ทฤษฎีของการอินทิเกรต

โดย
นางสาวขนิษฐา ใจหนักดี

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2553

ทฤษฎีของการอินทิเกรต

โดย

นางสาวขนิษฐา ใจหนักดี

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2553

THEORY OF INTEGRATION

By

Khanittha Jainakdee

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2010

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้การค้นคว้าอิสระเรื่อง “ ทฤษฎีของการอินทิเกรต ” เสนอโดย นางสาวขนิษฐา ใจหนักดี เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

………..
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปานใจ ธารทัศนวงศ์)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
วันที่.........เดือน........................... พ.ศ............

อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ

รองศาสตราจารย์วารี เกรอต

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าอิสระ

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง)
............/......................../..............

.... กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)
............/......................../..............

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์วารี เกรอต)
............/......................../..............

49308302 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : ขอบเขตบน / ขอบเขตล่าง / รีมันน์อินทิกรัล

ขนิษฐา ใจหนักดี : ทฤษฎีของการอินทิเกรต. อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ : รศ.วารี เกรอต. 60 หน้า.

การอินทิเกรตเป็นพื้นฐานสำคัญในแคลคูลัสที่มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในหลายสาขา เริ่มต้นเราศึกษาขอบเขตบนค่าน้อยสุด ขอบเขตล่างค่ามากสุด ซึ่งเกี่ยวข้องกับการนิยามรีมันน์อินทิกรัล

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราจะศึกษาสมบัติต่างๆ ของ รีมันน์อินทิกรัล ได้แก่เงื่อนไขของการอินทิเกรตได้ สมบัติการบวกและสมบัติเชิงเส้นของอินทิกรัลโดยเฉพาะอย่างยิ่งเราศึกษาทฤษฎีบทที่สำคัญมากในแคลคูลัส ซึ่งคือทฤษฎีบทหลักของแคลคูลัส

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2553

ลายมือชื่อนักศึกษา..

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ....

49308302 : MAJOR : (MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY)
KEY WORDS : LEAST UPPER BOUND / GREATEST LOWER BOUND / RIEMANN INTEGRAL

KHANITTHA JAINAKDEE : THEORY OF INTEGRATION. INDEPENDENT STUDY ADVISOR : ASSOC.PROF.WAREE KAROT. 60 pp.

Integration is an important concept in calculus that has been widely applied in many fields. We first study least upper bounds and greatest lower bounds which are related to the definition of Riemann integral.

In this an independent study we study in detail various properties of Riemann integrals : such as integrability conditions , additivity and linearity of integrals especially we present very important theorems in calculus : the fundamental theorems of calculus.

Department of Mathematics Graduate School, Silpakorn University Academic Year 2010
Student's signature ....
Independent Study Advisor's signature ....

กิตติกรรมประกาศ

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาอย่างยิ่งของ ร องศาสตราจารย์ วารี เกรอต อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระที่ให้คำปรึกษา แนะนำ ตรวจสอบความถูกต้อง แก้ไขส่วนที่บกพร่องต่างๆ และช่วย เติมเต็มความรู้ จนทำให้การค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ และภาควิชาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ จนทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จได้ด้วยดี

ขอขอบคุณเพื่อนๆ ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีสารสนเทศ ที่มีส่วนช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ และคุณแม่ ที่ให้การสนับสนุนการศึกษา และเป็นกำลังใจด้วยดีเสมอมา รวมทั้งกำลังใจจากญาติพี่น้อง ในการศึกษาจนทำให้ประสบความสำเร็จได้ในวันนี้

สุดท้ายนี้ด้วยความดีของการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแ ด่ คุณพ่อ และคุณแม่ คุณครู อาจารย์ ทั้งในอดีตและปัจจุบันทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้ข้าพเจ้าด้วยดีเสมอมา

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ
(Introduction)

แคลคูลัสเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ มีการประยุกต์อย่างกว้างขวาง ทั้งในคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และวิศวกรรมศาสตร์เป็นต้น พื้นฐานหนึ่งที่สำคัญในแคลคูลัส ได้แก่ การอินทิเกรต

ในการค้นคว้าอิสระเล่มนี้ เราจะเริ่มศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการอินทิเกรต พร้อมทั้งสมบัติของอินทิกรัล ซึ่งทำให้เกิดทฤษฎีบทที่สำคัญต่างๆ ทฤษฎีบทเหล่านี้ได้นำไปประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์หรือสาขาวิชาอื่นๆ รายละเอียดของแต่ละบทมีดังต่อไปนี้

บทที่ 2 : กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริงและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นพื้นฐานในการศึกษาเรื่องการอินทิเกรต

บทที่ 3 : ศึกษาแนวคิดของการอินทิเกรต ซึ่งได้แก่ ขอบเขตบนค่าน้อยสุด ขอบเขตล่างค่ามากสุด บทนิยามของรีมันน์อินทิกรัล และตัวอย่างต่างๆ รวมทั้ง ได้พิสูจน์ผลบางประการเกี่ยวกับอินทิกรัล

บทที่ 4 : ศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของอินทิกรัล อันได้แก่ เงื่อนไขของการอินทิเกรตได้ สมบัติการบวกและสมบัติเชิงเส้นของอินทิกรัล และทฤษฎีบทมูลฐานขอ งแคลคูลัส รวมทั้งได้พิสูจน์ผลบางประการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทของบทที่ 4

บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
(BASIC THEOREM)

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยาม และทฤษฎีบทพื้นฐานต่างๆ ที่ใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการอินทิเกรต โดยจะขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบท สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [2] , [3] และ [4]

ในการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ จะขอกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้ดังต่อไปนี้

I^{+} แทน เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

$A \subset B$ แทน ความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

และถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงเซต จะหมายถึงสับเซตของ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันจะหมายถึงฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และใช้สัญลักษณ์ $D(f)$ แทน โดเมนของฟังก์ชัน f

ทฤษฎีบท 2.1 : กฎไตรวิภาค (Trichotomy Law)

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x<y$ หรือ $x=y$ หรือ $x>y$ เป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบท 2.2 : หลักอาร์คีมีดิส (Archimedean Principle)

ถ้า a , b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $na > b$

เราสังเกตได้จากหลักอาร์คีมีดิสว่า ถ้ากำหนดจำนวนบวก $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก m , n ซึ่งสอดคล้อง $\frac{1}{n} < \varepsilon$ และ $m > \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.3 : ความหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ (Density of the Rational Numbers)

ถ้า α และ β เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\alpha < \beta$ แล้วมีจำนวนตรรกยะ γ ซึ่ง $\alpha < \gamma < \beta$

ทฤษฎีบท 2.4 : ความหนาแน่นของจำนวนอตรรกยะ (Density of the Irrational Numbers)

ถ้า α และ β เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\alpha < \beta$ แล้วมีจำนวนอตรรกยะ γ ซึ่ง $\alpha < \gamma < \beta$

บทนิยาม 2.5 : จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น (monotone decreasing function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$

บทนิยาม 2.6 : จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง (monotone increasing function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$

บทนิยาม 2.7 : จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้น (strictly monotone increasing function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

บทนิยาม 2.8 : จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทนลดลง (strictly monotone decreasing function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $x_1, x_2 \in D(f)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

บทนิยาม 2.9 : จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชันโมโนโทน (monotone functions)** ถ้า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลงหรือเป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น

บทนิยาม 2.10 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามค่าบนช่วงเปิดรอบ a และอาจยกเว้นที่ a เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็น **ลิมิต (limit)** ของ f ที่ a ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่าถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \varepsilon$

เราจะเขียนแทนความหมายตามบทนิยามโดย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

บทนิยาม 2.11 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $x_0 \in D(f)$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่อง (continuous)** ที่ x_0 ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $x \in D(f)$ และ $|x-x_0| < \delta$

บทนิยาม 2.12 : ให้ f เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม บน A (uniformly continuous on A)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $x, y \in A$ และ $|x-y| < \delta$ แล้ว $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.13 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้วมีจำนวนจริง x_0 ใน $[a,b]$ ซึ่ง $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก x ใน $[a,b]$

นั่นคือ f มีค่าสูงสุดบน $[a,b]$ และทำนองเดียวกันมีจำนวนจริง x_1 ใน $[a,b]$ ซึ่ง $f(x_1) \leq f(x)$ สำหรับทุก x ใน $[a,b]$ นั่นคือ f มีค่าต่ำสุดบน $[a,b]$

บทนิยาม 2.14 : ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a,b) และให้ $c \in (a,b)$ เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ (differentiable)** ที่ c ถ้า

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

หาค่าได้ เรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ (derivative)** ของ f ที่ c เขียนแทนโดย $f'(c)$

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน (a,b) แล้วเรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ (differentiable)** บน (a,b)

ทฤษฎีบท 2.15 : ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ a แล้ว f ต่อเนื่องที่ a

ทฤษฎีบท 2.16 : กฎลูกโซ่ (The Chain rule)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่ง f มีอนุพันธ์ที่ a และ g มีอนุพันธ์ที่ $f(a)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ gof มีอนุพันธ์ที่ a และ

$$(gof)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

ทฤษฎีบท 2.17 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่งสอดคล้อง

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ทฤษฎีบท 2.18 : ทฤษฎีบทค่ากลาง (Intermediate Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(a) \neq f(b)$ ถ้า α เป็นจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(c) = \alpha$

บทนิยาม 2.19 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี D เป็นโดเมนร่วมกัน **ฟังก์ชันค่าสูงสุด (maximum function)** เขียนแทนโดย max(f,g) นิยามบน D ดังต่อไปนี้

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) \ , & f(x) \geq g(x) \\ g(x) \ , & f(x) < g(x) \end{cases}$$

บทนิยาม 2.20 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี D เป็นโดเมนร่วมกัน **ฟังก์ชันค่าต่ำสุด (minimum function)** เขียนแทนโดย min(f,g) นิยามบน D ดังต่อไปนี้

$$\min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) \ , & f(x) \leq g(x) \\ g(x) \ , & f(x) > g(x) \end{cases}$$

บทที่ 3
การอินทิเกรต
(Integration)

3.1 ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (Least Upper Bounds)

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นแนวคิดสำคัญสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ในแขนงต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในคณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาบทนิยามของขอบเขตบนค่าน้อยสุดพร้อมทั้งตัวอย่างต่างๆ ที่แสดงถึงการหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตและจะนำเสนอการใช้ขอบเขตบนค่าน้อยสุดในแนวคิดเรื่องการอินทิเกรต

บทนิยาม 3.1.1 : ให้ A เป็นเซตใดๆ ถ้ามีจำนวนจริง b ซึ่ง $x \leq b$ สำหรับทุก x ที่เป็นสมาชิกของ A แล้ว เรียก b ว่า **ขอบเขตบน (upper bound)** ของ A

บทนิยาม 3.1.2 : ให้ A เป็นเซตใดๆ แล้วจำนวน b เรียกว่า **ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound หรือ supremum)** ของ A ถ้า b สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) b เป็นขอบเขตบนของ A

(2) ถ้า c เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $b \leq c$

เราใช้สัญลักษณ์ $\text{l.u.b.}\, A$ หรือ $\sup A$ แทน ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

ทฤษฎีบท 3.1.3 : ถ้า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด แล้ว S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ : ให้ λ และ β เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S เนื่องจาก λ เป็นขอบเขตบนของ S และ β เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด ดังนั้น $\beta \leq \lambda$

ในทำนองเดียวกัน $\lambda \leq \beta$ โดยกฎไตรวิภาค จะได้ว่า $\beta = \lambda$

เพราะฉะนั้น S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเพียงค่าเดียว ■

ตัวอย่าง 3.1.4 : ให้ $A = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$ แล้วขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A คือ 0 ซึ่ง $0 \notin A$

พิสูจน์ : (1) เห็นได้ชัดเจนว่า 0 เป็น ขอบเขตบนของ A

(2) ให้ α เป็น ขอบเขตบนของ A

เราต้องการแสดงว่า $0 \leq \alpha$ สมมติ $\alpha < 0$

ดังนั้น $-\alpha > 0$ โดย หลักอาร์คีมีดิส จะมี $n \in I^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\frac{1}{n} < -\alpha \quad \text{หรือ} \quad \alpha < -\frac{1}{n}$$

เนื่องจาก $-\frac{1}{n} \in A$ ดังนั้น α ไม่เป็นขอบเขตบนของ A ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดไว้

เพราะฉะนั้น $0 \leq \alpha$

ดังนั้น 0 เป็น ขอบเขตบนค่าน้อยสุด ของ A ●

ตัวอย่าง 3.1.5 : ให้ $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ แล้ว B ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

พิสูจน์ : สมมติให้ $\lambda = \sup B$ ดังนั้น $\lambda > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมี $n \in I^+$ ซึ่งทำให้ $n > \lambda$ แต่ $n \in B$ และ λ เป็นขอบเขตบนของ B ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น B ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด ●

ทฤษฎีบท 3.1.6 : ถ้า λ เป็นขอบเขตบนของ A และ $\lambda \in A$ แล้ว $\sup A = \lambda$

พิสูจน์ : ให้ u เป็นขอบเขตบนของ A ต้องการแสดงว่า $\lambda \leq u$

ถ้า $\lambda > u$ ดังนั้น u ไม่เป็นขอบเขตบนของ A ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\lambda \leq u$ ■

ตัวอย่าง 3.1.7 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด(ถ้ามี)ของเซตต่อไปนี้

(1) $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \middle| n \in I^+\right\}$

(2) $B = \left\{\frac{n-1}{n} \middle| n \in I^+\right\}$

วิธีทำ : (1) เราจะแสดงว่า $\sup A = \frac{1}{2}$

ให้ $A_1 = \left\{ \frac{1}{2n} \middle| n \in I^+ \right\}$ $\quad A_2 = \left\{ \frac{-1}{2n-1} \middle| n \in I^+ \right\}$

จะได้ว่า $A = A_1 \cup A_2$

ให้ $x \in A_1$ และ $y \in A_2$ แล้วจะได้ว่า $x > y$

ดังนั้น ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A คือ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A_1

โดยทฤษฎีบท 3.1.6 ได้ว่า ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A_1 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A คือ $\frac{1}{2}$

(2) $B = \left\{ \frac{n-1}{n} \middle| n \in I^+ \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \middle| n \in I^+ \right\}$

เราจะแสดงว่า $\sup B = 1$

เห็นได้ชัดว่า 1 เป็นขอบเขตบนของ B

ให้ α เป็น ขอบเขตบนของ B

สมมติ $\alpha < 1$ ดังนั้น $1-\alpha > 0$

โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมี $n \in I^+$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < 1-\alpha$ ดังนั้น $\alpha < 1-\frac{1}{n}$

แต่ $1-\frac{1}{n} \in B$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นขอบเขตบนของ α

เพราะฉะนั้น $\alpha \geq 1$ นั่นคือ 1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ B ●

ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบท 3.1.8 ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต

ทฤษฎีบท 3.1.8 : λ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\lambda \geq \alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$ (นั่นคือ λ เป็นขอบเขตบนของ S)

(2) สำหรับทุกจำนวนจริง $\beta < \lambda$ จะมีจำนวนจริง $\alpha \in S$ ซึ่งทำให้ $\beta < \alpha$ (นั่นคือ β ไม่เป็นขอบเขตบนของ S)

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ λ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

เห็นได้ชัดว่า (1) เป็นจริง ในการพิสูจน์ (2) ให้ $\beta < \lambda$

ถ้า β เป็นขอบเขตบนของ S แล้วโดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า $\lambda \le \beta$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น β ไม่เป็นขอบเขตบนของ S นั่นคือมี $\alpha \in S$ ซึ่ง $\beta < \alpha$ เพราะฉะนั้น (2) เป็นจริง

($\leftarrow$) กำหนดให้ (1) และ (2) เป็นจริง

เราจะแสดงว่า λ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

จาก (1) เราสรุปได้ว่า λ เป็นขอบเขตบนของ S

ให้ β เป็นขอบเขตบนของ S สมมติ $\beta < \lambda$ (ต้องการแสดงว่า $\beta \ge \lambda$)

ดังนั้น โดย (2) จะมี $\alpha \in S$ ซึ่งทำให้ $\beta < \alpha$

เพราะฉะนั้น β ไม่เป็น ขอบเขตบนของ S ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\beta \ge \lambda$

เพราะฉะนั้น λ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S ■

ทฤษฎีบท 3.1.9 : ให้ $\lambda_1 = \sup T$, $\lambda_2 = \sup V$ ถ้า $S = \{t+v \mid t \in T, v \in V\}$ แล้วได้ว่า

(1) $\lambda_1+\lambda_2$ เป็นขอบเขตบนของ S

(2) ทุกจำนวน γ ซึ่ง $\gamma < \lambda_1+\lambda_2$ จะไม่เป็นขอบเขตบนของ S

พิสูจน์ : (1) ให้ $x \in S$ ดังนั้นมี $t \in T$ และ $v \in V$ ซึ่ง $x = t+v$

เพราะว่า $\lambda_1 = \sup T$ และ $\lambda_2 = \sup V$ ดังนั้น $t \le \lambda_1$ และ $v \le \lambda_2$

เพราะฉะนั้น $x = t+v \le \lambda_1+\lambda_2$ นั่นคือ $\lambda_1+\lambda_2$ เป็นขอบเขตบนของ S

(2) ให้ γ เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $\gamma < \lambda_1+\lambda_2$

ต้องการแสดงว่า γ ไม่เป็นขอบเขตบนของ S

ให้ $d = \lambda_1+\lambda_2-\gamma$ แล้ว $\dfrac{d}{2} = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2-\gamma}{2} > 0$, $\lambda_1 - \dfrac{d}{2} < \lambda_1$

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (2) จะได้ว่า มี $t' \in T$ ซึ่ง $t' > \lambda_1 - \dfrac{d}{2}$

ในทำนองเดียวกัน มี $v' \in V$ ซึ่ง $v' > \lambda_2 - \dfrac{d}{2}$

แล้วจะได้ว่า
$$t'+v' > \left(\lambda_1 - \frac{d}{2}\right) + \left(\lambda_2 - \frac{d}{2}\right)$$
$$= \lambda_1+\lambda_2 - d = \gamma$$

เนื่องจาก $t'+v' \in S$ เพราะฉะนั้น γ ไม่เป็นขอบเขตบนของ S ■

จากทฤษฎีบท 3.1.9 เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\sup\{t+v : t \in T, v \in V\} = \sup T + \sup V$$

ทฤษฎีบท 3.1.10 : ถ้า λ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A และ $B = \{ka \mid a \in A\}$ เมื่อ $k > 0$ แล้ว $k\lambda$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ B

พิสูจน์ : (1) เราจะแสดงว่า $k\lambda$ เป็นขอบเขตบนของ B

ให้ $x \in B$ ดังนั้น จะมี $a \in A$ ซึ่ง $x = ka$

เนื่องจาก $a \le \lambda$ และ $k > 0$ ดังนั้น $x = ka \le k\lambda$

นั่นคือ $k\lambda$ เป็นขอบเขตบนของ B

(2) ให้ α เป็น ขอบเขตบนของ B เราจะแสดงว่า $\alpha \ge k\lambda$

เนื่องจาก $\alpha \ge ka$ สำหรับทุก $a \in A$ ดังนั้น $\frac{\alpha}{k} \ge a$ สำหรับทุก $a \in A$

นั่นคือ $\frac{\alpha}{k}$ เป็นขอบเขตบนของ A เพราะฉะนั้น $\lambda \le \frac{\alpha}{k}$ หรือ $\alpha \ge k\lambda$

ดังนั้น $k\lambda$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ B ■

ตัวอย่าง 3.1.11 : ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(1) ให้ $A = \{a_n \mid n \in I^+\}$, $B = \{b_n \mid n \in I^+\}$ และ $C = \{a_n + b_n \mid n \in I^+\}$ ถ้า $\lambda_1 = \sup A$ $\lambda_2 = \sup B$ แล้ว จงแสดงว่า $\lambda_1+\lambda_2$ เป็นขอบเขตบนของ C

(2) จงยกตัวอย่างซึ่งแสดงว่า $\lambda_1+\lambda_2$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ C

พิสูจน์ : (1) ให้ $x \in C$

ดังนั้น มี $n \in I^+$ ซึ่ง $x = a_n + b_n$

เนื่องจาก λ_1 เป็นขอบเขตบนของ A และ λ_2 เป็นขอบเขตบนของ B

ดังนั้น $\lambda_1+\lambda_2 \ge a_n + b_n = x$

เพราะฉะนั้น $\lambda_1+\lambda_2$ เป็นขอบเขตบนของ C

(2) ให้ $A = \left\{\frac{n-1}{n} \mid n \in I^+\right\}$ และ $B = \left\{-1+\frac{1}{n^2} \mid n \in I^+\right\}$

จะได้ว่า $\sup A = 1 = \lambda_1$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\sup B = 0$

เห็นได้ชัดเจนว่า $0 \geq -1+\frac{1}{n^2}$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ดังนั้น 0 เป็นขอบเขตบนของ B

เนื่องจาก $0 = -1+\frac{1}{1^2} \in B$ โดยทฤษฎีบท 3.1.6

สรุปได้ว่า $\sup B = 0$

พิจารณา $C = \left\{\frac{n-1}{n}+(-1)+\frac{1}{n^2} \mid n \in I^+\right\}$

$= \left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n} \mid n \in I^+\right\}$

เราจะแสดงว่า $\sup C = 0$ เห็นได้ชัดว่า 0 เป็นขอบเขตบนของ C แต่ $0 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} \in C$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.6 จะได้ว่า ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $C = 0$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.12 : ถ้า $\alpha = \sup A$ และ $\alpha \notin A$ แล้วสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ ช่วง $(\alpha - \varepsilon , \alpha)$ จะมีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์

พิสูจน์ : ให้ $\alpha = \sup A$ และ $\alpha \notin A$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดย ทฤษฎีบท 3.1.8 ข้อ (2) จะมี $x_1 \in A$ ซึ่ง $\alpha - \varepsilon < x_1$

แต่ $x_1 \leq \alpha$ และ $\alpha \notin A$ เพราะฉะนั้น $x_1 < \alpha$

นั่นคือ $x_1 \in (\alpha - \varepsilon , \alpha)$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก x_1 ไม่เป็นขอบเขตบนของ S

ดังนั้น มี $x_2 \in A$ ซึ่ง $x_2 \in (x_1,\alpha)$

โดยกระบวนการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เรามี

$x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} \in (\alpha - \varepsilon , \alpha)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_{n-1}$

และจะมี $x_n \in (x_{n-1} , \alpha)$

เพราะฉะนั้น ในช่วง $(\alpha - \varepsilon , \alpha)$ มีสมาชิกของ A เป็นจำนวนอนันต์ ■

บทนิยาม 3.1.13 : ให้ A เป็นเซตใดๆ ถ้ามีจำนวนจริง c ซึ่ง $c \leq x$ สำหรับทุก x ที่เป็นสมาชิกของ A แล้ว เรียก c ว่า **ขอบเขตล่าง(lower bound)** ของ A

บทนิยาม 3.1.14 : ให้ A เป็นเซตใดๆ แล้ว จำนวน β เรียกว่า **ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound หรือ infimum)** ของ A ถ้า β สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) β เป็นขอบเขตล่างของ A และ

(2) ถ้า l เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $l \leq \beta$

เราใช้สัญลักษณ์ g.l.b. A หรือ $\inf A$ แทน ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A

เรากล่าวว่า A เป็น**เซตมีขอบเขต(bounded set)** ถ้า A มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ในกรณีที่ A เป็นเซตที่มีขอบเขต A จะมีทั้งขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุด ตามสัจพจน์ของความบริบูรณ์ ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Axiom of Completeness) : สำหรับทุกเซตของจำนวนจริง A ที่ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตที่มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

สำหรับทุกเซตของจำนวนจริง A ที่ไม่ใช่เซตว่างซึ่งเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง แล้ว A จะมีขอบเขตล่างค่ามากสุด

นอกจากนี้ ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่างค่ามากสุด และขอบเขตบนค่าน้อยสุดแล้ว $\inf A \leq \sup A$

ตัวอย่าง 3.1.15 เซต B กำหนดดังข้างล่างนี้ ไม่มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

$$B = \{-1,-2,-3,\ldots\}$$

พิสูจน์ : ในการแสดงว่า B ไม่มีขอบเขตล่างค่ามากสุด เราจะแสดงว่าทุกๆ จำนวนจริง l ไม่เป็นขอบเขตล่างของ B

กรณีที่ 1 : $l \geq 0$

เพราะฉะนั้น l ไม่เป็น ขอบเขตล่างของ B

กรณีที่ 2 : $l < 0$

ดังนั้น $-l > 0$ โดย สมบัติของอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > -l$

ดังนั้น $l \geq -n$ และ $-n \in B$ นั่นคือ l ไม่เป็นขอบเขตล่างของ B

เพราะฉะนั้น B ไม่มีขอบเขตล่างค่ามากสุด ●

ทฤษฎีบท 3.1.16 : β เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\beta \le \alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$ (นั่นคือ β เป็นขอบเขตล่างของ S)

(2) สำหรับทุกจำนวนจริง $\tau > \beta$ จะมีจำนวนจริง $\alpha \in S$ ซึ่งทำให้ $\tau > \alpha$ (นั่นคือ τ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S)

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ β เป็น ขอบเขตล่างค่ามากสุด ของ S
ให้ $\alpha \in S$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.13 จะได้ว่า $\beta \le \alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$
เพราะฉะนั้น (1) เป็นจริง
ในการแสดงว่า (2) เป็นจริง ให้ $\tau > \beta$
ถ้า τ เป็นขอบเขตล่างของ S แล้วโดยบทนิยาม 3.1.14 จะได้ว่า $\beta \ge \tau$
ดังนั้น τ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S นั่นคือ มี $\alpha \in S$ ซึ่ง $\tau > \alpha$
เพราะฉะนั้น (2) เป็นจริง

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ (1) และ (2) เป็นจริง
จากข้อ (1) จะได้ว่า β เป็นขอบเขตล่างของ S
ให้ τ เป็นขอบเขตล่างของ S ต้องการแสดงว่า $\beta \ge \tau$ สมมติ $\tau > \beta$
จากข้อ (2) จะมี $\alpha \in S$ ซึ่งทำให้ $\tau > \alpha$ ดังนั้น τ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ นั่นคือ $\beta \ge \tau$
เพราะฉะนั้น β เป็น ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S ■

ทฤษฎีบท 3.1.17 : ถ้า β เป็นขอบเขตล่างของ S และ $\beta \in S$ แล้ว $\inf S = \beta$

พิสูจน์ : ให้ l เป็นขอบเขตล่างของ S ต้องการแสดงว่า $\beta \ge l$
ถ้า $\beta < l$ ดังนั้น l ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
เพราะฉะนั้น $\beta \ge l$ ■

ตัวอย่าง 3.1.18 : จงหาขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซตต่อไปนี้

(1) $A = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$ (2) $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

พิสูจน์ : (1) เห็นได้ชัดว่า -1 เป็นขอบเขตล่างของ A และ $-1 \in A$
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.17 เราสรุปได้ว่า $\inf A = -1$

(2) เห็นได้ชัดว่า 0 เป็นขอบเขตล่างของ B

ให้ $\alpha > 0$ โดยหลักอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n} < \alpha$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.16 ข้อ (2) เราสรุปได้ว่า $\inf B = 0$ ●

ตัวอย่าง 3.1.19 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุด ของ

$$A = \left\{\frac{4+x}{x} \mid x \ge 1\right\}$$

วิธีทำ : เขียนสมาชิกของ A ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$A = \left\{\frac{4+x}{x} \mid x \ge 1\right\} = \left\{1+\frac{4}{x} \mid x \ge 1\right\}$$

เห็นได้ชัดว่า $5 = 1+\frac{4}{1} \in A$ และ 5 เป็นขอบเขตบนของ A ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.6 เราสรุปได้ว่า $\sup A = 5$

เราจะแสดงว่า $\inf A = 1$ ให้ $a \in A$ ดังนั้น $a = 1+\frac{4}{x}$ สำหรับบาง

ค่าของ $x \ge 1$ เนื่องจาก $\frac{4}{x} > 0$ ดังนั้น $1 < a$ และสรุปได้ว่า 1 เป็นขอบเขตล่างของ A สมมติ $\alpha > 1$ เป็นขอบเขตล่างของ A เลือกจำนวนจริง $x \ge 1$ ซึ่งสอดคล้อง $\frac{4}{x} < \alpha - 1$ นั่นคือ $1 < 1+\frac{4}{x} < \alpha$ เพราะฉะนั้น α ไม่เป็นขอบเขตล่างของ A

นั่นคือ ถ้า α เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $\alpha \le 1$ ●

ตัวอย่าง 3.1.20 : ให้ $A = \{x \mid a < x < b\}$

จงแสดงว่า $\sup A = a$ และ $\inf A = b$

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า $\sup A = b$

เห็นได้ชัดว่า b เป็นขอบเขตบนของ A

ให้ $\beta < b$ ต้องการแสดงว่า β ไม่เป็นขอบเขตบนของ A

ถ้า $\beta \le a$ แล้ว β ไม่เป็นขอบเขตบนของ A เนื่องจาก $x > a$ ทุก $x \in A$

ถ้า $a < \beta < b$ พิจารณา $x = \beta + \frac{(b-\beta)}{2} = \frac{b}{2}+\frac{\beta}{2} < \frac{b}{2}+\frac{b}{2} = b$

เนื่องจาก $\frac{(b-\beta)}{2} > 0$ ดังนั้น $x > \beta$

แต่ $\beta > a$ จึงสรุปได้ว่า $x > a$

นอกจากนี้ $x = \beta + \frac{(b-\beta)}{2} = \frac{b}{2} + \frac{\beta}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$

เพราะฉะนั้น $x \in A$ และ β ไม่เป็นขอบเขตบนของ A นั่นคือ $b = \sup A$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า $\inf A = a$ ●

ข้อสังเกต 3.1.21 : ให้ $B = \{x \mid a \le x \le b\}$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 3.1.16 สรุปได้ว่า $\sup B = b$ และ $\inf B = a$

ตัวอย่าง 3.1.22 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุด ของ

$$A = \{x \mid x^2 - x < 6\}$$

วิธีทำ : จาก $x^2 - x < 6$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x-3)(x+2) < 0$$

จะได้ว่า

$$-2 < x < 3$$

ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.1.20 จะได้ว่า $\sup A = 3$ และ $\inf A = -2$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.23 : ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ นิยาม $A+B$ โดย

$$A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ถ้า A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขต แล้ว

(1) $\sup(A+B) = (\sup A) + (\sup B)$

(2) $\inf(A+B) = (\inf A) + (\inf B)$

พิสูจน์ : ข้อ (1) เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1.9 เราจะพิสูจน์ (2) ดังต่อไปนี้ ให้ A, B เป็นเซตที่มีขอบเขต และ

$\beta = \inf A$, $\gamma = \sup B$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $\beta + \gamma$ เป็นขอบเขตล่างของ $A+B$

ให้ $a \in A$ และ $b \in B$ ดังนั้น $\beta \le a$ และ $\gamma \le b$ เราจึงได้ว่า

$$\beta + \gamma \le a + b$$

ดังนั้น $\beta + \gamma$ เป็นขอบเขตล่างของ $A + B$

ให้ $u > \beta + \gamma$ จะแสดงว่า u ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $A + B$

ให้ $d = u - (\beta + \gamma) > 0$

เนื่องจากว่า $\beta + \frac{d}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ A และ $\gamma + \frac{d}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ B

ดังนั้นมี $a' \in A$ และ $b' \in B$ ซึ่ง

$$a' < \beta + \frac{d}{2}$$

$$b' < \gamma + \frac{d}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$a' + b' < \beta + \frac{d}{2} + \gamma + \frac{d}{2} = \beta + \gamma + d = u$$

เพราะฉะนั้น u ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $A + B$ โดยทฤษฎีบท 3.1.16 เราสรุปได้ว่า

$$\beta + \gamma = \inf (A+B)$$ ■

ข้อสังเกต 3.1.24 : สำหรับเซต A, B ใดๆ ถ้าเรานิยาม

$$AB = \{ab \mid a \in A , b \in B\}$$

แล้วไม่จำเป็นที่

$$\sup AB = (\sup A)(\sup B) \text{ หรือ } \inf AB = (\inf A)(\inf B)$$

ดังเราจะแสดงในตัวอย่าง 3.1.25

ตัวอย่าง 3.1.25 : ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{-1, -3\}$

จงแสดงว่า $\sup AB \neq (\sup A)(\sup B)$ และ $\inf AB \neq (\inf A)(\inf B)$

วิธีทำ : จากทฤษฎีบท 3.1.6 ได้ว่า $\sup A = 3$ และ $\sup B = -1$

และจากทฤษฎีบท 3.1.17 ได้ว่า $\inf A = 1$ และ $\inf B = -3$

ดังนั้น $(\sup A)(\sup B) = 3(-1) = -3$ และ $(\inf A)(\inf B) = 1(-3) = -3$

$$AB = \{-1, -2, -3, -6, -9\}$$

จากทฤษฎีบท 3.1.6 ได้ว่า $\sup AB = -1$ และจากทฤษฎีบท 3.1.17 ได้ว่า $\inf AB = -9$

ดังนั้น $\sup AB = -1 \neq (\sup A)(\sup B) = -3$ และ

$$\inf AB = -9 \neq (\inf A)(\inf B) = -3$$ ●

ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1.3 เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.26 : ถ้า S มีขอบเขตล่างค่ามากสุด แล้ว S จะมีขอบเขตล่างค่ามากสุดเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ : ให้ λ และ β เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S

เนื่องจาก λ เป็น ขอบเขตล่างของ S ดังนั้น $\beta \geq \lambda$

และเนื่องจาก β เป็น ขอบเขตล่างของ S ดังนั้น $\lambda \geq \beta$

โดย สมบัติไตรวิภาค จะได้ว่า $\beta = \lambda$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S มีเพียงค่าเดียว ■

ทฤษฎีบท 3.1.27 : ให้ A เป็นเซตมีขอบเขต และให้ c เป็นจำนวนจริง นิยาม

$$cA = \{ca \mid a \in A\}$$

แล้วได้ว่า

(1) $\sup(cA) = c\sup A$, $\inf(cA) = c\inf A$ ถ้า $c > 0$

(2) $\sup(cA) = c\inf A$, $\inf(cA) = c\sup A$ ถ้า $c < 0$

พิสูจน์ : ให้ A เป็นเซตมีขอบเขต

(1) ให้ $c > 0$ และ $\alpha = \sup A$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $c\alpha$ เป็นขอบเขตบนของ cA

ให้ $x \in cA$ ดังนั้น $x = ca$ สำหรับบางค่าของ $a \in A$

เพราะฉะนั้น $a \leq \alpha$ และ $ca < c\alpha$ นั่นคือ $c\alpha$ เป็นขอบเขตบนของ ca

ต่อไปเราให้ β เป็นขอบเขตบนของ cA เราจะแสดงว่า $\beta \geq c\alpha$

สมมติ $\beta < c\alpha$ ดังนั้น $\frac{\beta}{c} < \alpha$

เพราะฉะนั้น $\frac{\beta}{c}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A

นั่นคือ มี $a \in A$ ซึ่ง $a > \frac{\beta}{c}$ หรือ $ca > \beta$

เพราะฉะนั้น β ไม่เป็นขอบเขตบนของ cA ซึ่งขัดแย้งกับที่ข้อกำหนดไว้

ดังนั้น $\beta \geq c\alpha$

สำหรับการพิสูจน์ $\inf(cA) = c\inf A$ เป็นทำนองเดียวกัน

(2)ให้ $\alpha = \sup A$, $\beta = \inf A$ และ $c < 0$

จะแสดงว่า $c\alpha = \inf(cA)$ ให้ $x \in cA$ ดังนั้น $x = ca$ สำหรับบาง $a \in A$

เนื่องจาก $\alpha \geq a$ และ $c < 0$ ดังนั้น $c\alpha \leq ca$ ซึ่งสรุปได้ว่า

$c\alpha$ เป็นขอบเขตล่างของ cA

ให้ $\gamma > c\alpha$ จะแสดงว่า γ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ ca เนื่องจาก $\frac{\gamma}{c} < \alpha$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.8 จะมี $a_1 \in A$ ซึ่ง $\frac{\gamma}{c} < a_1$ หรือ $\gamma > ca_1$

เพราะฉะนั้น γ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ cA

โดยทฤษฎีบท 3.1.16 สรุปได้ว่า $c\alpha = \inf(cA)$

สำหรับการพิสูจน์ $\sup(cA) = c \inf A$ เป็นทำนองเดียวกัน ■

3.2 บทนิยามของรีมันน์อินทิกรัล (Definition of the Riemann Integral)

บทนิยาม 3.2.1 : กำหนดให้ $[a,b]$ เป็นช่วงปิด และ n เป็นจำนวนเต็มบวก **พาร์ทิชัน (partition)** ของ $[a,b]$ คือ เซต $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของจำนวนจริง ซึ่ง

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

บทนิยาม 3.2.2 : กำหนดให้ $f : A \to R$ เรากล่าวว่า **f มีขอบเขต (bounded)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่งสอดคล้องว่า $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in A$

บทนิยาม 3.2.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และให้

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ให้

$$m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

เรานิยาม**ผลบวกล่าง (lower sum)** ของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $L(P,f)$ ดังนี้

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

และนิยาม**ผลบวกบน (upper sum)** ของ f เทียบกับพาร์ทิชัน P ซึ่งเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $U(P,f)$ ดังนี้

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

เห็นได้จากบทนิยามว่า $L(P,f) \le U(P,f)$

บทนิยาม 3.2.4 : ให้ P และ Q เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ เราเรียก Q ว่าเป็น **รีไฟน์เมนท์ (refinement)** ของ P ถ้า $P \subset Q$ (และกล่าวว่า Q **ละเอียดกว่า P (finer than P)**)

ทฤษฎีบท 3.2.5 : ถ้า Q เป็นพาร์ทิชันซึ่งละเอียดกว่า P แล้ว

$$L(P,f) \le L(Q,f) \le U(Q,f) \le U(P,f)$$

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า $L(P,f) \le L(Q,f)$

เริ่มต้นจะพิจารณากรณีที่ Q มีสมาชิก y เพียงสมาชิกเดียวที่ไม่อยู่ใน P

กล่าวคือ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ และ $Q = \{x_0, \dots, x_{x-1}, y, x_k, \dots, x_n\}$

ให้ $m' = \inf\{f(x) | x_{k-1} \le x \le y\}$

$m'' = \inf\{f(x) | y \le x \le x_k\}$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ให้

$m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$

เนื่องจาก $\{f(x) | x_{k-1} \le x \le y\}$ และ $\{f(x) | y \le x \le x_k\}$ เป็นสับเซตของ $\{f(x) | x_{k-1} \le x \le x_k\}$

ดังนั้น

$$m_k \le m' , \quad m_k \le m''$$

และเราสรุปได้ว่า

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(y - x_{k-1}) + m_k(x_k - y) \le m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y) + \\ &\quad \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= L(Q,f) \end{aligned}$$

ในการพิจารณากรณีทั่วไป ถ้า $Q = P \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

สำหรับ $i \in \{1,2,...,n\}$ ให้ $P_i = P_{i-1} \cup \{y_i\}$ โดยที่ $P_0 = P$
จากผลที่พิสูจน์แล้วข้างบน เราสรุปได้ว่า

$$L(P,f) = L(P_0,f) \leq L(P_1,f) \leq \ldots \leq L(P_n,f) = L(Q,f)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$U(Q,f) \leq U(P,f)$$

และขอละการพิสูจน์ ■

ทฤษฎีบท 3.2.6 : ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขตบน [a,b] และ ให้ P และ R เป็นสองพาร์ทิชันใดๆ ของ [a,b] แล้ว

$$L(P,f) \leq U(R,f)$$

พิสูจน์ : ให้ $Q = P \cup R$
เพราะฉะนั้น Q ละเอียดกว่า P และ Q ละเอียดกว่า R โดยทฤษฎีบท 3.2.5 ได้ว่า

$$L(P,f) \leq L(Q,f) \leq U(Q,f) \leq U(R,f)$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.7 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต บน [a,b] แล้ว
$\sup\{ L(P,f) \mid P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\} \leq \inf\{ U(Q,f) \mid Q$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$

พิสูจน์ : ให้ P เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ [a,b] เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า

$$L(P,f) \leq U(Q,f)$$

สำหรับทุกพาร์ทิชัน Q ของ [a,b] นั่นคือ $L(P,f)$ เป็นขอบเขตล่างของ

$$\{ U(Q,f) \mid Q \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

เพราะฉะนั้น

$$L(P,f) \leq \inf\{ U(Q,f) \mid Q \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

เนื่องจาก P เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ [a,b] ดังนั้น

$$\inf\{ U(Q,f) \mid Q \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

เป็นขอบเขตบนของ $\{ L(P,f) \mid P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$ และเราสรุปได้ว่า
$\sup\{ L(P,f) \mid P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\} \leq \inf\{ U(Q,f) \mid Q$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$ ■

เพื่อความสะดวกเกี่ยวกับสัญลักษณ์ เราจะเขียน

$\sup_P\{L(P,f)\}$ แทน $\sup\{L(P,f) \mid P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$

และ

$\inf_P\{U(P,f)\}$ แทน $\inf\{U(P,f) \mid P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$

ทฤษฎีบท 3.2.8 : ถ้า Q_1 และ Q_2 เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ $[a,b]$ แล้ว

$$L(Q_1,f) \le \sup_P\{L(P,f)\} \le \inf_P\{U(P,f)\} \le U(Q_2,f)$$

พิสูจน์ : โดยบทนิยามของขอบเขตบน เราได้ว่า

$$L(Q_1,f) \le \sup_P\{L(P,f)\}$$

และโดยบทนิยามของขอบเขตล่าง เราได้ว่า

$$\inf_P\{U(P,f)\} \le U(Q_2,f)$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.7 จะได้ว่า $L(Q_1,f) \le \sup_P\{L(P,f)\} \le \inf_P\{U(P,f)\} \le U(Q_2,f)$ ■

บทนิยาม 3.2.9 : ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ เรากล่าวว่า f **รีมันน์อินทริเกรเบิล (Riemann integrable)** บนช่วง $[a,b]$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sup_P\{L(P,f)\} = \inf_P\{U(P,f)\}$$

เราเรียกค่าที่เท่ากันนี้ว่า **รีมันน์อินทริกรัลของ f (Riemann integral of f)** บน $[a,b]$ เขียนแทนโดยสัญลักษณ์

$$\int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad \int_a^b f(x)dx$$

เราอาจกล่าวได้อีกว่า f ซึ่งสอดคล้องบทนิยาม 3.2.9 เป็น**ฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ (integrable function)** บน $[a,b]$

ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ง่ายที่สุดฟังก์ชันหนึ่ง คือฟังก์ชันค่าคงที่

ตัวอย่าง 3.2.10 : ให้ $f(x) = c$ สำหรับทุก $c \in [a,b]$ เราจะแสดงว่า f อินทิเกรตได้บน

$[a,b]$ ดังเราจะแสดงการพิสูจน์ดังนี้

ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ $[a,b]$ เพราะว่า f มีค่าคงที่บนแต่ละช่วงย่อย เราได้ $m_i = M_i = c$ และ

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}))$$
$$= c(b-a)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

เนื่องจากผลบวกบนและผลบวกล่างเท่ากัน เราจะได้ว่า

$$\sup_P \{L(P)\} = \inf_P \{U(P)\} = c(b-a)$$

ดังนั้น f อินทิเกรตได้ และ

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

●

ตัวอย่าง 3.2.11 : พิจารณาดิริกเลต์ฟังก์ชัน D นิยามบนช่วง $[0,1]$ ดังนี้

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

เราจะแสดงว่า D ไม่เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน $[0,1]$

วิธีทำ : ให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ $[0,1]$ โดยทฤษฎีบท 2.3 และทฤษฎีบท 2.4 มีจำนวนตรรกยะ $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ และมีจำนวนอตรรกยะ $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,\dots,n\}$

ดังนั้น $m_i = D(t_i) = 0$ และ $M_i = D(y_i) = 1$ และจะได้ว่า

$$U(P,D) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = 1(1-0) = 1$$

และ

$$L(P,D) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0(1-0) = 0$$

เพราะฉะนั้น ทุกพาร์ทิชัน P เราสรุปได้ว่า

$$\sup_P \{ L(P,D) \} = 0 \qquad \inf_P \{ U(P,D) \} = 1$$

นั่นคือ ดