2) และ φ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ ถ้า $x \neq z$ และ $z \neq y$ แล้ว $\varphi(x) \neq \varphi(z)$ และ $\varphi(z) \neq \varphi(y)$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(x) <_Q \varphi(z) <_Q \varphi(y)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่เรากำหนด $\varphi(x)\ p_Q\ \varphi(y)$ ดังนั้น $x\ p_P\ y$

(3) → (1) กำหนดให้ข้อความ (3) เป็นจริง แล้วจะแสดงก่อนว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ ให้ $x \leq_P y$ แล้วจะมี $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ ใน P ซึ่ง $x = x_0\ p_P\ x_1\ p_P\ x_2\ p_P \ldots p_P\ x_n = y$ และโดยข้อความ (3) ทำให้ได้ $\varphi(x)= \varphi(x_0)\ p_Q\ \varphi(x_1)\ p_Q\ \varphi(x_2)\ p_Q \ldots p_Q\ \varphi(x_n) = \varphi(y)$ ดังนั้น $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$

ต่อไปให้ $x, y \in P$ ซึ่ง $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$ แล้วจะมี $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ใน Q ซึ่ง $\varphi(x) = y_0\ p_Q\ y_1\ p_Q\ y_2\ p_Q \ldots p_Q\ y_n = \varphi(y)$ แต่ φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง จึงมี $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ใน P ซึ่ง $y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), y_3 = \varphi(x_3), \ldots, y_n = \varphi(x_n)$ และทำให้ได้ $\varphi(x) = \varphi(x_0)\ p_Q\ \varphi(x_1)\ p_Q\ \varphi(x_2)\ p_Q \ldots p_Q\ \varphi(x_n) = \varphi(y)$ ดังนั้นโดยข้อความ (3) จะได้

$x = x_0\ p_P\ x_1\ p_P\ x_2\ p_P \ldots p_P\ x_n = y$ ทำให้ได้ $x \leq_P y$ เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับแบบทั่วถึง

แสดงว่า φ เป็น ฟังก์ชันถอดแบบอันดับ

 ■

2.17 ตัวอย่างฟังก์ชันยืนยงอันดับ :

1. กำหนดให้ S เป็นเซตซึ่ง $|S| > 1$ แล้วพิจารณาเซตอันดับ $(\wp(S); \subseteq)$ และ $(Q; \leq)$ เมื่อ $Q = \{0,1\}$ โดยที่ $0 \leq 1$ นั่นคือ Θ เป็นโซ่ 2 เรานิยาม $\varphi : \wp(S) \to Q$ โดย

$$\varphi(U) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } U \neq \varnothing \\ 0 & \text{ถ้า } U = \varnothing \end{cases}$$

สำหรับทุก ๆ $U \subseteq S$ แล้ว φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

บทพิสูจน์ ให้ $U_1, U_2 \in \wp(S)$ ซึ่ง $U_1 \subseteq U_2$ แล้วแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 : $U_1 = \varnothing$ แล้ว $\varphi(U_1) = 0$ และ $\varphi(U_2) \in \{0,1\}$ ดังนั้น $\varphi(U_1) \leq \varphi(U_2)$

กรณี 2 : $U_1 \neq \varnothing$ แล้ว $U_2 \neq \varnothing$ ทำให้ได้ $\varphi(U_1) = 1 = \varphi(U_2)$ ดังนั้น $\varphi(U_1) \leq \varphi(U_2)$ เพราะฉะนั้น ไม่ว่ากรณีใด ๆ จะได้ว่า $\varphi(U_1) \leq \varphi(U_2)$

[ขอให้สังเกตว่า ถ้าเรานิยาม φ ของตัวอย่าง 2.17 ข้อ 1 โดย

$$\varphi(U) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } U = S \\ 0 & \text{ถ้า } U \neq S \end{cases}$$

สำหรับทุก ๆ $U \subseteq S$ แล้วโดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันก็จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ]

2. กำหนดให้ ฅ$_0$ = ฅ $\cup \{0\}$ และนิยามความสัมพันธ์ $\mid \subseteq$ ฅ $\times$ ฅ$_0$ โดย $x \mid y$ ก็ต่อเมื่อมี $c \in$ ฅ$_0$ ซึ่ง $y = cx$ สำหรับทุก ๆ $x \in$ ฅ และ $y \in$ ฅ$_0$ แล้วโดยการพิสูจน์ของตัวอย่าง 2.3 ข้อ 3 จะได้ว่า (ฅ$_0$;$\mid$) เป็นเซตอันดับ

ให้ $n \in$ ฅ$_0$ และนิยาม φ : ฅ$_0 \rightarrow$ ฅ$_0$ โดย $\varphi(x) = nx$ สำหรับทุก ๆ $x \in$ ฅ$_0$ แล้ว φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

บทพิสูจน์ ให้ $n \in$ ฅ$_0$ ถ้า $n = 0$ แล้ว $\varphi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in$ ฅ$_0$ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เราจึงพิจารณากรณี $n \neq 0$ ถ้า $x = 0$ แล้ว $\varphi(x) = nx = 0$ และถ้า $\varphi(x) = 0$ แล้ว $nx = 0$ โดยที่ $n \neq 0$ เราจึงได้ $x = 0$ ดังนั้น $\varphi(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in$ ฅ$_0$

ให้ $x, y \in$ ฅ$_0$ โดยที่ $x \mid y$ แล้ว $x \neq 0$ และจะมี $c \in$ ฅ$_0$ ซึ่ง $y = cx$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(x) \neq 0$ และ $\varphi(y) = ny = n(cx) = c(nx) = c\varphi(x)$ ดังนั้น $\varphi(x) \mid \varphi(y)$ จึงสรุปได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

3. กำหนดให้ ฅ$^* := \{ n \in$ ข$^+ \mid 2$ ไม่เป็นตัวหารของ $n \}$ และ ฅ$^*_0 :=$ ฅ$^* \cup \{0\}$ และนิยามความสัมพันธ์ $\mid \subseteq$ ฅ$^* \times$ ฅ$^*_0$ ดังในข้อ (2) ข้างต้น แล้ว (ฅ$^*_0$;$\mid$) เป็นเซตอันดับ

พิจารณาเซตอันดับ (ฅ$_0$; $\mid$) และ (ฅ$^*_0$; $\mid$) เรานิยาม φ : ฅ$_0 \rightarrow$ ฅ$^*_0$ โดย

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ \dfrac{x}{2^k} & \text{ถ้า } x \neq 0 \text{ และ } k \in \text{ฅ}_0 \text{ โดยเป็นค่ามากสุดที่ } 2^k \text{ หาร } x \text{ ลงตัว} \end{cases}$$

แล้ว φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบทั่วถึง แต่ไม่เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ

บทพิสูจน์ ให้ $m \in$ ฅ$_0$ ถ้า m เป็นจำนวนคี่แล้ว $(m, 2^i) = 1$ ทุก ๆ $i \in$ ฅ$_0$ ฉะนั้น $2^i \mid m$ ก็ต่อเมื่อ $i = 0$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(m) = \dfrac{m}{2^0} = m$

ให้ $n_1 \in$ ฅ และ $n_2 \in$ ฅ$_0$ ซึ่ง $n_1 \mid n_2$ แล้ว $\varphi(n_1) \neq 0$ และจะมี $c \in$ ฅ$_0$ ซึ่ง $n_2 = cn_1$

กรณี 1 : n_2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n_1 และ c ต่างเป็นจำนวนคี่ ทำให้ได้ว่า $\varphi(n_1) = n_1$ และ $\varphi(n_2) = n_2$ และจาก $n_2 = cn_1$ จะได้ว่า $\varphi(n_2) = n_2 = cn_1 = c\varphi(n_1)$ เพราะฉะนั้น $\varphi(n_1) \mid \varphi(n_2)$

กรณี 2 : n_2 เป็นจำนวนคู่ ถ้า $n_2 = 0$ แล้ว $\varphi(n_2) = 0$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(n_1) \mid 0$ เพราะฉะนั้น $\varphi(n_1) \mid \varphi(n_2)$ แต่ถ้า $n_2 \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนคี่ t และจำนวนเต็มบวก k_2 ซึ่งมากสุดที่ทำให้ $n_2 = 2^{k_2}t$ ดังนั้น $\varphi(n_2) = \dfrac{n_2}{2^{k_2}} = \dfrac{2^{k_2}t}{2^{k_2}} = t$

กรณี 2.1 : ถ้า n_1 เป็นจำนวนคู่ แล้วจะมีจำนวนคี่ s และจำนวนเต็มบวก k_1 ซึ่งมากสุดที่ทำให้ $n_1 = 2^{k_1}s$ ดังนั้น $\varphi(n_1) = \dfrac{n_1}{2^{k_1}} = \dfrac{2^{k_1}s}{2^{k_1}} = s$ และจาก $2^{k_2}t = n_2 = cn_1 = c\,2^{k_1}s$ ถ้า c เป็นจำนวนคี่ แล้ว $k_2 = k_1$ ทำให้ได้ว่า $\varphi(n_2) = t = cs = c\varphi(n_1)$ ดังนั้น $\varphi(n_1) \mid \varphi(n_2)$ แต่ถ้า c เป็นจำนวนคู่ แล้วจะมีจำนวนคี่ w และจำนวนเต็มบวก k_C มากสุดที่ทำให้ $c = 2^{k_c}w$ และจาก $2^{k_2}t = c\,2^{k_1}s = 2^{k_1+k_c}ws$ เราจะได้ $t = ws$ ทำให้ได้ $\varphi(n_2) = w\varphi(n_1)$ ซึ่งแสดงว่า $\varphi(n_1) \mid \varphi(n_2)$

กรณี 2.2 : ถ้า n_1 เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\varphi(n_1) = n_1$ ดังนั้นไม่ว่า c จะเป็นจำนวนคี่หรือคู่ เราสามารถแสดงได้ ในทำนองเดียวกันกับกรณี 2.1 ว่า $\varphi(n_1) \mid \varphi(n_2)$

เพราะฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ต่อไปให้ $b \in$ ฅ$_0^*$ แล้ว b เป็นจำนวนคี่ เราเลือก a = b แล้วจะได้ว่า $\varphi(a) = b$ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

สุดท้าย จะเห็นว่า $\varphi(4) = 1$ และ $\varphi(5) = 5$ โดยที่ $1 \mid 5$ แต่ 4 □ 5 เพราะฉะนั้น φ ไม่เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ

4. พิจารณาเซตอันดับ ($\wp$(ฅ) ; $\subseteq$) ของเซตกำลังบน ฅ และนิยาม φ : $\wp$(ฅ) $\rightarrow$ $\wp$(ฅ) โดย

$$\varphi(U) = \begin{cases} \{1\} & \text{ถ้า } 1 \in U \\ \{2\} & \text{ถ้า } 2 \in U \text{ แต่ } 1 \notin U \\ \varnothing & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

แล้ว φ ไม่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ เพราะถ้า A = {2, 3} และ B = {1, 2, 3} แล้ว A, B $\in \wp$(ฅ) โดยที่ $A \subseteq B$ แต่ $\varphi(A) = \{2\}$ และ $\varphi(B) = \{1\}$ โดยที่ $\varphi(A) \vee \varphi(B)$

●

สมาชิกลักษณะพิเศษ

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงสมาชิกของเซตอันดับ ที่มีลักษณะพิเศษที่น่าสนใจ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นด้วยแผนภาพ

2.18 **บทนิยาม** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียกสมาชิก $a \in P$ ว่า*สมาชิกน้อยสุดเฉพาะกลุ่ม(minimal element)* ถ้าไม่มีสมาชิกตัวใดของ P ซึ่งน้อยกว่า a นั่นคือ
$(\forall x \in P)(x \leq a \rightarrow x = a)$

ในทางคู่กัน เราเรียกสมาชิก $b \in P$ ว่า*สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal element)* ถ้าไม่มีสมาชิกตัวใด ของ P ซึ่งมากกว่า b นั่นคือ $(\forall x \in P)(b \leq x \rightarrow b = x)$

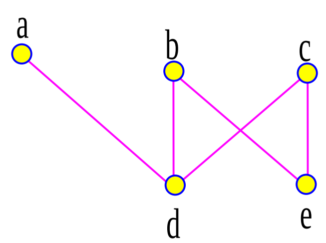
2.19 **บทนิยาม** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียกสมาชิก m ของ P ว่า *สมาชิกเล็กสุด (minimum element)* หรือ*สมาชิกล่างสุด(bottom element)* ถ้า $m \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$

ในทางคู่กัน เราเรียกสมาชิก n ของ P ว่า *สมาชิกใหญ่สุด (maximum element)* หรือ *สมาชิกบนสุด(top element)* ถ้า $n \geq x$ สำหรับทุก ๆ $x \in P$

2.20 **หมายเหตุ** : ให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และให้ $a, b \in P$ ซึ่งต่างเป็นสมาชิกล่างสุดของ P แล้วเพราะ a เป็นสมาชิกล่างสุดของ P และ $b \in P$ จะได้ว่า $a \leq b$ และเพราะ b เป็นสมาชิกล่างสุดของ P และ $a \in P$ จะได้ว่า $b \leq a$ แล้วโดยสมบัติการปฏิสมมาตรของ $\leq$ บน P จะได้ว่า $a = b$ นั่นหมายความว่าถ้า Π ประกอบด้วยสมาชิกล่างสุดแล้ว P จะมีสมาชิกล่างสุดได้เพียงหนึ่งเดียว เราจึงเขียนแทนสมาชิกล่างสุดของ Π ด้วยสัญลักษณ์ $\perp$ ในทำนองเดียวกันถ้า Π ประกอบด้วยสมาชิกบนสุดแล้ว P จะมีสมาชิกบนสุดได้เพียงหนึ่งเดียว เราจึงเขียนแทนสมาชิกบนสุดของ Π ด้วยสัญลักษณ์ □

2.21 ตัวอย่าง สมาชิกเล็กสุด สมาชิกน้อยสุดเฉพาะกลุ่ม สมาชิกใหญ่สุด และสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม :

1. ให้ $P_1 = \{a, b, c, d, e\}$ เป็นเซตอันดับซึ่งแสดงอันดับ ด้วยแผนภาพดังรูปที่ 2.9

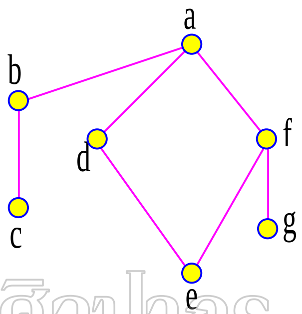


รูปที่ 2.9

จะเห็นว่า P_1 มี a, b, c เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม แต่ใน P_1 ไม่มีสมาชิกใหญ่สุด เพราะ a, b, c ต่างก็เปรียบเทียบกันไม่ได้ ดังนั้นไม่มี □

ในทำนองคู่กัน ใน P_1 มี d, e เป็นสมาชิกน้อยสุดเฉพาะกลุ่ม แต่ใน P_1 ไม่มีสมาชิกเล็กสุด เพราะ d, e ต่างก็เปรียบเทียบกันไม่ได้ ดังนั้นไม่มี $\perp$

2. ให้ P_2 = {a, b, c, d, e, f, g} เป็นเซตอันดับซึ่งแสดงอันดับ ด้วยแผนภาพดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10

จะได้ว่า P_2 มี a เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มและเป็นสมาชิกใหญ่สุดด้วย ดังนั้น □= a

แต่ในทางคู่กัน ใน P_1 มี c, e, g เป็นสมาชิกน้อยสุดเฉพาะกลุ่ม แต่ใน P_1 ไม่มีสมาชิกเล็กสุด เพราะ c, e, g ต่างก็เปรียบเทียบกันไม่ได้ ดังนั้น ไม่มี $\perp$

●

2.22 ตัวอย่างสมาชิกบนสุดและสมาชิกล่างสุด :

1. ในเซตอันดับ ($\wp$ (X) ; $\subseteq$) จะได้ว่า □ = X และ $\perp = \varnothing$
2. ในเซตอันดับ (ข $^+$; |) จะไม่มี □ แต่ $\perp$ = 1
3. ในเซตอันดับ (ข ; $\leq$) ไม่มีทั้ง □ และ $\perp$
4. ทุก ๆ ปฏิโซ่ (P; $\leq$) ซึ่ง $|P| \geq 2$ จะไม่มีทั้ง □ และ $\perp$ ●

บทที่ 3
การสร้างเซตอันดับ

ให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ เป็นเซตอันดับและ $Q \subseteq P$ แล้ว Q จะเป็นเซตอันดับย่อยของ Π ภายใต้อันดับกำกัด $\leq_Q$ ของ $\leq$ บน Q ดังกล่าวแล้วในบทที่ 2 เราอาจกล่าวว่า เซตอันดับย่อย $(Q; \leq_Q)$ เป็นการสร้างเซตอันดับจากเซตอันดับ Π ที่มีอยู่แล้ว แต่การสร้างเซตอันดับลักษณะนี้ เซตอันดับที่ได้จะมีขนาดไม่เกินขนาดของเซตอันดับเดิมที่มีอยู่

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการสร้างเซตอันดับจากเซตอันดับที่มีอยู่ ในลักษณะที่จะได้เซตอันดับที่มีขนาดไม่น้อยกว่าเซตอันดับเดิมที่มีอยู่ พร้อมทั้งแสดงแผนภาพของเซตอันดับที่สร้างขึ้น

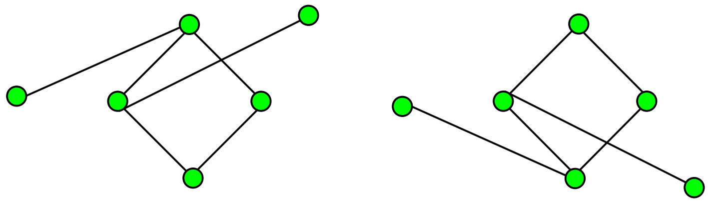
เซตอันดับคู่กัน

ในหัวข้อนี้ เราสร้างเซตอันดับจากเซตอันดับเดิมที่มีอยู่ และขนาดของเซตอันดับที่ได้มีขนาดเท่าเดิม

3.1 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ เป็นเซตอันดับ เราใช้สัญลักษณ์ $\leq^{\partial}$ แทนอินเวอร์สของ $\leq$ นั่นคือ $y \leq^{\partial} x$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq_P y$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in P$ แล้ว $\leq^{\partial}$ เป็นอันดับบน P ■

เราเรียก เซตอันดับ $(P; \leq^{\partial})$ ว่า *เซตอันดับคู่กัน (dual ordered set)* ของ Π และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Π^{∂} หรือ $(P; \leq_P)^{\partial}$

ขอให้สังเกตว่า เราสามารถเขียนแผนภาพของ Π^{∂} ได้อย่างง่าย ๆ โดยการพลิกแผนภาพของ Π จากบนลงล่างและจากล่างขึ้นบน ดังรูปที่ 3.1



เซตอันดับบนยูเนียนของเซต

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยามอันดับบนยูเนียนของเซต ซึ่งกระทำได้ 2 วิธี ดังจะแสดงการสร้างในทฤษฎีบท 3.2 และทฤษฎีบท 3.3 แล้วขนาดของเซตอันดับที่ได้ จะมีขนาดไม่น้อยกว่าขนาดของเซตอันดับเดิม

3.2 **ทฤษฎีบท : ยูเนียนต่างสมาชิก**(disjoint union)

กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ และ $\Theta := (Q; \leq_Q)$ เป็นเซตอันดับ โดยที่ P และ Q เป็นเซตต่างสมาชิก(disjoint set) นั่นคือ $P \cap Q = \varnothing$ และนิยาม $\leq$ บน $P \cup Q$ โดย

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x, y \in P \text{ และ } x \leq_P y & \text{หรือ} \\ x, y \in Q \text{ และ } x \leq_Q y \end{cases}$$

แล้ว $\leq$ เป็นอันดับ บน $P \cup Q$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ Π และ Θ เป็นเซตอันดับ ซึ่ง $P \cap Q = \varnothing$ และนิยาม $\leq$ บน $P \cup Q$ โดย

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x, y \in P \text{ และ } x \leq_P y & \text{หรือ} \\ x, y \in Q \text{ และ } x \leq_Q y \end{cases}$$

1. ให้ $a \in P \cup Q$ แล้ว ($a \in P$ และ $a \notin Q$) หรือ ($a \in Q$ และ $a \notin P$) และไม่ว่ากรณีใด เพราะว่า $a = a$ ทำให้ได้ $a \leq_P a$ หรือ $a \leq_Q a$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้น $a \leq a$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ $a, b \in P \cup Q$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว ($a, b \in P$ และ $a, b \notin Q$) หรือ ($a, b \in Q$ และ $a, b \notin P$)

ถ้า $a, b \in P$ และ $a, b \notin Q$ แล้ว $a \leq_P b$ และ $b \leq_P a$ ทำให้ได้ว่า $a = b$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a, b \in Q$ และ $a, b \notin P$ แล้ว $a \leq_Q b$ และ $b \leq_Q a$ ทำให้ได้ว่า $a = b$ ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด เราได้ว่า $a = b$

เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $a, b, c \in P \cup Q$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว ($a, b \in P$ และ $a, b \notin Q$) หรือ ($a, b \in Q$ และ $a, b \notin P$)

ถ้า ($a, b \in P$ และ $a, b \notin Q$) แล้วเพราะ $b \leq c$ จะได้ว่า $c \in P$ ดังนั้น $a \leq_P b$ และ $b \leq_P c$ ทำให้ได้ว่า $a \leq_P c$

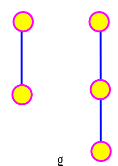
ถ้า (a, b $\in$ Q และ a, b $\notin$ P) แล้วเพราะ b $\leq$ c จะได้ว่า c $\in$ Q ดังนั้น a $\leq_Q$ b และ b $\leq_Q$ c ทำให้ได้ว่า a $\leq_Q$ c

ไม่ว่ากรณีใด จะได้ a $\leq_P$ c หรือ a $\leq_Q$ c อย่างใดอย่างหนึ่ง ทำให้ได้ว่า a $\leq$ c ดังนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $\leq$ เป็น เซตอันดับ ■

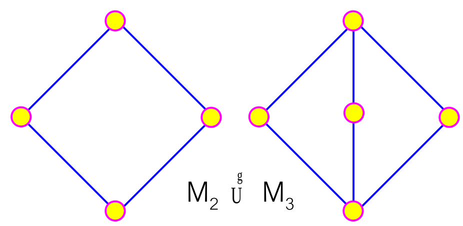
เราเรียกเซตอันดับ (P$\cup$ Q; $\leq$) ซึ่งนิยาม $\leq$ ดังในทฤษฎีบท 3.2 ว่า *ยูเนียนต่างสมาชิก (disjoint union)* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Pi \dot\cup \Theta$

แผนภาพของ $\Pi \dot\cup \Theta$ ทำได้โดยการนำแผนภาพของ Π กับ Θ มาวางข้าง ๆ กัน ดังรูปที่ 3.2 และ 3.3



$2 \dot\cup 3$

รูปที่ 3.2



$M_2 \dot\cup M_3$

รูปที่ 3.2

3.3 **ทฤษฎีบท : ผลบวกเชิงเส้น**(linear sum)

กำหนดให้ Π := (P; $\leq_P$) และ Θ := (Q; $\leq_Q$) เป็นเซตอันดับ โดยที่ P และ Q เป็นเซตต่างสมาชิก(disjoint set) นั่นคือ P$\cap$ Q = $\varnothing$ และนิยาม $\leq$ บน P$\cup$ Q โดย

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x, y \in P \text{ และ } x \leq_P y & \text{หรือ} \\ x, y \in Q \text{ และ } x \leq_Q y & \text{หรือ} \\ x \in P \text{ และ } y \in Q & \end{cases}$$

แล้ว $\leq$ เป็นอันดับ บน P$\cup$ Q

บทพิสูจน์ กำหนดให้ Π และ Θ เป็นเซตอันดับ ซึ่ง $P \cap Q = \varnothing$ และนิยาม $\leq$ บน $P \cup Q$ โดย

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x, y \in P \text{ และ } x \leq_P y \quad \text{หรือ} \\ x, y \in Q \text{ และ } x \leq_Q y \quad \text{หรือ} \\ x \in P \text{ และ } y \in Q \end{cases}$$

1. ให้ $a \in P \cup Q$ แล้ว ($a \in P$ และ $a \notin Q$) หรือ ($a \in Q$ และ $a \notin P$) และไม่ว่ากรณีใด เพราะว่า $a = a$ ทำให้ได้ $a \leq_P a$ หรือ $a \leq_Q a$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้น $a \leq a$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ $a, b \in P \cup Q$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq a$ พิจารณา $a \leq b$ แล้วจะมีกรณีที่เป็นไปได้ 3 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณี 1 : $a, b \in P$ แล้ว $a, b \notin Q$ ทำให้ได้ว่า $a \leq_P b$ และจาก $b \leq a$ จะได้ $b \leq_P a$ ทำให้ได้ว่า $a = b$

กรณี 2 : $a, b \in Q$ แล้ว $a, b \notin P$ ทำให้ได้ว่า $a \leq_Q b$ และจาก $b \leq a$ จะได้ $b \leq_Q a$ ทำให้ได้ว่า $a = b$

กรณี 3 : ($a \in P$ และ $b \in Q$) และจาก $b \leq a$ และ $b \in Q$ จะได้ $a \in Q$ ซึ่งขัดแย้งกับ $P \cap Q = \varnothing$ ดังนั้นกรณีนี้ไม่เกิดขึ้น

ไม่ว่ากรณีใดในกรณี 1 หรือกรณี 2 ที่เป็นไปได้ จะได้ว่า $a = b$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $a, b, c \in P \cup Q$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq c$ พิจารณา $a \leq b$ แล้วจะมีกรณีที่เป็นไปได้ 3 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณี 1 : $a, b \in P$ แล้ว $a \leq_P b$ และเพราะ $b \leq c$ ทำให้ได้ว่า $c \in P$ หรือ $c \in Q$

ถ้า $c \in P$ แล้ว $a \leq_P b$ และ $b \leq_P c$ จะได้ $a \leq_P c$ โดยที่ $a, c \in P$ ดังนั้น $a \leq c$

ถ้า $c \in Q$ แล้ว $a \in P$ และ $c \in Q$ ดังนั้น $a \leq c$

กรณี 2 : $a, b \in Q$ แล้ว $a \leq_Q b$ และเพราะ $b \leq c$ ทำได้ว่า $c \in Q$ ดังนั้น $a \leq_Q b$ และ $b \leq_Q c$ ทำให้ได้ว่า $a \leq_Q c$ โดยที่ $a, c \in Q$ ดังนั้น $a \leq c$

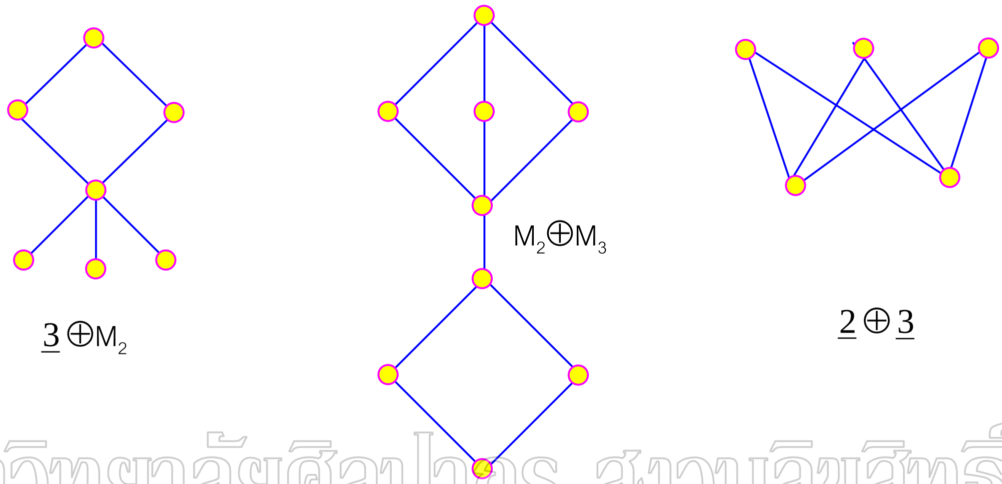
กรณี 3 : $a \in P$ และ $b \in Q$ แล้วเพราะ $b \leq c$ จะได้ว่า $c \in Q$ ดังนั้น $a \in P$ และ $c \in Q$ ทำให้ได้ว่า $a \leq c$

ไม่ว่ากรณีใด เราจะได้ว่า $a \leq c$ ดังนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $\leq$ เป็น เซตอันดับ ■

เราเรียกเซตอันดับ ($P \cup Q; \leq$) ซึ่งนิยาม $\leq$ ดังในทฤษฎีบท 3.3 ว่า *ผลบวกเชิงเส้น(linear sum)* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Pi \oplus \Theta$

แผนภาพของ $\Pi \oplus \Theta$ ทำได้โดยการนำแผนภาพของ Π ไปวางข้างล่างแผนภาพของ Θ และลากเส้นเชื่อมของแต่ละสมาชิกที่เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ Π กับสมาชิกน้อยสุดเฉพาะกลุ่มของ Θ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4

เซตอันดับบนผลคูณคาร์ทีเซียน

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยามอันดับบนผลคูณคาร์ทีเซียน ซึ่งกระทำได้ 2 วิธี ดังจะแสดงการสร้างในทฤษฎีบท 3.4 และทฤษฎีบท 3.5 และขนาดของเซตอันดับที่ได้ จะมีขนาดไม่น้อยกว่าขนาดของเซตอันดับเดิม

3.4 **ทฤษฎีบท : อันดับปทานุกรม**(lexicographic order)

กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ และ $\Theta := (Q; \leq_Q)$ เป็นเซตอันดับ เรานิยาม $\leq$ บนผลคูณคาร์ทีเซียน $P \times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P \times Q$ โดย

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 <_P x_2 \text{ หรือ} \\ x_1 = x_2 \quad \text{และ } y_1 \leq_Q y_2 \end{cases}$$

แล้ว $\leq$ เป็นอันดับบน $P \times Q$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ Π และ Θ เป็นเซตอันดับ และนิยาม $\leq$ บนผลคูณคาร์ทีเซียน $P \times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P \times Q$ โดย

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 <_P x_2 \text{ หรือ} \\ x_1 = x_2 \quad \text{และ } y_1 \leq_Q y_2 \end{cases}$$

1. ให้ $(x_1, y_1) \in P \times Q$ แล้ว $x_1 \in P$ และ $y_1 \in Q$ เพราะว่า $x_1 = x_1$ และ $y_1 \leq_Q y_2$ ทำให้ได้ว่า $(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$ ใน $P \times Q$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \in P \times Q$ ซึ่ง $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$ นั่นคือ [$x_1 <_P x_2$ หรือ ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$)] และ [$x_2 <_P x_1$ หรือ($x_2 = x_1$ และ $y_2 \leq_Q y_1$)] แยกพิจารณาได้ 4 กรณี

กรณี 1 : $x_1 <_P x_2$ และ $x_2 <_P x_1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ กรณีนี้จึงไม่เกิดขึ้น

กรณี 2 : $x_1 <_P x_2$ และ ($x_2 = x_1$ และ $y_2 \leq_Q y_1$) จะเห็นว่าข้อความ $x_1 <_P x_2$ และ $x_2 = x_1$ ขัดแย้งกันเอง กรณีนี้จึงไม่เกิดขึ้นเช่นกัน

กรณี 3 : ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ $x_2 <_P x_1$ จะเห็นว่าข้อความ $x_1 = x_2$ และ $x_2 <_P x_1$ ขัดแย้งกันเอง กรณีนี้จึงไม่เกิดขึ้นอีกเช่นกัน

กรณี 4 : ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ ($x_2 = x_1$ และ $y_2 \leq_Q y_1$) ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2$ และ จาก ($y_1 \leq_Q y_2$ และ $y_2 \leq_Q y_1$) ทำให้ได้ว่า $y_1 = y_2$ ดังนั้น $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

ดังนั้นกรณี 4 เกิดขึ้นได้เพียงกรณีเดียว และแสดงว่า $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P \times Q$ ซึ่ง $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$ นั่นคือ [$x_1 <_P x_2$ หรือ ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$)] และ [$x_2 < x_3$ หรือ ($x_2 = x_3$ และ $y_2 \leq_Q y_3$)] ทำให้แยกพิจารณาได้ 4 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 1 : $x_1 <_P x_2$ และ $x_2 <_P x_3$ ทำให้ได้ $x_1 <_P x_3$ ดังนั้น $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$

กรณี 2 : $x_1 <_P x_2$ และ ($x_2 = x_3$ และ $y_2 \leq_Q y_3$) ทำให้ได้ $x_1 <_P x_3$ ดังนั้น$(x_1 , y_1) \leq (x_3, y_3)$

กรณี 3 : ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ $x_2 <_P x_3$ ทำให้ได้ $x_1 <_P x_3$ ดังนั้น $(x_1 , y_1) \leq (x_3, y_3)$

กรณี 4 : ($x_1 = x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ ($x_2 = x_3$ และ $y_2 \leq_Q y_3$) ทำให้ได้ $x_1 = x_3$ และ $y_1 \leq_Q y_3$ ดังนั้น $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$

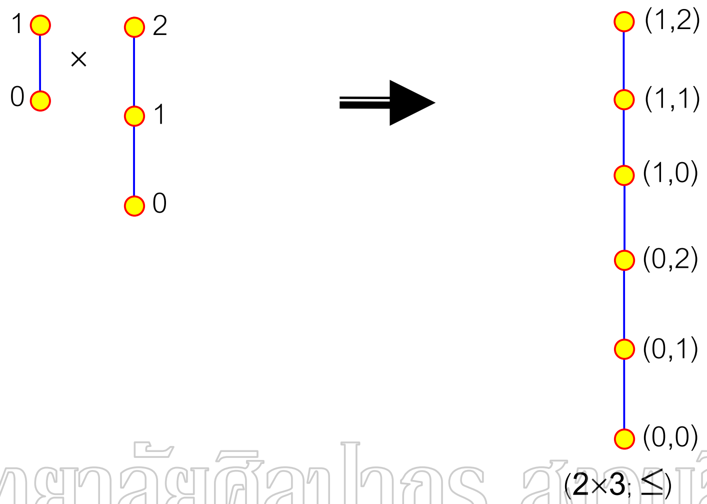
ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $\leq$ เป็นอันดับ ■

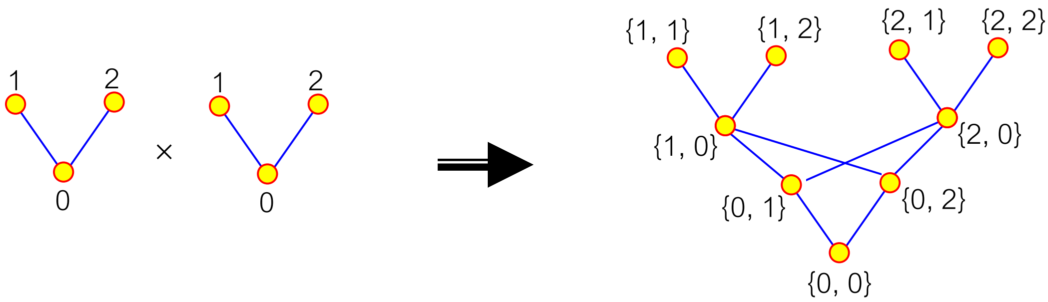
เราเรียกเซตอันดับ (P × Q; ≤) ซึ่งนิยาม ≤ ดังในทฤษฎีบท 3.4 ว่า *อันดับปทานุกรม (lexicographic order)*

3.5 **ตัวอย่างแผนภาพอันดับปทานุกรม** : แสดงแผนภาพดังรูปที่ 3.5 และ 3.6

1. อันดับ ≤ แบบปทานุกรมของ **2×3** แสดงดังแผนภาพในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5



รูปที่ 3.6

การพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะแสดงให้เห็นว่าอันดับปทานุกรมบน P×Q เป็นโซ่ ถ้า Π และ Θ เป็นโซ่

3.6 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Pi := (P ;\leq_P)$ และ $\Theta := (Q ;\leq_Q)$ เป็นโซ่ และให้ ≤ เป็น อันดับปทานุกรมบน P×Q แล้ว (P×Q; ≤) เป็นโซ่

บทพิสูจน์ ให้ Π และ Θ เป็นโซ่ และให้ $\leq$ เป็นอันดับแบบปทานุกรมบน $P\times Q$ และให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P\times Q$ แล้ว $x_1, x_2 \in P$ และ $y_1, y_2 \in Q$ ทำให้ได้ว่า ($x_1 \leq_P x_2$ หรือ $x_2 \leq_P x_1$) และ ($y_1 \leq_Q y_2$ หรือ $y_2 \leq_Q y_1$) เราแยกพิจารณาได้เป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 1 : $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 \leq_Q y_2$ หรือ $y_2 \leq_Q y_1$ จะทำให้ได้ว่า $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ หรือ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$ ตามลำดับ

กรณี 2 : $x_1 <_P x_2$ หรือ $x_2 <_P x_1$ แล้ว $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ หรือ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$ ตามลำดับ และไม่ว่ากรณีใดจะได้ว่า $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ หรือ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$ ดังนั้น $(P\times Q\ ;\leq)$ เป็นโซ่

■

3.7 **ทฤษฎีบท : อันดับตามพิกัด**(coordinatewise order)

กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ และ $\Theta := (Q; \leq_Q)$ เป็นเซตอันดับ และนิยาม $\leq$ บนผลคูณคาร์ทีเซียน $P\times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P\times Q$ โดย

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_P x_2 \text{ และ } y_1 \leq_Q y_2$$

แล้ว $\leq$ เป็นอันดับบน $P\times Q$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ Π และ Θ เป็นเซตอันดับ และนิยาม $\leq$ บนผลคูณคาร์ทีเซียน $P\times Q$ สำหรับทุก ๆ $(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) \in P\times Q$ โดย $(x_1 , y_1) \leq (x_2 , y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_P x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$

1. ให้ $(x_1 , y_1) \in P\times Q$ แล้ว $x_1 \in P$ และ $y_1 \in Q$ แต่เพราะว่า $x_1 = x_1$ และ $y_1 = y_1$ ดังนั้น $x_1 \leq_P x_1$ และ $y_1 \leq_Q y_1$ ทำให้ได้ว่า $(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P\times Q$ ซึ่ง $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$ แล้ว ($x_1 \leq_P x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ ($x_2 \leq_P x_1$ และ $y_2 \leq_Q y_1$) ดังนั้น ($x_1 \leq_P x_2$ และ $x_2 \leq_P x_1$) และ ($y_1 \leq_Q y_2$ และ $y_2 \leq_Q y_1$) แล้วเพราะ $\leq_P$ และ $\leq_Q$ มีสมบัติการปฏิสมมาตรบน P และบน Q ตามลำดับ ทำให้ได้ว่า $x_1 = x_2$ และ $y_1= y_2$ ดังนั้น $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P\times Q$ ซึ่ง $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ และ $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$ แล้ว ($x_1 \leq_P x_2$ และ $y_1 \leq_Q y_2$) และ ($x_2 \leq_P x_3$ และ $y_2 \leq_Q y_3$) ดังนั้น ($x_1 \leq_P x_2$ และ $x_2 \leq_P x_3$) และ ($y_1 \leq_Q y_2$ และ$y_2 \leq_Q y_3$) และเพราะ $\leq_P$ และ $\leq_Q$ มีสมบัติการถ่ายทอดบน P และบน Q ตาม

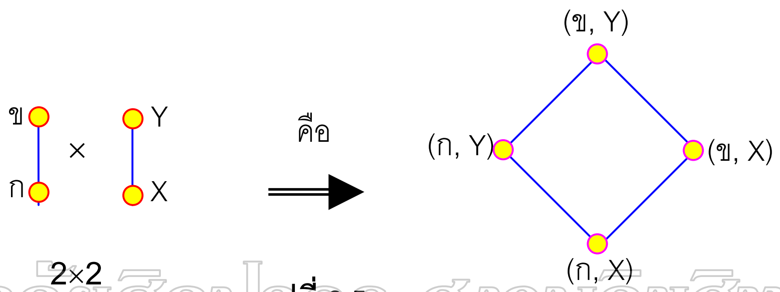
ลำดับ ทำให้ได้ว่า $x_1 \leq_P x_3$ และ $y_1 \leq_Q y_3$ ดังนั้น $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $(P \times Q; \leq)$ เป็น เซตอันดับ

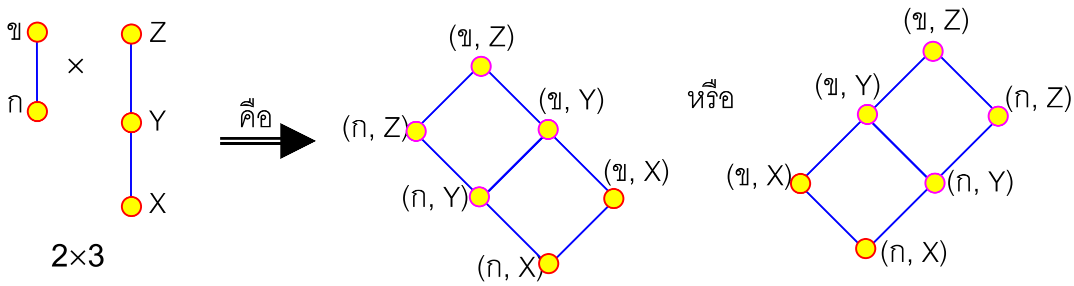
■

เราเรียกเซตอันดับ $(P \times Q; \leq)$ ซึ่งนิยาม $\leq$ ดังในทฤษฎีบท 3.5 ว่า *อันดับตามพิกัด (coordinatewise order)* และเรียก $(P \times Q; \leq)$ ว่า *ผลคูณของ Π และ Θ (product of Π and Θ)* และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Pi \times \Theta$

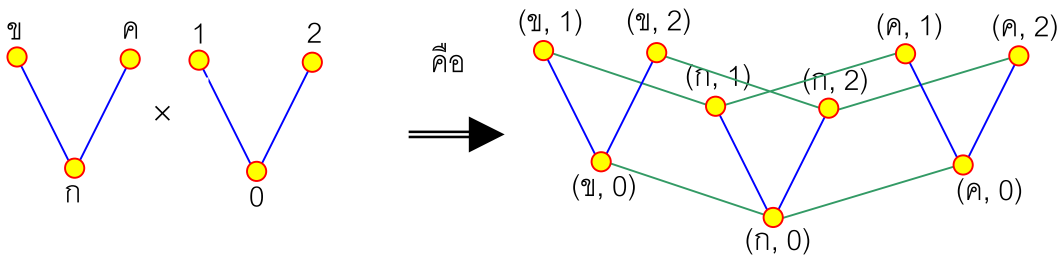
3.8 ตัวอย่างแผนภาพผลคูณ $\Pi \times \Theta$:



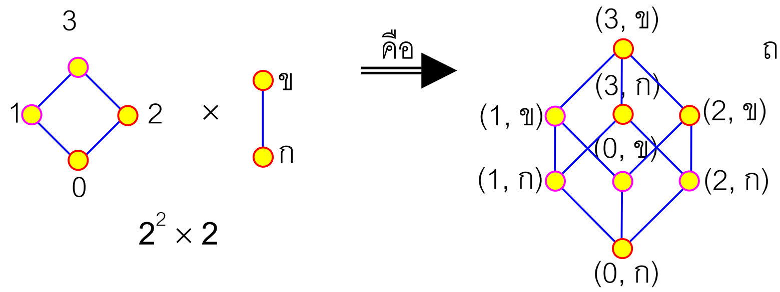
รูปที่ 3.5



รูปที่ 3.6

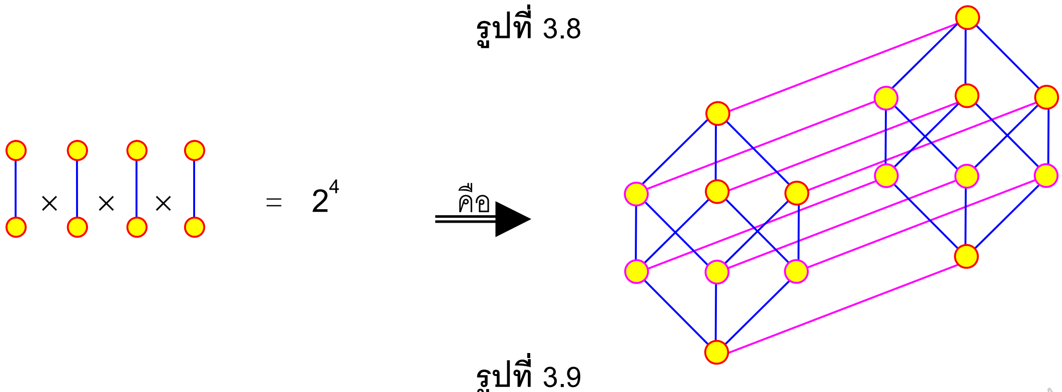


รูปที่ 3.7



ถอดแบบกับ $\cong \wp(\{1, 2, 3\})$

รูปที่ 3.8



รูปที่ 3.9

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงการปกคลุมในเซตอันดับ $\Pi \times \Theta$ ด้วยอันดับตามพิกัด

3.9 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq_P)$ และ $\Theta := (Q; \leq_Q)$ เป็นเซตอันดับ และให้ $\leq$ เป็น อันดับตามพิกัด บน P×Q แล้ว

$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ ใน $\Pi \times \Theta \iff (a_1 = a_2$ และ $b_1 \prec_Q b_2)$ หรือ $(a_1 \prec_P a_2$ และ $b_1 = b_2)$ สำหรับทุก ๆ $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ ใน $\Pi \times \Theta$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ Π และ Θ เป็นเซตอันดับ และให้ $\leq$ เป็นอันดับตามพิกัดบน P×Q

ให้ $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P \times Q$ ซึ่ง $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ แล้ว $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ และ $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ ดังนั้น $(a_1 \neq a_2$ หรือ $b_1 \neq b_2)$ และ $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ ทำให้แยกพิจารณาได้ 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณี 1 : $a_1 \neq a_2$ และ $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ แล้ว $a_1 \leq a_2$ และ $b_1 \leq b_2$ ดังนั้น $(a_1, b_1) \leq (a_1, b_2) \leq (a_2, b_2)$ ทำให้ได้ว่า $(a_1, b_1) = (a_1, b_2)$ หรือ $(a_1, b_2) = (a_2, b_2)$

ถ้า $(a_1, b_2) = (a_2, b_2)$ แล้ว $a_1 = a_2$ ซึ่งขัดแย้งกับที่เรากำหนด $a_1 \neq a_2$ ดังนั้น

$(a_1, b_1) = (a_1, b_2)$ ซึ่งทำให้ได้ $b_1 = b_2$ และจาก $a_1 \le a_2$ และ $a_1 \ne a_2$ จะได้ว่า $a_1 < a_2$ สมมติมี $c \in P$ ซึ่ง $a_1 \le c \le a_2$ แล้ว $(a_1, b_1) \le (c, b_1) \le (a_2, b_1) = (a_2, b_2)$ จะได้ว่า $(a_1, b_1) = (c, b_1)$ หรือ $(c, b_1) = (a_2, b_1)$ ดังนั้น $a_1 = c$ หรือ $c = a_2$ ทำให้ได้ว่า $a_1 \lessdot_P a_2$ และ $b_1 = b_2$

กรณี 2 : $b_1 \ne b_2$ และ $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2)$ เราก็จะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 ว่า $a_1 = a_2$ และ $b_1 \lessdot_Q b_2$

ในการพิสูจน์บทกลับ ให้ $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P{\times}Q$ ซึ่ง ($a_1 = a_2$ และ $b_1 \lessdot_Q b_2$) หรือ ($a_1 \lessdot_P a_2$ และ $b_1 = b_2$)

กรณี 1 : ($a_1 = a_2$ และ $b_1 \lessdot_Q b_2$) แล้ว $(a_1, b_1) \le (a_2, b_2)$ โดยที่ $b_1 \ne b_2$ และให้ $(c, d) \in P{\times}Q$ ซึ่ง $(a_1, b_1) < (c, d) \le (a_2, b_2)$ ทำให้ได้ว่า ($a_1 \ne c$ หรือ $b_1 \ne d$) และ $a_1 \le c \le a_2$ และ $d \le a_2$ แต่ $a_1 = a_2$ ดังนั้น $a_1 = c = a_2$ และ $b_1 < d \le b_2$ ทำให้ได้ $d = b_2$ ซึ่งแสดงว่า $(c, d) = (a_2, b_2)$ เพราะฉะนั้น $(a_1, b_1) \lessdot (a_2, b_2)$

กรณี 2 : ($a_1 \lessdot a_2$ และ $b_1 = b_2$) เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 ว่าถ้า $(a_1, b_1) < (c, d) \le (a_2, b_2)$ แล้ว $(c, d) = (a_2, b_2)$ ซึ่งทำให้ได้ $(a_1, b_1) \lessdot (a_2, b_2)$ ■

สังเกตว่า เซตของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งคือเซต R×R ที่เรารู้จักกันโดยทั่วไป เป็นผลคูณของโซ่ P นั่นคือเป็นเซตอันดับภายใต้อันดับแบบตามพิกัด และเราพบว่าเซตอันดับ P×P นี้ไม่เป็นโซ่ ดังนั้นกฎไตรวิภาคจึงไม่เป็นจริงบนเซตของจำนวนเชิงซ้อน แต่ถ้าเราพิจารณาอันดับแบบปทานุกรมบนเซต P×P ของจำนวนเชิงซ้อน เซตอันดับแบบนี้ของจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นโซ่

บทที่ 4
ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัด

ในบทนี้ เราจะแสดงทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัด ในเทอมของเซตด้านลง เราจึงจะเริ่มในหัวข้อแรกด้วยการให้บทนิยาม เซตด้านลง $\downarrow Q$ และเซตด้านขึ้น $\uparrow Q$ สำหรับสับเซต Q ของ P และต่อไปจะศึกษา ไอดีลอันดับ $(O(P); \subseteq)$ ซึ่งเป็นเซตอันดับของเซตด้านลงทั้งหมด เพื่อพิสูจน์ ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับ

เซตด้านลงและเซตด้านขึ้น

ในหัวข้อนี้เราจะนิยามเซตด้านลง $\downarrow Q$ และเซตด้านขึ้น $\uparrow Q$ สำหรับ $Q \subseteq P$ เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาไอดีลอันดับ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป ในหัวข้อต่อไป

4.1 **บทนิยาม** : กำหนดให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $Q \subseteq P$

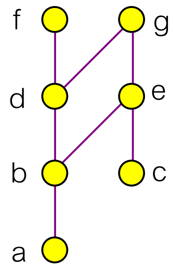
1. เราเรียก Q ว่า *เซตด้านลง (down – set)* ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $x \in Q$ และ $y \in P$ โดยที่ $y \leq x$ แล้ว $y \in Q$

2. เราเรียก Q ว่า *เซตด้านขึ้น (up – set)* ถ้าเมื่อใดก็ตามที่ $x \in Q$ และ $y \in P$ และ $y \leq^{\partial} x$ แล้ว $y \in Q$

สังเกตว่า ในเซตว่าง ไม่มีสมาชิกซึ่งจะไม่สอดคล้องกับบทนิยาม 4.1 ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ดังนั้นเซตว่าง จึงเป็นทั้งเซตด้านลงและเซตด้านขึ้น

4.2 **ตัวอย่างเซตด้านลงและเซตด้านขึ้น** :

ให้ $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ เป็นเซตอันดับ ซึ่งอันดับ $\leq$ นิยามดังแผนภาพรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1

เราจะได้ว่า {a}, {c}, {a, b}, {a, b, d}, {a, b, c}, {a, b, c, e}, {a, b, d, f}, {a, b, c, d, e}, {a, b, c, d, e, g}, {a, b, c, d, e, f, g} เป็นเซตด้านลง แต่ {b, d, e} ไม่เป็นเซตด้านลง

ส่วน {f}, {g}, {e, g}, {f, g}, {d, f, g}, {c, e, g}, {d, e, f, g}, {b, d, e, f, g}, {a, b, d, e, f, g}, {b, c, d, e, f, g}, {a, b, c, d, e, f, g} เป็นเซตด้านขึ้น แต่ {a, b, d, f} ไม่เป็นเซตด้านขึ้น

สังเกตว่า จะมีเซต {a, b, c, d, e, f, g} ซึ่งเป็นทั้งเซตด้านลงและเซตด้านขึ้น

●

4.3 **ทฤษฎีบท** : ให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $Q \subseteq P$ กำหนดให้ $\downarrow Q := \{y \in P \mid (\exists x \in Q)\ (y \leq x)\}$ และ $\uparrow Q := \{y \in P \mid \exists x \in Q, x \leq y\}$ แล้ว $\downarrow Q$ เป็น*เซตด้านลง* และ $\uparrow Q$ เป็น*เซตด้านขึ้น*

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $Q \subseteq P$

ให้ $x \in \downarrow Q$ และ $y \in P$ ซึ่ง $y \leq x$ แล้วเราต้องการแสดงว่า $y \in \downarrow Q$ [นั่นคือต้องหา $t \in Q$ ซึ่ง $y \leq t$] เนื่องจาก $x \in \downarrow Q$ ฉะนั้นจะมี $s \in Q$ ซึ่ง $x \leq s$ แต่เพราะว่า $y \leq x$ และ $x \leq s$ ดังนั้นโดยสมบัติการถ่ายทอดของ $\leq$ จะได้ว่า $y \leq s$ เราจึงเลือก $t = s \in Q$ ซึ่ง $y \leq t$ ดังนั้น $y \in \downarrow Q$ เพราะฉะนั้น $\downarrow Q$ เซตด้านลงของ Q

ในทำนองเดียวกันให้ $x \in \uparrow Q$ และ $y \in P$ ซึ่ง $x \leq y$ แล้วเราต้องการแสดงว่า $y \in \uparrow Q$ [หา $t \in Q$ ซึ่ง $t \leq y$] เนื่องจาก $x \in \uparrow Q$ ฉะนั้นจะมี $s \in Q$ ซึ่ง $s \leq x$ แต่เพราะว่า $x \leq y$ และ $s \leq x$ ดังนั้นโดยสมบัติการถ่ายทอดของ $\leq$ จะได้ว่า $s \leq y$ เราจึงเลือก $t = s \in Q$ ซึ่ง $t \leq y$ ดังนั้น $y \in \uparrow Q$ เพราะฉะนั้น $\uparrow Q$ เซตด้านขึ้นของ Q

■

4.4 **หมายเหตุ** : ในกรณีที่ Q = {x} เป็นเซตโทน (singleton set) เราจะเขียนสัญลักษณ์แทน $\downarrow$ {x} และ $\uparrow$ {x} ด้วย $\downarrow$ x และ $\uparrow$ x ตามลำดับ แล้วโดยทฤษฎีบท 4.3 จะได้ว่า $\downarrow$ x และ $\uparrow$ x เป็นเซตด้านลงและเซตด้านขึ้น ซึ่งเราเรียกว่า เซตด้านลงก่อกำเนิดโดย x และเซตด้านขึ้นก่อกำเนิดโดย x ตามลำดับ

4.5 **ตัวอย่าง $\uparrow$ Q และ $\downarrow$ Q** :

พิจารณาเซตอันดับใน ตัวอย่าง 4.2 เราจะได้ว่า $\downarrow a = \{a\}$, $\downarrow c = \{c\}$, $\downarrow b = \{a, b\}$, $\downarrow d = \{a, b, d\}$, $\downarrow \{b, c\} = \{a, b, c\}$, $\downarrow e = \{a, b, c, e\}$, $\downarrow f = \{a, b, d, f\}$, $\downarrow \{d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$, $\downarrow g = \{a, b, c, d, e, g\}$, $\downarrow \{f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ เป็นเซตด้านลง

ส่วน $\uparrow f = \{f\}$, $\uparrow g = \{g\}$, $\uparrow e = \{e, g\}$, $\uparrow \{f, g\} = \{f, g\}$, $\uparrow d = \{d, f, g\}$, $\uparrow c = \{c, e, g\}$, $\uparrow \{d, e\} = \{d, e, f, g\}$, $\uparrow b = \{b, d, e, f, g\}$, $\uparrow a = \{a, b, d, e, f, g\}$, $\uparrow \{b, c\} = \{b, c, d, e, f, g\}$, $\uparrow \{a, c\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ เป็นเซตด้านขึ้น

สังเกตว่า จะมีเซต $\uparrow \{a, c\} = \{a, b, c, d, e, f, g\} = \downarrow \{f, g\}$ ซึ่งเป็นทั้งเซตด้านลงและเซตด้านขึ้น เป็นต้น

นอกจากนี้ $\uparrow \{d, e\} = \{d, e, f, g\} = \{e, g\} \cup \{d, f, g\} = \uparrow e \cup \uparrow d$ ดังนั้นเราเขียน $\uparrow \{d, e\}$ ในรูปของ $\uparrow e \cup \uparrow d$ ได้เช่นเดียวกัน

●

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะแสดงว่า เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างของเซตอันดับจำกัด เขียนได้ในรูปยูเนียนของเซตด้านลง ที่ก่อกำเนิดโดยสมาชิกที่เป็นปฏิโซ่ ในเซตด้านลงนั้น

4.6 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับจำกัดและ $Q \subseteq P$ ซึ่ง $Q \neq \varnothing$ แล้ว Q เป็นเซตด้านลง ก็ต่อเมื่อ มีปฏิโซ่ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq Q$ ซึ่ง $Q = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$

บทพิสูจน์ ให้ $Q \subseteq P$ ซึ่ง $Q \neq \varnothing$

ให้ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นปฏิโซ่ใน Q ซึ่ง $Q = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ และ ให้ $x \in Q$ และ $y \in P$ ซึ่ง $y \leq x$ แล้วจะมี $1 \leq i \leq n$ ซึ่ง $x \in \downarrow x_i$ ดังนั้น $x \leq x_i$ เพราะฉะนั้น $y \leq x_i$ ทำให้ได้ว่า $y \in \downarrow x_i$ แต่ $\downarrow x_i \subseteq Q$ ดังนั้น $y \subseteq Q$ เพราะฉะนั้น Q เป็นเซตด้านลง

ในการพิสูจน์บทกลับ ให้ Q เป็นเซตด้านลงและให้ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq Q$ เป็นเซตของสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดใน Q แล้ว $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นปฏิโซ่ (เพราะว่าถ้ามี $1 \leq i \neq j \leq n$ ซึ่ง $x_j \leq x_i$ หรือ $x_i \leq x_j$ แล้วเพราะว่า x_i และ x_j ต่างเป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ใน Θ ดังนั้น $x_i = x_j$) เพราะว่า $x_i \in Q$ ทุก ๆ $1 \leq i \leq n$ และ Q เป็นเซตด้านลง ดังนั้น $\downarrow x_i \subseteq Q$ สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq k$ ทำให้ได้ว่า $\bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \subseteq Q$ จึงเหลือที่จะแสดงว่า $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ ให้ $t \in Q$ แล้วจะมีสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม $s \in Q$ ซึ่ง $t \leq s$ ทำให้ได้ว่า $s \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ และ $t \in \downarrow s$ แสดงว่ามี $x_j = s \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ซึ่ง $t \in \downarrow x_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$ เพราะฉะนั้น $Q = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i$

■

ไอดีลอันดับ

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการรวมกันอยู่ของเซตด้านลงทั้งหมดของเซตอันดับ Π ที่เราจะเรียกชื่อว่า ไอดีลอันดับ ของ Π เพื่อใช้ในการพิสูจน์ในทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัดในหัวข้อต่อไปนี้

4.7 **บทนิยาม** : ให้ $(P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรานิยาม $O(P) := \{ Q \mid Q \subseteq P$ และ Q เป็นเซตด้านลง $\}$ เป็นเซตของเซตด้านลงทั้งหมดของเซตอันดับ Π และเรียกเซตอันดับ $(O(P); \subseteq)$ ว่า *ไอดีลอันดับ(order ideal)* ของ Π

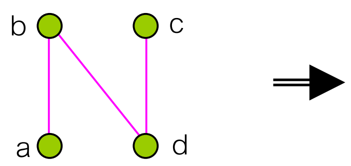
ตัวอย่างต่อไปเราประยุกต์ทฤษฎีบท 4.6 แสดงแผนภาพของไอดีลอันดับของเซตอันดับจำกัด

4.8 **ตัวอย่างการสร้างไอดีลอันดับ**

ในแผนภาพรูปที่ 4.2 ถึงรูปที่ 4.7 แสดงการสร้างไอดีลอันดับ โดยอาศัยทฤษฎีบท 4.6 สำหรับแต่ละเซตอันดับจำกัด $\Pi := (P; \leq)$ ตามกำหนด

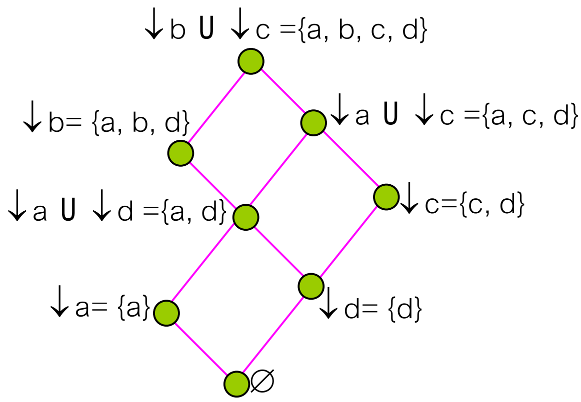
1. ให้ $P := \{a, b, c, d\}$ และ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.2 (ก)

แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {d}, {a, d}, {a, c}, {b, c} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow$a = {a}, $\downarrow$b = {a, b, d}, $\downarrow$c = {d, c}, $\downarrow$d = {d}, $\downarrow$a $\cup$ $\downarrow$d = {a, d}, $\downarrow$a $\cup$ $\downarrow$c = {a, c, d} และ $\downarrow$b $\cup$ $\downarrow$c = {a, b, c, d} แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ (O(P); $\subseteq$)แสดงดังรูป 4.2 (ข)



Π := (P; $\leq$)

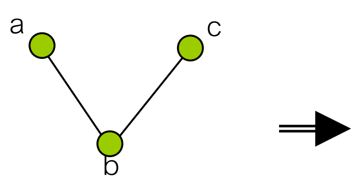
รูปที่ 4.2 (ก)

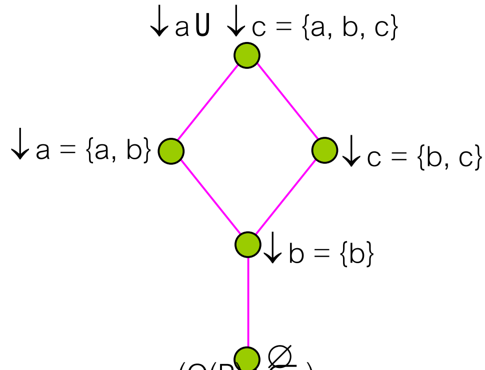


(O(P); $\subseteq$)

รูปที่ 4.2 (ข)

2. ให้ P:= {a, b, c} และ Π := (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.3 (ก) แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {a, c} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow$a = {a, b}, $\downarrow$b = {b}, $\downarrow$c = {b, c} ละ$\downarrow$a $\cup$ $\downarrow$c = {a, b, c} แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ (O(P); $\subseteq$) แสดงดังรูป 4.3 (ข)





Π := (P ; $\leq$)

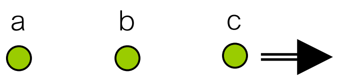
รูปที่ 4.3 (ก)

(O(P) ; $\subseteq$)

รูปที่ 4.3 (ข)

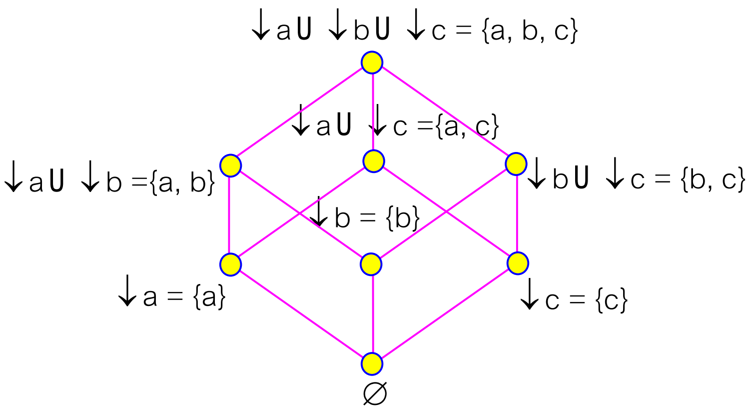
3. ให้ P:= {a, b, c} และ Π := (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.4 (ก)

แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow a = \{a\}$, $\downarrow b = \{b\}$, $\downarrow c = \{c\}$, $\downarrow a \cup \downarrow b = \{a, b\}$, $\downarrow a \cup \downarrow c = \{a, b, c\}$, $\downarrow b \cup \downarrow c = \{b, c\}$ และ $\downarrow a \cup \downarrow b \cup \downarrow c = \{a, b, c\}$ แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ $(O(P); \subseteq)$ แสดงดังรูป 4.4 (ข)



$\Pi := (P ; \leq)$

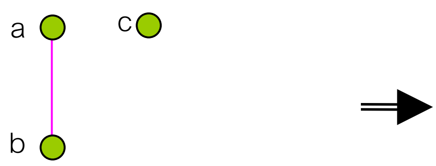
รูปที่ 4.4 (ก)



$(O(P) ; \subseteq)$

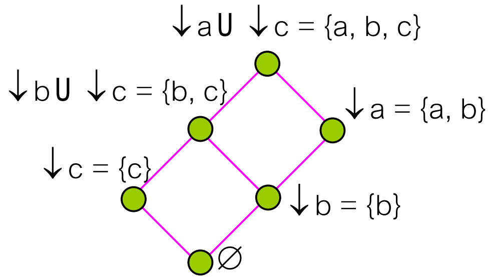
รูปที่ 4.4 (ข)

4. ให้ P:= {a, b, c} และ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.5 (ก) แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {b, c}, {a, c} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow a = \{a, b\}$, $\downarrow b = \{b\}$, $\downarrow c = \{c\}$, $\downarrow b \cup \downarrow c = \{b, c\}$ และ $\downarrow a \cup \downarrow c = \{a, b, c\}$ แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ $(O(P); \subseteq)$ แสดงดังรูป 4.5 (ข)



$\Pi := (P; \leq)$

รูปที่ 4.5 (ก)

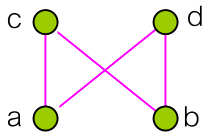


$(O(P); \subseteq)$

รูปที่ 4.5 (ข)

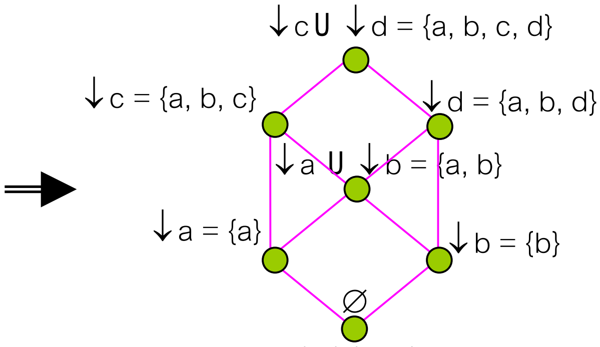
5. ให้ P:= {a, b, c, d} และ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.6 (ก)

แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {c, d} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow a$ = {a}, $\downarrow b$ = {a}, $\downarrow c$ = {a, b, c}, $\downarrow d$ = {a, b, d}, $\downarrow a \cup \downarrow b$ = {a, b} และ $\downarrow c \cup \downarrow d$ = {a, b, c, d} แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ (O(P); $\subseteq$) แสดงดังรูป 4.6 (ข)



Π := (P ; $\leq$)

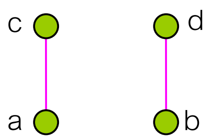
รูปที่ 4.6 (ก)



(O(P); $\subseteq$)

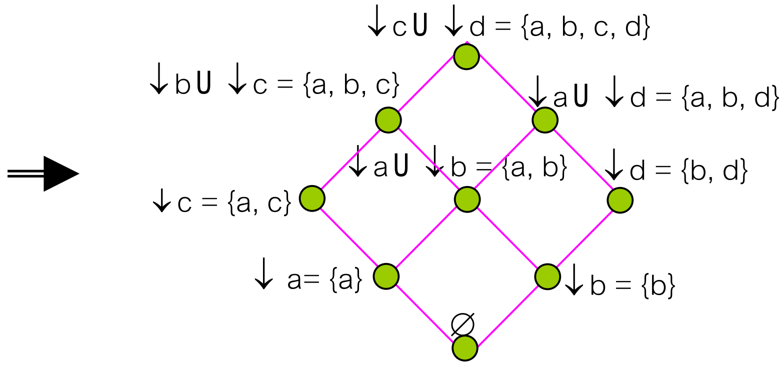
รูปที่ 4.6 (ข)

6. ให้ P:= {a, b, c, d} และ Π := (P; $\leq$) เป็นเซตอันดับที่มีแผนภาพแสดงดังรูป 4.7 (ก) แล้วสับเซตที่เป็นปฏิโซ่ทั้งหมดของ Π ได้แก่ {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, c}, {c, d} ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.6 เซตด้านลงที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ Π ได้แก่ $\downarrow a$ = {a}, $\downarrow b$ = {b}, $\downarrow c$ = {a, c}, $\downarrow d$ = {b, d}, $\downarrow a \cup \downarrow b$ = {a, b}, $\downarrow a \cup \downarrow d$ = {a, b, d}, $\downarrow b \cup \downarrow c$ = {a, b, c}, $\downarrow c \cup \downarrow d$ ={a, b, c, d} แล้วเพราะว่า $\varnothing$ ก็เป็นเซตด้านลง เราจึงได้แผนภาพของเซตอันดับ (O(P); $\subseteq$) แสดงดังรูป 4.7 (ข)



Π := (P ; $\leq$)

รูปที่ 4.7 (ก)



(O (P) ; $\subseteq$)

รูปที่ 4.7 (ข)

●

เราจะแสดงในทฤษฎีบทต่อไปว่า ถ้า Π เป็นปฏิโซ่จำกัดแล้ว O(P) = $\wp$(P)

4.9 **ทฤษฎีบท** : ถ้า Π เป็นปฏิโซ่ขนาดจำกัดแล้ว $O(P) = \wp(P)$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ Π เป็นปฏิโซ่ โดยที่ $|P| = n$ แล้วเพราะว่าไอดีลอันดับของ Π เป็นเซตของสับเซตของ P ดังนั้น $O(P) \subseteq \wp(P)$ เราจึงจะแสดงว่า $\wp(P) \subseteq O(P)$

ให้ $A \subseteq P$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด ให้ $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ โดยที่ $k \leq n$ แล้วเพราะ Π เป็นปฏิโซ่ ดังนั้น $\downarrow x_i = \{ x_i \}$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,..,k$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.5 จะได้ว่า $A = \bigcup_{i=1}^{n} \downarrow x_i \in O(P)$ เพราะฉะนั้น $\wp(P) \subseteq O(P)$

■

ทฤษฎีบท 4.9 ทำให้เราทราบว่า $O(P) = \wp(P)$ เมื่อ Π เป็นปฏิโซ่ที่มีขนาดจำกัด n และนั่นก็หมายความว่า $|O(P)| = |\wp(P)|$ ซึ่งแสดงว่า $O(P)$ มีสมาชิก 2^n ตัว

ทฤษฎีบทต่อไป เราจะกล่าวถึงไอดีลอันดับของโซ่บ้าง

4.10 **ทฤษฎีบท** : ถ้า Π เป็นโซ่ขนาด n แล้ว $O(P) = \{\downarrow x \mid x \in P\} \cup \{\varnothing\}$ ยิ่งไปกว่านั้น $O(P)$ เป็นโซ่ที่มีสมาชิก n+1 ตัว

บทพิสูจน์ ให้ Π เป็นโซ่ขนาด n สมมติ $P = \{x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}$ แล้วเห็นได้ชัดว่า สับเซต A ของ P ที่ไม่ใช่เซตว่างเป็นปฏิโซ่ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตโทน $\{x_i\}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.5 เราจะได้ว่า $\{\downarrow x \mid x \in P\}$ เป็นเซตด้านลงทั้งหมดของ Π ที่ไม่ใช่เซตว่าง ทำให้ได้ว่า $O(P) = \{\downarrow x \mid x \in P\} \cup \{\varnothing\}$ เพราะฉะนั้น $|O(P)| = n + 1$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $O(P)$ เป็นโซ่ ให้ $A, B \in O(P)$ ถ้า $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$ แล้วเห็นได้ชัดว่า $A \subseteq B$หรือ $B \subseteq A$ เราจึงพิจารณากรณี $A \neq \varnothing$ และ $B \neq \varnothing$ แล้วจะมี $x, y \in P$ ซึ่ง $A = \downarrow x$ และ $B = \downarrow y$ แต่ Π เป็นโซ่ ดังนั้น $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ ทำให้ได้ว่า $A = \downarrow x \subseteq \downarrow y = B$ หรือ $B = \downarrow y \subseteq \downarrow x = A$

■

ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัด

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัด ซึ่งต้องอาศัยสมบัติในทฤษฎีบท 4.11 ต่อไปนี้

4.11 **ทฤษฎีบท** : ให้ $\Pi := (P;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ $x, y \in P$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $x \leq y$
2. $\downarrow x \subseteq \downarrow y$
3. $(\forall Q \in O(P))(y \in Q \rightarrow x \in Q)$

บทพิสูจน์ ให้ Π เป็นเซตอันดับ และ $x, y \in P$

(1) $\rightarrow$ (2) ให้ $x \leq y$ และให้ $z \in \downarrow x$ แล้วจะได้ว่า $z \leq x$ ซึ่งทำให้ได้ $z \leq x$ และ $x \leq y$ ดังนั้นโดยสมบัติการถ่ายทอดของ $\leq$ จะได้ว่า $z \leq y$ ฉะนั้น $z \in \downarrow y$ ดังนั้น $\downarrow x \subseteq \downarrow y$

(2) $\rightarrow$ (3) ให้ $\downarrow x \subseteq \downarrow y$ แล้วเพราะ $x \in \downarrow x \subseteq \downarrow y$ ทำให้ได้ $x \leq y$ ต่อไปให้ $Q \in O(P)$ ซึ่ง $y \in Q$ และ $x \leq y$ เนื่องจากนิยามของเซตด้านลงของ Q จะได้ว่า $x \in Q$

(3) $\rightarrow$ (1) ให้ข้อความ (3) เป็นจริง แล้วเพราะว่า $y \in \downarrow y$ และ $\downarrow y \in O(P)$ จะได้ $x \in \downarrow y$ ดังนั้น $x \leq y$

■

4.12 **ทฤษฎีบท** : ให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับจำกัดและ $A = \{\downarrow a \mid a \in P\} \subseteq O(P)$ แล้วฟังก์ชัน $\varphi : P \rightarrow A$ ซึ่งนิยามโดย $\varphi(a) = \downarrow a$ สำหรับทุก ๆ $a \in P$ เป็นฟังก์ชันถอดแบบอันดับจาก Π ไปบนเซตอันดับ $(A; \subseteq)$

บทพิสูจน์ ให้ $A = \{\downarrow a \mid a \in P\}$ โดยที่ $\downarrow a = \{x \in P \mid x \leq a\}$ และให้ $\varphi : P \rightarrow A$ นิยามสำหรับแต่ละ $a \in P$ โดย $\varphi(a) = \downarrow a$ แล้วโดยข้อความสมมูลของข้อ (1) และ (2) ของทฤษฎีบท 4.11 จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันฝังอันดับ และโดยนิยามของเซต A จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันถอดแบบอันดับ

■

4.13 **ทฤษฎีบทการแทนสำหรับเซตอันดับจำกัด** : ให้ $\Pi := (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับจำกัด แล้วจะมีเซต A ซึ่ง Π ฝังในเซตอันดับ $(\wp(A); \subseteq)$ ■

บทที่ 5
อันดับบนปริภูมิทอพอลอยี

ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงบทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของปริภูมิทอพอลอยี แล้วแสดงเงื่อนไขบนปริภูมิทอพอลอยี ที่ทำให้เราสามารถนิยามอันดับบนปริภูมิทอพอลอยีได้

ปริภูมิทอพอลอยี

ในหัวข้อนี้ เราจะให้นิยามทอพอลอยี และศึกษาสมบัติเบื้องต้นบางประการของปริภูมิทอพอลอยี

5.1 **บทนิยาม** : ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และให้ τ เป็นเซตของสับเซตของ X (นั่นคือ $\tau \subseteq \wp(X)$) เรากล่าวว่า τ เป็น *ทอพอลอยี(topology)* บน X ถ้า τ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\phi \in \tau$ และ $X \in \tau$
2. ยูเนียนของเซตใน τ จำนวนเท่าใดก็ได้ยังเป็นสมาชิกใน τ

นั่นคือ ถ้า $A \subseteq \tau$ แล้ว $\cup A \in \tau$

3. ถ้า A, B $\in \tau$ แล้ว $A \cap B \in \tau$

เราเรียกสมาชิกของ τ ว่า *เซตเปิด* τ *(*τ *- open sets)* หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *เซตเปิด (open set)* และเราเรียกคู่อันดับ (X; τ) ว่า*ปริภูมิทอพอลอยี (topological space)*

ตัวอย่างที่เห็นชัดเจนที่สุด คือเมื่อ $\tau = \wp(X)$ เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ X เราเรียก τ ใหญ่สุดนี้ว่า *ทอพอลอยีหน่วย (discrete topology)* และเรียกคู่อันดับ (X; τ) ว่า *ปริภูมิทอพอลอยีหน่วย (discrete topological space)* หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *ปริภูมิหน่วย (discrete space)*

ถ้า X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $\tau = \{\varnothing, X\}$ แล้ว (X; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยีเล็กสุดบน X ที่เราเรียกว่า *ทอพอลอยีไม่หน่วย (indiscrete topology)*

5.2 **ตัวอย่างทอพอลอยี** :

1. พิจารณาเซตของสับเซตของ X = {a, b, c, d, e} ต่อไปนี้

$\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

$\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

τ_3 = {X, ∅, {a}, {c, d}, {a, c, d}, {a, b, d, e }}

แล้ว τ_1 เป็น ทอพอลอยีบน X แต่ τ_2 และ τ_3 ไม่เป็นทอพอลอยีบน X เพราะว่า {a, c, d} $\cup$ {b, c, d} = {a, b, c, d} $\notin \tau_2$ และ {a, c, d} $\cap$ {a, b, d, e} = {a, d} $\notin \tau_3$ เป็นต้น

2. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและให้ τ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตที่เป็นยูเนียนไม่จำกัดจำนวนหรือส่วนร่วมจำนวนจำกัดของช่วงเปิดในรูป (a, ∞), (–∞, b) หรือ (a, b) แล้ว τ เป็นทอพอลอยีบน R ซึ่งเรียก τ นี้ว่า *ทอพอลอยีปกติ(usual topology)*

●

5.3 บทนิยาม : กำหนดให้ (X; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยีและ A ⊆ X เราเรียก A ว่า*เซตปิด(closed set)* ถ้าส่วนเติมเต็มของ A (complement of A) เป็น *เซตเปิด(open set)*

นั่นคือ A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $A' = X - A \in \tau$

5.4 ตัวอย่างเซตเปิดและเซตปิดของทอพอลอยี :

1. พิจารณาปริภูมิทอพอลอยีของตัวอย่าง 5.2 ข้อ (1) แล้วเซตปิดของ X คือ ∅, X, {b, c, d, e}, {a, b, e}, {b, e}, {a}

ขอให้สังเกตว่า มีสับเซตของ X ซึ่งเป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด ได้แก่ ∅, {a} , {b, c, d, e} และ X นอกจากนี้ยังมีสับเซตของ X ซึ่งไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด ได้แก่ {b}, {c}, {d}, {e}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {c, e}, {d, e}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {c, d, e}, {a, b, c, d}, {a, b, c ,e}, {a, c, d, e}, {a, b, d, e} และ X เป็นต้น

2. ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ τ เป็นทอพอลอยีหน่วยบน X แล้วทุก ๆ สับเซตของ X เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

3. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดและ τ เป็นทอพอลอยีปกติบน R ที่กำหนดดังในตัวอย่าง 5.2 ข้อ (2) แล้วเซตปิดของ R ได้แก่ ∅, R, [a,∞), (–∞, a], [a, b], {a} หรือยูเนียนจำกัดหรืออินเตอร์เซกชันจำนวนเท่าใดก็ได้ ของเซตปิดเหล่านี้

ขอให้สังเกตว่า สับเซตของ R ซึ่งเป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด มีเพียง ∅ และ R เท่านั้น

●

5.5 บทนิยาม : กำหนดให้ (X ; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยีและ A $\subseteq$ X ให้ $\mathcal{A} = \{ F \in \wp(X) \mid F$ เป็นเซตปิด และ $A \subseteq F \}$ เราเรียก $\bigcap \mathcal{A}$ ว่า *เซตปิดคลุม (closure)* ของ A ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bigcap \mathcal{A} = \overline{A}$

5.6 ตัวอย่างเซตปิดคลุม :

1. ให้ X = {a, b, c, d, e} และ τ = {X, $\varnothing$, {a}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d, e}} แล้ว ตัวอย่างเซตปิดของปริภูมิทอพอลอยี (X; τ) ได้แก่ $\varnothing$, X, {b, c, d, e}, {a, b, e}, {b, e}, {a} ซึ่งจะเห็นตัวอย่างเซตปิดคลุม เช่น

$\overline{\{b\}} = X \cap \{b, c, d, e\} \cap \{a, b, e\} \cap \{b, e\} = \{b, e\}$,

$\overline{\{a,c\}} = X \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d, e\}$

และ $\overline{\{b,d\}} = X$ เป็นต้น

2. ให้ X = {a, b, c} และ τ = {X, $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}} แล้วเซตปิดทั้งหมดของปริภูมิทอพอลอยีหน่วย (X; τ) ได้แก่ $\varnothing$, X, {b, c}, {a, c}, {a, b}, {c}, {b}, {a} และตัวอย่างเซตปิดคลุม เช่น

$\overline{\{a\}} = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$,

$\overline{\{a,c\}} = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$

และ $\overline{\{a, b, c\}} = X$ เป็นต้น

หรือในกรณีทั่วไปเราอาจกล่าวว่าทุก ๆ สับเซตของปริภูมิหน่วยเป็นเซตปิดคลุมของตัวเอง

3. พิจารณาทอพอลอยีปกติบน R แล้วตัวอย่างเซตปิดคลุม เช่น ทุก ๆ เซตโทน {a} หรือช่วงปิดในรูปแบบ [a, b], [a,∞), ($-\infty$, a] ของแต่ละ a, b $\in$ R เป็นต้น

●

สังเกตว่า ถ้า (X; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยีและ A $\subseteq$ X เราจะหาเซตปิดคลุมของเซต A โดยการหาเซตปิด F ซึ่ง F $\in \wp(X)$ และ A $\subseteq$ F แล้วนำทุก ๆ เซตปิด F ดังกล่าวทั้งหมดมาหาส่วนร่วม ก็จะได้เซตปิดคลุมของ A

5.7 ข้อสังเกต : ให้ (X ; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยีและ $A \subseteq X$ และให้ $\mathcal{A} = \{F \in \wp(X) \mid F$ เป็นเซตปิด และ $A \subseteq F\}$ แล้วจากบทนิยาม 5.5 จะได้ว่า $\overline{A} = \bigcap \mathcal{A}$ แต่เนื่องจาก $A \subseteq F$ สำหรับทุก ๆ $F \subseteq \mathcal{A}$ ดังนั้น $A \subseteq \bigcap \mathcal{A} = \overline{A}$ เพราะฉะนั้น $A \subseteq \overline{A}$

นอกจากนี้ $\overline{A}$ เป็นเซตปิด เพราะว่าส่วนร่วมไม่จำกัดจำนวนของเซตปิดเป็นเซตปิด ดังนั้น $\overline{A}$ เป็นเซตปิดเล็กสุดที่มี A เป็นสับเซต

ชนิดของปริภูมิทอพอลอยี

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาชนิดของปริภูมิทอพอลอยี ที่เป็นเงื่อนไขสำหรับการสร้างอันดับบนปริภูมิทอพอลอยี อันได้แก่ ปริภูมิ T_0 ปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิ T_2

5.8 บทนิยาม : กำหนดให้ (X; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยี เราเรียก (X ; τ) ว่า *ปริภูมิ T_0 (T_0 – space)* ถ้าสำหรับแต่ละคู่สมาชิก a, b $\in$ X ซึ่ง $a \neq b$ จะมีเซตเปิด G ซึ่ง $a \in G$ แต่ $b \notin G$ หรือมีเซตเปิด H ซึ่ง $b \in H$ แต่ $a \notin H$

5.9 ตัวอย่างปริภูมิ T_0 และไม่ใช่ปริภูมิ T_0 :

ให้ X = {0, 1, 2} และ $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$ แล้ว (X; τ_1) เป็นปริภูมิ T_0 แต่ถ้า $\tau_2 = \{X, \varnothing\}$ เป็นทอพอลอยีไม่หน่วย แล้ว (X; τ_2) ไม่ใช่ปริภูมิ T_0

●

5.10 บทนิยาม : กำหนดให้ (X; τ) เป็นปริภูมิทอพอลอยี เราเรียก (X ; τ) ว่า *ปริภูมิ T_1 (T_1 – space)* ถ้าสำหรับแต่ละ a, b $\in$ X ซึ่ง $a \neq b$ จะมีเซตเปิด G และ H ซึ่ง $a \in G$ แต่ $b \notin G$ และ $b \in H$ แต่ $a \notin H$

5.11 ตัวอย่างปริภูมิ T_1 และไม่ใช่ปริภูมิ T_1 :

ให้ X = {0, 1, 2} และ τ_1 เป็นทอพอลอยีหน่วยบน X แล้ว (X; τ_1) เป็นปริภูมิ T_1 แต่ถ้า $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$ แล้ว (X; τ_2) เป็นปริภูมิทอพอลอยีที่ไม่ใช่ปริภูมิ T_1 และขอให้สังเกตจากตัวอย่าง 5.9 ว่า (X; τ_2) เป็นปริภูมิ T_0

●

5.12 ทฤษฎีบท : ถ้าปริภูมิทอพอลอยี $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1 แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_0

บทพิสูจน์ ให้ $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1 และให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ แล้วจะมีเซตเปิด G และ H ซึ่ง $x \in G$ แต่ $y \notin G$ และ $y \in H$ แต่ $x \notin G$ ดังนั้นจะมีเซตเปิด G ซึ่ง $a \in G$ แต่ $b \notin G$ (หรือมีเซตเปิด H ซึ่ง $b \in H$ แต่ $a \notin H$) ดังนั้น $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_0

■

5.13 บทนิยาม : กำหนดให้ $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยี เราเรียก $(X;\tau)$ ว่า *ปริภูมิ T_2 (T_2 – space)* ถ้าสำหรับแต่ละคู่สมาชิก $a, b \in X$ ซึ่ง $a \neq b$ จะมีเซตเปิด G และ H ซึ่ง $a \in G$ และ $b \in H$ และ GI $H = \varnothing$

5.14 ตัวอย่างปริภูมิ T_2 และไม่ใช่ปริภูมิ T_2 :

1. ทุกปริภูมิหน่วยเป็นปริภูมิ T_2

2. ปริภูมิทอพอลอยี $(R;\tau)$ เมื่อ τ เป็นทอพอลอยีปกติเป็นปริภูมิ T_2 เพราะว่า ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \neq y$ และให้ $c = \frac{x+y}{2}$ แล้วช่วงเปิด $(x-1, c)$ กับ $(c, y+1)$ จะเป็นเซตเปิดที่ต้องการตามบทนิยาม 5.13

3. ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{0\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$ แล้ว $(X;\tau_2)$ ไม่เป็นปริภูมิ T_2

●

5.15 ทฤษฎีบท : ถ้าปริภูมิทอพอลอยี $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_2 แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1

บทพิสูจน์ ให้ $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_2 และให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ แล้วจะมีเซตเปิด G และ H ซึ่ง GI $H = \varnothing$ และ $x \in G$ และ $y \in H$ แต่เนื่องจาก GI $H = \varnothing$ ดังนั้น ($x \in G$ และ $y \notin G$) และ ($y \in H$ และ $x \notin H$) ดังนั้นมีเซตเปิด G และ H โดยที่ ($x \in G$ แต่ $x \notin H$) และ ($y \in H$ แต่ $y \notin G$) ทำให้ได้ว่า $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1

■

5.16 หมายเหตุ : สังเกตจากทฤษฎีบท 5.12 และทฤษฎีบท 5.15 ทำให้ทราบว่า ถ้า $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_2 แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1 และถ้า $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_1 แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 หรือกล่าวได้อีกนัยว่า ถ้า $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_2 แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 และปริภูมิ T_1

อันดับบนปริภูมิทอพอลอยี

ในหัวข้อนี้ เราจะบอกเงื่อนไขหนึ่งของปริภูมิทอพอลอยี ที่เราสามารถนิยามอันดับ $\leq$ บนปริภูมิทอพอลอยีได้

5.17 **ทฤษฎีบท** : ให้ $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยีซึ่งเป็นปริภูมิ T_0 และนิยาม $\leq \subseteq X \times X$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \in \overline{\{y\}}$ แล้ว $\leq$ เป็นอันดับบน X

บทพิสูจน์ 1. ให้ $x \in X$ แล้ว $x \in \{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $x \in \overline{\{x\}}$ ทำให้ได้ว่า $x \leq x$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x \in \overline{\{y\}}$ และ $y \in \overline{\{x\}}$ สมมติว่า $x \neq y$ แล้วเพราะว่า $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 ดังนั้นจะมี $U \in \tau$ ซึ่ง $x \in U$ แต่ $y \notin U$ หรือมี $V \in \tau$ ซึ่ง $y \in V$ แต่ $x \notin V$

ถ้ามี $U \in \tau$ ซึ่ง $x \in U$ แต่ $y \notin U$ แล้ว $U' = X - U$ เป็นเซตปิดและ $x \notin U'$ แต่ $y \in U'$ แต่ $\overline{\{y\}}$ เป็นเซตปิดเล็กสุดที่มี y เป็นสมาชิก ดังนั้น $\overline{\{y\}} \subseteq U'$ แต่ $x \in \overline{\{y\}} \subseteq U'$ ดังนั้น $x \in U'$ แต่ $x \notin U'$ ซึ่งขัดแย้งกันเอง ส่วนในกรณีมี $V \in \tau$ ซึ่ง $y \in V$ แต่ $x \notin V$ เราก็สามารถพิสูจน์ได้ข้อขัดแย้งในทำนองเดียวกัน

จึงสรุปได้ว่า $x = y$ ดังนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $x, y, z \in X$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \in \overline{\{y\}}$ และ $y \in \overline{\{z\}}$ แต่ $\overline{\{y\}}$ และ $\overline{\{z\}}$ เป็นเซตปิดเล็กสุดที่มี y และ z เป็นสมาชิกตามลำดับ แต่เพราะ $\overline{\{z\}}$ เป็นเซตปิดซึ่ง $y \in \overline{\{z\}}$ ดังนั้น $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{z\}}$ ทำให้ได้ว่า $x \in \overline{\{z\}}$ ดังนั้น $x \leq z$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด

สรุปได้ว่า $\leq$ เป็นอันดับบน X

■

5.18 **ตัวอย่างอันดับบนปริภูมิ** T_0 :

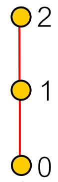
1. ให้ $X = \{0, 1, 2\}$ และ $\tau = \{X, \varnothing, \{2\}, \{1, 2\}\}$ แล้ว $(X;\tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยีที่เป็นปริภูมิ T_0 จะได้ว่า

$\overline{\{0\}} = X \cap \{0, 1\} \cap \{0\} = \{0\}$

$\overline{\{1\}} = X \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$

และ $\overline{\{2\}} = X = \{0, 1, 2\}$

ดังนั้นถ้านิยาม $\leq$ บน X ดังในทฤษฎีบท 5.17 แล้ว $0 \leq 1 \leq 2$ ทำให้ได้แผนภาพของ $(X; \leq)$ แสดงดังรูป 5.1



$\Xi := (X; \leq)$

รูปที่ 5.1

2. ให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$ และ $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}, \{e\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\}$ แล้ว $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยีที่เป็นปริภูมิ T_0 จะได้ว่า

$\overline{\{a\}} = X \cap \{a, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{a, b, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{a, c\}$

$\cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$

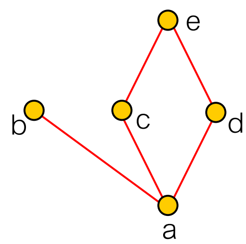
$\overline{\{b\}} = X \cap \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

$\overline{\{c\}} = X \cap \{a, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\}$

$\overline{\{d\}} = X \cap \{a, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} \cap \{a, c, d\} \cap \{a, b, d\} \cap \{a, d\} = \{a, d\}$

และ $\overline{\{e\}} = X \cap \{a, c, d, e\} = \{a, c, d, e\}$

ดังนั้นถ้านิยาม $\leq$ บน X ดังในทฤษฎีบท 5.17 แล้ว $a \leq a$, $a \leq b$, $b \leq b$, $a \leq c$, $c \leq c$, $a \leq d$, $d \leq d$, $a \leq e$, $c \leq e$, $d \leq e$ และ $e \leq e$ ทำให้ได้แผนภาพของ $(X; \leq)$ แสดงดังรูป 5.2



รูปที่ 5.2

[ขอให้สังเกตว่า $(X; \tau)$ ของตัวอย่างนี้ไม่เป็นปริภูมิ T_2]

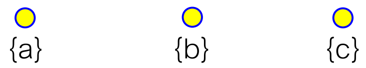
3. ให้ $X = \{a, b, c\}$ และ τ เป็นทอพอลอยีหน่วย แล้ว $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยีที่เป็นปริภูมิ T_0 (เป็นปริภูมิ T_1 และ T_2 ด้วย) จะได้ว่า

$\overline{\{a\}} = X \cap \{a, c\} \cap \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$

$\overline{\{b\}} = X \cap \{a, b\} \cap \{b, c\} \cap \{b\} = \{b\}$

และ $\overline{\{c\}} = X \cap \{a, c\} \cap \{b, c\} \cap \{c\} = \{c\}$

ดังนั้นถ้านิยาม $\leq$ บน X ดังในทฤษฎีบท 5.17 แล้ว $a \leq a$, $b \leq b$, $c \leq c$ ทำให้ได้แผนภาพของ $(X; \leq)$ แสดงดังรูป 5.3



รูปที่ 5.3 ●

ให้ $(X; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ τ เป็นทอพอลอยีบน X ซึ่ง $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 แล้วเราสามารถนิยามอันดับ $\leq_1$ ดังในทฤษฎีบท 5.17 จึงมีคำถามว่าอันดับ $\leq$ และอันดับ $\leq_1$ บน X เป็นอันดับเดียวกันหรือไม่ ตัวอย่าง 5.20 ต่อไปนี้ จะแสดงคำตอบว่า $\leq_1$ อาจไม่ใช่ $\leq$ แต่ก่อนอื่นจะขอพิสูจน์ความจริงในข้อสังเกต 5.19 ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของตัวอย่าง 5.18 ข้อ (3)

5.19 **ข้อสังเกต** : ให้ $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยี ซึ่งเป็นปริภูมิ T_2 แล้วอันดับ $\leq$ บน X ซึ่งนิยามดังในทฤษฎีบท 5.17 เป็นปฏิโซ่

บทพิสูจน์ ให้ $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิทอพอลอยีซึ่งเป็นปริภูมิ T_2 และให้ $x \in X$ แล้ว $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ ต่อไป ให้ $y \in \overline{\{x\}}$ ถ้า $x \neq y$ แล้วจะมีเซตเปิด G และ H ซึ่ง $x \in G$ และ $y \in H$ และ $G \cap H = \varnothing$ ทำให้ได้ว่า $x \in H'$ โดยที่ H' เป็นเซตปิด ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subseteq H'$ ทำให้ได้ $y \in H'$ แต่ $y \in H$ ซึ่งขัดแย้งกันเอง เราจึงได้ $x = y$ และจาก $y \in \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $x \in \overline{\{x\}}$ จึงได้ว่า $\overline{\{x\}} = \{x\}$ เพราะฉะนั้น $(X; \tau)$ เป็นปฏิโซ่

■

5.20 **ตัวอย่าง** :

1. เราทราบแล้วว่าเซตของจำนวนจริงทั้งหมด R กับอันดับ " น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) แบบปกติ " เป็นโซ่ และเซต R กับ τ ที่เป็นทอพอลอยีปกติ เป็นปริภูมิ T_2 ดังนั้น $(R; \tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 เราจึงสามารถนิยาม $\leq_1$ บน R ดังในทฤษฎีบท 5.17 ได้ แล้วโดยข้อสังเกต 5.19 เราจะได้ว่า $(R; \leq_1)$ เป็นปฏิโซ่

แสดงว่า อันดับ $\leq$ กับอันดับ $\leq_1$ บน R ไม่เป็นอันดับเดียวกัน

2. ให้ $(X ; \leq)$ เป็นเซตอันดับที่เป็นโซ่ และให้ $\tau = \wp(X)$ เป็นทอพอลอยีหน่วย แล้ว $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิ T_2 ดังนั้น $(X; \tau)$ เป็นปริภูมิ T_0 เราจึงสามารถนิยาม $\leq_1$ บน X ดังในทฤษฎีบท 5.17 ได้ แล้ว $(X; \leq_1)$ เป็นปฏิโซ่ ●

บทที่ 6
อันดับบนเซตของสายอักขระฐานสอง

ในบทนี้ เริ่มแรกเราจะให้รู้จักกับมโนคติเบื้องต้นของกราฟ ซึ่งเป็นพื้นฐานของการศึกษาเรื่องราวของบทนี้ แล้วจึงให้นิยามเซตของสายอักขระฐานสองและแสดงเงื่อนไขบนเซตของสายอักขระฐานสอง ที่ทำให้เราสามารถนิยามอันดับบนเซตของสายอักขระฐานสองได้ นอกจากนี้ยังจะพิสูจน์ว่าเซตอันดับบนเซตของสายอักขระฐานสองเป็นทรี

โดยความเป็นจริงเซตของสายอักขระฐานสองเราคุ้นเคยกันเป็นอย่างดี โดยเฉพาะกับการทำงานภายในคอมพิวเตอร์ ในส่วนการประมวลผลด้วยวงจรอิเล็กทรอนิกส์ แผงวรจรจะให้ค่า 0 กับ 1 ซึ่งสอดคล้องกับการเปิด – ปิด สวิตซ์ไฟฟ้านั่นเอง และการทำงานของอุปกรณ์คอมพิวเตอร์แต่ละส่วนก็มีลักษณะ 2 จังหวะตลอดเวลา ดังนั้นค่าตัวเลขในระบบฐานสอง จึงเหมาะสมที่สุดในการสร้างวงจร และแสดงคุณลักษณะทางฟิสิกส์ของอุปกรณ์ภายในเครื่องคอมพิวเตอร์

บทนิยามของทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

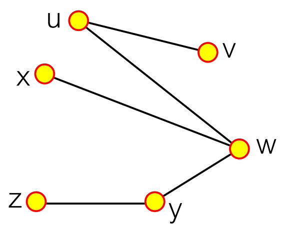
ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เฉพาะที่จะนำไปใช้กับเรื่องราวของสายอักขระของเลขฐานสอง

6.1 **บทนิยาม** : *กราฟ(Graph)* คือโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซต 2 เซต คือ *เซตของจุด (vertex set)* ซึ่งเป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ*เซตของเส้น (edge set)* ซึ่งคือเซตที่ประกอบด้วย 2 สมาชิกของเซตของจุด เราเขียนสัญลักษณ์แทนกราฟด้วย G = (V, E) หรือ G หรือ (V, E)

ในกรณีที่เราต้องการพิจารณากราฟพร้อม ๆ กัน หลาย ๆ กราฟ อาจเกิดความสับสนสำหรับสัญลักษณ์ V และ E เราจึงจะใช้สัญลักษณ์ V(G) แทนเซตของจุดของกราฟ G และ E(G) แทนเซตของเส้นของกราฟ G

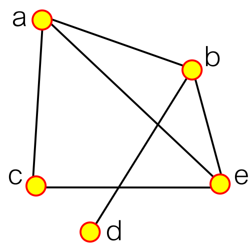
6.2 **ตัวอย่างกราฟ** :

1. กำหนดให้ G = (V, E) เป็นกราฟ โดยให้ V = {u, v, w, x, y, z} และ E(G) = {{u, v}, {u, w}, {w, x}, {w, y}, {x, z}} เราสามารถแสดงกราฟ G ด้วยแผนภาพดังรูป 6.1



รูปที่ 6.1

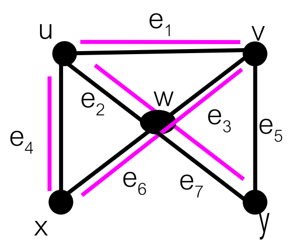
2. กำหนดให้ V = {a, b, c, d, e} และ E = {{a, b}, {a, c}, {a, e}, {b, e}, {b, d}, {c, e}} แล้วแผนภาพของกราฟ G = (V, E) แสดงดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2

6.3 **บทนิยาม** : *แนวเดิน (walk)* ในกราฟ G คือลำดับที่สลับกันของจุดและเส้นโดยเริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุด นั่นคือถ้า w คือแนวเดินจาก v_0 ถึง v_n เมื่อ $n \geq 0$ แล้ว w จะประกอบด้วย $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ โดยที่ $v_i \in V(G)$ และ $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ เมื่อ i = 1, 2, 3, 4, …, n โดยมี v_0 เป็นจุดเริ่มต้น และ v_n เป็นจุดสิ้นสุด เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $v_0 - v_n$ แทนแนวเดิน w

6.4 **ตัวอย่างแนวเดิน** : พิจารณากราฟซึ่งแสดงดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3

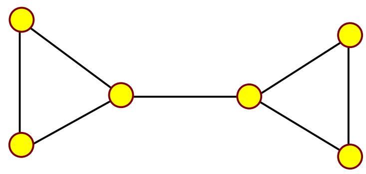
แล้วแนวเดิน u – y คือ u, e_1, v, e_3, w, e_6, x, e_4, u, e_2, w, e_7, y

[นั่นหมายความว่า แนวเดินจะมีจุดซ้ำหรือไม่ซ้ำก็ได้ แต่ต้องเริ่มที่จุดและจบที่จุด]

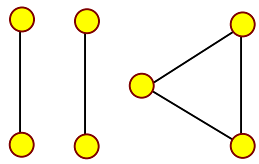
6.5 **บทนิยาม** : กำหนดให้ u และ v เป็นจุดของกราฟ G เรากล่าวว่า u *เชื่อมโยง (connect)* กับ v ถ้ามีแนวเดิน u – v และเรียกกราฟ G ว่า *กราฟเชื่อมโยง(connected graph)* ถ้า u เชื่อมโยงกับ v สำหรับทุก ๆ คู่ u, v ใน V(G) และถ้า G ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง เราจะกล่าวว่า G เป็น*กราฟไม่เชื่อมโยงหรือกราฟขาดตอน(disconnected graph)*

6.6 **ตัวอย่างกราฟเชื่อมโยงและกราฟขาดตอน** :

กราฟเชื่อมโยง :



กราฟขาดตอน :

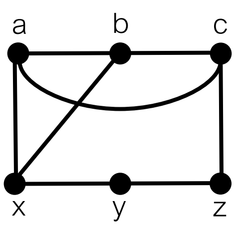


รูปที่ 6.4

6.7 **บทนิยาม** : เรากล่าวว่า แนวเดิน u – v เป็น *วิถี(Path)* ถ้าในแนวเดิน u - v ไม่มีจุดซ้ำกัน

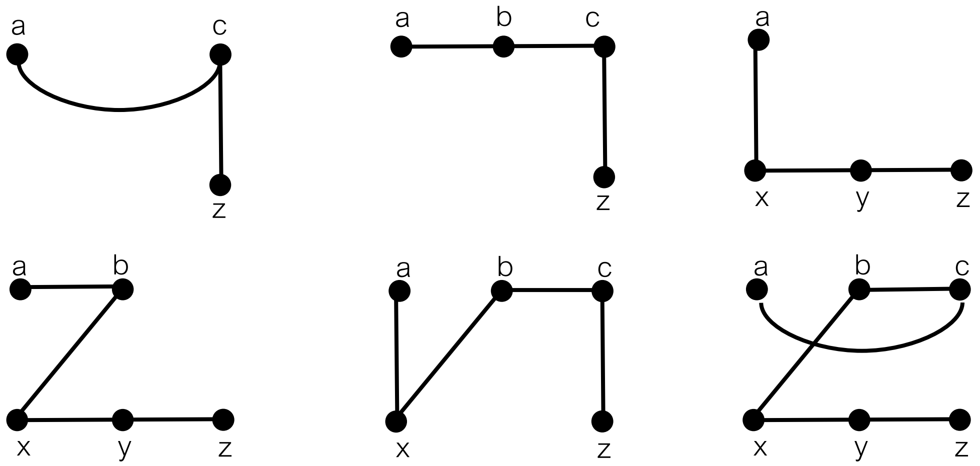
6.8 **ตัวอย่างวิถี** :

พิจารณากราฟ G ดังรูปที่ 6.5



รูปที่ 6.5

แล้ววิถีทั้งหมดจาก a ไปยัง z ใน G แสดงดังรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6

6.9 **บทนิยาม** : *วัฏจักร(Cycle)* คือแนวเดิน $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ ซึ่ง $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$ เป็นจุดที่แตกต่างกันทั้งหมด และ $v_0 = v_n$

6.10 **บทนิยาม** : ให้ G เป็นกราฟ เรากล่าวว่า G เป็น*ทรี(tree)* ถ้าแต่ละคู่สมาชิกใน G มีวิถีเพียงวิถีเดียวระหว่างกัน

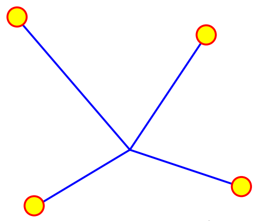
6.11 **ข้อสังเกต** : ถ้า $\Pi = (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับจำกัด แล้วแผนภาพของ Π เป็นกราฟที่มี P เป็นเซตของจุด และ $\leq := \{(x, x) \mid x \in P\}$ เป็นเซตของเส้น

6.12 **บทนิยาม** : ให้ $\Pi = (P; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า Π เป็น*ทรี(Tree)* ถ้า $\perp \in P$ และ $\downarrow x$ เป็นโซ่ สำหรับทุก ๆ $x \in P$

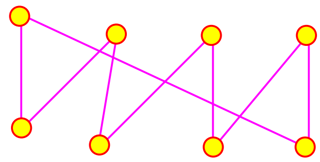
6.13 **ข้อสังเกต** : ถ้า Π เป็นเซตอันดับจำกัด แล้วเห็นได้ชัดว่า กราฟของ Π เป็นทรีก็ต่อเมื่อ Π เป็นทรี

6.14 **ตัวอย่างทรี** :

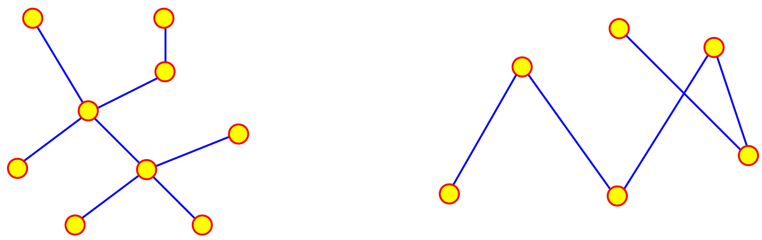
ในแผนภาพรูปที่ 6.6 แสดงกราฟที่เป็นทรี เซตอันดับที่เป็นทรีและไม่เป็นทรี



กราฟของทรี



เซตอันดับที่ไม่เป็นทรี



เซตอันดับที่เป็นทรี

รูปที่ 6.6

อันดับบนเซตของสายอักขระฐานสอง

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยามเซตของสายอักขระฐานสอง และแสดงการนิยามอันดับ $\leq$ บนเซตของสายอักขระฐานสอง

6.15 **บทนิยาม** : เราเรียกลำดับซึ่งคือฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}^{+} \rightarrow \{0, 1\}$ ว่า *สายอักขระฐานสอง (binary string)* และเขียนแทน f ด้วยสัญลักษณ์ $f := (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ หรือ $f := a_1a_2\ldots a_n \ldots$ โดยที่ $a_i \in \{0, 1\}$ ทุก ๆ $i \in \mathbb{N}^{+}$

ถ้ามีจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $a_i = 0$ ทุก ๆ $i > m$ นั่นคือ $f := a_1a_2\ldots a_m0000\ldots$ เราจะเรียก f ว่า*สายอักขระฐานสองจำกัด(finite binary string)* และถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด ซึ่ง $a_i = 0$ ทุก ๆ $i > m$ เราจะเขียนแทน f ด้วยสัญลักษณ์ $f = a_1a_2\ldots a_m$ และเรียก m ว่า *ความยาว(length)* ของ f

เราใช้สัญลักษณ์ Σ และ Σ^* แทนเซตของสายอักขระฐานสองจำกัดทั้งหมดและสายอักขระฐานสองทั้งหมดตามลำดับ นั่นคือ

$$\Sigma = \{a_1a_2\ldots a_n \mid n \in \mathbb{N}^{+} \text{ และ } a_i \in \{0, 1\}\}$$

และ $\Sigma^* = \{a_1a_2 \ldots a_n \ldots \mid n \in ข^+$ และ $a_i \in \{0, 1\}\}$

แล้วขอให้สังเกตว่า $\Sigma \subseteq \Sigma^*$

6.16 **บทนิยาม** : ให้ $v = a_1a_2 \ldots a_n \ldots \in \Sigma^*$ (หรือ $v = a_1a_2 \ldots a_n \in \Sigma$) แล้วสำหรับแต่ละ $m \in ข^+$ เราเรียกสายอักขระฐานสองจำกัด $a_1a_2 \ldots a_m$ (หรือ $a_1a_2 \ldots a_m$ สำหรับ $1 \leq m \leq n$) ว่า *สายอักขระย่อยเริ่มต้นจำกัด(finite initial substring)*ของ v หรือ*สายอักขระนำหน้า(prefix)* ของ v

สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม n เราจะใช้สัญลักษณ์ Σ_n แทนเซตของสายอักขระฐานสองความยาวไม่เกิน n ทั้งหมด แล้วเห็นได้ชัดว่า $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots \Sigma_n \subseteq \ldots$ นั่นคือ Σ_n จะเป็นเซตของสายอักขระนำหน้าของสายอักขระใน Σ_m ทุก ๆ $m \geq n$ ยิ่งไปกว่านั้น $\Sigma^* = \bigcup_{n \in ข^+} \Sigma_n$

6.17 **หมายเหตุ** : ให้ $u, v \in \Sigma$ นั่นคือมี $p, q \in ข^+$ ซึ่ง $u = a_1a_2 \ldots a_p$ และ $v = b_1b_2 \ldots b_q$ เมื่อ $a_i, b_j \in \{0, 1\}$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ และ $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ และเรานิยาม $uv := a_1a_2 \ldots a_pb_1b_2 \ldots b_q$ แล้ว uv เป็นสมาชิกของ Σ แสดงว่าเราอาจสร้างสายอักขระฐานสองจำกัดขึ้นใหม่จากสายอักขระฐานสองจำกัดเดิม 2 สาย โดยการนำสายอักขระฐานสองจำกัดทั้งสองมาวางติดกัน และขอให้สังเกตว่าการวาง u และ v ที่แตกต่างกันแต่สลับตำแหน่งกัน จะได้สายอักขระฐานสองที่แตกต่างกันด้วย แสดงว่า uv อาจไม่ใช่ vu

6.18 **ทฤษฎีบท** : กำหนดให้ $\Sigma^{**} := \Sigma^* \cup \{\varnothing\}$ และนิยามความสัมพันธ์ $\leq$ บน Σ^{**} โดย

$$v \leq u \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v = \varnothing \text{ หรือ} \\ v \text{ เป็นสายอักขระนำหน้าของ } u \text{ หรือ} \\ \text{มี } a, b, c \in \Sigma^{**} \text{ ซึ่ง } v = a0b \text{ และ } u = a1c \end{cases}$$

แล้ว $\leq$ เป็นอันดับบน P

บทพิสูจน์ 1. ให้ $a \in \Sigma^{**}$ แล้ว a เป็นสายอักขระนำหน้าของตัวเอง ดังนั้น $a \leq a$ เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการสะท้อน

2. ให้ $a, b \in \Sigma^{**}$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq a$ ถ้า $a = \varnothing$ และเพราะ $b \leq a$ เราจะได้ $b = \varnothing$ ดังนั้น $a = b = \varnothing$ และถ้า $a \neq \varnothing$ แล้ว $b \neq \varnothing$ ทำให้แยกพิจารณาได้ 4 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณี 1 : a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b และ b เป็นสายอักขระนำหน้าของ a แล้วทั้ง a และ b เป็นสายอักขระฐานสองจำกัดทั้งคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด n และ m ซึ่ง $a = a_1a_2\ldots a_n$ และ $b = b_1b_2\ldots b_m$ แต่เนื่องจาก a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b ดังนั้น $n \leq m$ และ $a_i = b_i$ สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq n$ และในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก b เป็นสายอักขระนำหน้าของ a ดังนั้น $m \leq n$ และ $a_i = b_i$ สำหรับทุก ๆ $1 \leq i \leq m$ ทำให้ได้ว่า m = n และ $a_i = b_i$ ทุก ๆ $1 \leq i \leq n = m$ ดังนั้น a และ b เป็นลำดับ(ฟังก์ชัน)เดียวกัน จึงได้ว่า a = b

กรณี 2 : a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b และมี $x_2, y_2, z_2 \in \Sigma^*$ ซึ่ง $b = x_20y_2$ และ $a = x_21z_2$ แต่เพราะ a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b ดังนั้นจะมี $w \in \Sigma^*$ ซึ่ง $b = aw = x_21z_2w$ และ $b = x_20y_2$ ทำให้ได้ว่า $x_21z_2w = x_20y_2$ ดังนั้น 1 = 0 ซึ่งไม่เป็นจริง กรณีนี้จึงไม่เกิดขึ้น

กรณี 3 : b เป็นสายอักขระนำหน้าของ a และมี $x_1, y_1, z_1 \in \Sigma^*$ ซึ่ง $a = x_10y_1$ และ $b = x_11z_1$ แล้วจะได้ 0 = 1 เช่นเดียวกับกรณี 2 ดังนั้นกรณีนี้ก็ไม่เกิดขึ้น

กรณี 4 : มี $x_1, y_1, z_1 \in \Sigma^*$ ซึ่ง $a = x_10y_1$ และ $b = x_11z_1$ และ มี $x_2, y_2, z_2 \in \Sigma^*$ ซึ่ง $b = x_20y_2$ และ $a = x_21z_2$ แล้ว $x_10y_1 = a = x_21z_2$ และ $x_11z_1 = b = x_20y_2$ ทำให้ได้ว่า $[(x_1 = x_21$ และ $z_2 = 0y_1)$ หรือ $(x_2 = x_11$ และ $y_1 = 1z_2)]$ และ $[(x_2 = x_11$ และ $z_1 = 0y_2)$ หรือ $(x_1 = x_20$ และ $y_2 = 1z_1)]$ ทำให้แยกพิจารณาได้ 4 กรณี ดังต่อไปนี้

- $x_1 = x_21$ และ $z_2 = 0y_1$ และ $x_2 = x_11$ และ $z_1 = 0y_2$ แล้วจะได้ $x_1 = x_111$ ดังนั้น 0 =1
- $x_1 = x_21$ และ $z_2 = 0y_1$ และ $x_1 = x_20$ และ $y_2 = 1z_1$ แล้วจะได้ $x_21 = x_20$ ดังนั้น 0 =1
- $x_2 = x_10$ และ $y_1 = 1z_2$ และ $z_1 = 0y_2$ และ $x_2 = x_11$ แล้วจะได้ $x_10 = x_11$ ดังนั้น 0 =1
- $x_2 = x_10$ และ $y_1 = 1z_2$ และ $x_1 = x_20$ และ $y_2 = 1z_1$ แล้วจะได้ $x_2 = x_1$ ทำให้ได้ว่า $x_10y_1 = a = x_11z_2$ ดังนั้น 0 =1

ดังนั้นไม่ว่ากรณีใด เราได้ 0 =1 ซึ่งไม่เป็นจริง กรณี 4 จึงไม่เกิดขึ้น

สรุปได้ว่า กรณีที่เป็นไปได้คือกรณี 1 เพียงกรณีเดียวเท่านั้น ทำให้ได้ว่า a = b เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการปฏิสมมาตร

3. ให้ $a, b, c \in \Sigma^*$ ซึ่ง $a \leq b$ และ $b \leq c$ ถ้า $a = \varnothing$ แล้ว $\varnothing \leq c$ ดังนั้น $a \leq c$ และถ้า $a \neq \varnothing$ แล้ว $b \neq \varnothing$ และ $c \neq \varnothing$ ทำให้แยกพิจารณาได้ 4 กรณี

กรณี 1 : ถ้า a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b และ b เป็นสายอักขระนำหน้าของ c แล้ว a เป็นสายอักขระนำหน้าของ c ดังนั้น $a \leq c$

.

กรณี 2 : ถ้า a เป็นสายอักขระนำหน้าของ b และมี x, y, z $\in \Sigma^*$ ซึ่ง b = x0y และ c = x1z แล้วจะมี w $\in \Sigma^*$ ซึ่ง b = aw แต่ b = x0y ดังนั้น aw = x0y

ถ้า a = x หรือ a = x0 แล้ว a เป็นสายอักระนำหน้าของ c หรือมี x, 0, z $\in \Sigma$ ซึ่ง a = x00 และ c = x1z แต่ไม่ว่ากรณีใด เราจะได้ a $\leq$ c

ถ้า a = x0y_1 โดยที่ y_1 เป็นสายอักขระนำหน้าของ y แล้วจะมี x, $y_1 \in \Sigma$ ซึ่ง a = x0y_1 และ c = x1z เราจะได้ a $\leq$ c

กรณี 3 : ถ้ามี x, y, z $\in \Sigma^*$ ซึ่ง a = x0y และ b = x1z และ b เป็นสายอักขระนำหน้าของ c แล้วจะมี $w_1 \in \Sigma^*$ ซึ่ง c = bw_1 = x1z w_1 แสดงว่ามี x, y $\in \Sigma^*$ และมี w = z$w_1 \in \Sigma^*$ ที่ทำให้ a = x0y และ c = x1w ดังนั้น a $\leq$ c

กรณี 4 : มี x_1, y_1, z_1 $\in \Sigma^*$ ซึ่ง a = $x_1 0 y_1$ และ b = $x_1 1 z_1$ และ มี x_2, y_2, z_2 $\in \Sigma^*$ ซึ่ง b = $x_2 0 y_2$ และ c = $x_2 1 z_2$ แล้ว $x_1 1 z_1$ = b = $x_2 0 y_2$ ทำให้แยกพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

ถ้า $x_1 = x_2 0$ และ $y_2 = 1z_1$ แล้วเพราะ a = $x_1 0 y_1$ ดังนั้น a = $x_2 00 y_1$ = $x_2 0$w เมื่อ w = 0$y_1 \in \Sigma^*$ โดยที่ c = $x_2 1 z_2$ เพราะฉะนั้น a $\leq$ c

ถ้า $x_2 = x_1 1$ และ $z_1 = 0y_2$ แล้วเพราะ c = $x_2 1 z_2$ ดังนั้น c = $x_1 11 z_2$ = $x_1 1$w เมื่อ w = 1$z_2 \in \Sigma^*$ โดยที่ a = $x_1 0 y_1$ เพราะฉะนั้น a $\leq$ c

ไม่ว่ากรณีใด เราได้ว่า a $\leq$ c เพราะฉะนั้น $\leq$ สอดคล้องสมบัติการถ่ายทอด
ดังนั้น (Σ^{**}; $\leq$) เป็นเซตอันดับ

■

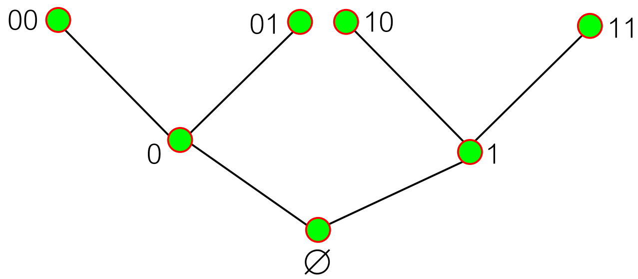
6.19 **บทแทรก** : ถ้าอันดับ $\leq$ บนเซตของสายอักขระฐานสองเป็นโซ่ แล้วเซตอันดับ (Σ^{**}; $\leq$) มี $\perp$ แต่ไม่มี □

บทพิสูจน์ เพราะว่า $\varnothing \in \Sigma^{**}$ และ $\varnothing \leq$ b สำหรับทุก ๆ b $\in \Sigma^{**}$ ดังนั้น $\varnothing$ คือ $\perp$ ใน (Σ^{**}; $\leq$) แต่ถ้า n $\in$ ฃ$^+$ และ b $\in \Sigma_n$ แล้วจะมี v = b0 $\in \Sigma_{n+1}$ ซึ่ง b $\leq$ v ดังนั้น (Σ; $\leq$) ไม่มีสมาชิกใหญ่สุด และเพราะว่า $\Sigma^{**} = \bigcup_{n \in ฃ^+} \Sigma_n$ โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ด้วยว่า (Σ^{**}; $\leq$) ไม่มีสมาชิกใหญ่สุด

■

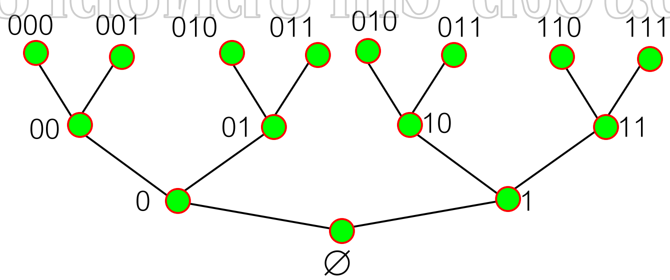
6.20 ตัวอย่าง Σ^{**} :

1. ให้ $A \subseteq \Sigma_2$ โดยที่ $A = \{\varnothing, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$ และ $\leq$ เป็นอันดับบน A ดังนิยามในทฤษฎีบท 6.18 แล้ว $(A; \leq)$ มีแผนภาพแสดงดังรูปที่ 6.7



รูปที่ 6.7

2. ให้ $A \subseteq \Sigma_3$ โดยที่ $A = \{\varnothing, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 010, 011, 110, 111\}$ และ $\leq$ เป็นอันดับบน A ดังนิยามในทฤษฎีบท 6.18 แล้ว $(A; \leq)$ มีแผนภาพแสดงดังรูปที่ 6.8



รูปที่ 6.8

ต่อไปเราจะแสดงว่า เซตอันดับ $(\Sigma^{**}; \leq)$ เป็นทรี แต่การพิสูจน์ ต้องการผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

6.21 ทฤษฎีบท :

1. แต่ละ $u \in \Sigma^{**}$ จะมี $v, w \in \Sigma^{**}$ เพียง 2 ตัวเท่านั้น ซึ่ง $u p \ v$ และ $u p \ w$
2. แต่ละ $u \in \Sigma^{*}$ จะมี $v \in \Sigma^{*}$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น ซึ่ง $v p \ u$

บทพิสูจน์ 1. ให้ $u \in \Sigma^{**}$ ถ้า $u = \varnothing$ แล้ว up 0 และ up 1 เราจึงพิจารณากรณีที่ $u \neq \varnothing$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n ตัวน้อยสุดซึ่ง $u \in \Sigma_n$ ซึ่งแสดงว่า $u = a_1 \ldots a_n$ เมื่อ $a_i \in \{0, 1\}$ ทุก ๆ $1 \leq i \leq n$ แล้ว up $a_1 \ldots a_n 0$ และ up $a_1 \ldots a_n 1$ และเห็นได้ชัดว่า ไม่มี v อื่นใดอีกใน Σ^* ซึ่ง up v

2. ให้ $u \in \Sigma^*$ ถ้า u มีความยาว 1 แล้ว $\varnothing$p u จึงให้ $u = a_1 \ldots a_n$ มีความยาว $n > 1$ แล้วเห็นได้ชัดว่าจะมี $v = a_1 \ldots a_{n-1}$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง vp u ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริงโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

■

6.22 **ทฤษฎีบท** : เซตอันดับ $(\Sigma^{**}; \leq)$ เป็นทรี

บทพิสูจน์ โดยนิยามของ $\leq$ เราจะได้ว่า $\varnothing$ เป็นสมาชิกเล็กสุดของ Σ^{**} และถ้าให้ $u \in \Sigma^{**}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก n ตัวน้อยสุดซึ่ง $u \in \Sigma_n$ และโดยทฤษฎีบท 6.21 และอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\downarrow u = \{u = a_1 \ldots a_n$ p $a_1 \ldots a_{n-1}$ p … p a_1 p $\varnothing\}$ เป็นโซ่ เพราะฉะนั้น $(\Sigma^{**}; \leq)$ เป็นทรี

■

บรรณานุกรม

[1] J.A.Anderson, **Discrete Matematics with Combinatorics**, Prentice Hall Inc., 2001.

[2] B.A.Davey and H.A.Priestley, **Introduction to Lattices and Orders**, Cambride University Press, 1990.

[3] E.G.Goodaire and M.M.Parmenter, **Discrete Mathematics with Graph Theory**, Prentice Hall Inc., 2002.

[4] D.W.Hall (Professor of Mathematics Harpur College)and Guilford L. Spencer(Associate Professor of Mathematics Williams College), **Elementary Topology,** John Willey & Sons, Inc., New York, 1955.

[5] W.K.Grassmnn and J.P.Trenblay, **Logic and Discrete Mathematics: a computer science perspective**, Prentice Hall Inc., 1996.

[6] S.Lipschutz, **Theorem and Problem of General Topology**, New York, 1965.

[7] B.Mendelson, **Introduction to Topology (Second Edition)**, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1968.

บัญชีสัญลักษณ์

$\leq \subseteq P \times P$	: ความสัมพันธ์
$\mathbb{P} := (P;\leq)$	: เซตอันดับบนเซต P
$\mathbb{Z}^{+}$	: เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mid$	: ความสัมพันธ์การหารลงตัว
$\prec$	: ปกคลุม
$\perp$	: สมาชิกล่างสุด
$\top$	: สมาชิกบนสุด
$\leq^{\partial}$	: อินเวอร์สของ $\leq$
$\leq_{Q}$	: อันดับกำกัดบน Q
$<$	: อันดับโดยแท้หรือน้อยกว่า
$\mathbf{R}$	: เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
$\mathbb{P} \dot{\cup} \mathbb{Q}$	: ยูเนียนต่างสมาชิก
$\mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$	: ผลบวกเชิงเส้น
$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$	: ผลคูณของ $\mathbb{P}$ กับ $\mathbb{Q}$
$\cong$	: ฟังก์ชันถอดแบบอันดับ
$\downarrow_{Q}$	: เซตด้านลง
$\uparrow_{Q}$	: เซตด้านขึ้น
$O(P)$	: ไอดีลอันดับ
Σ^{**}	: เซตของสายอักขระฐานสองทั้งหมด
τ	: ทอพอลอยี
$\overline{A}$	: เซตปิดคลุมของ A

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางสาวสุนันทา พรายมี
ที่อยู่	20 หมู่ 2 ตำบลนาวุ้ง อ.เมือง จ.เพชรบุรี 76000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ จาก มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
พ.ศ. 2545	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2542 – 2545	อาจารย์สอน หมวดวิชาคณิตศาตร์ โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
พ.ศ. 2545	ผู้ช่วยสอน สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม
พ.ศ. 2546 – ปัจจุบัน	อาจารย์สอน โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี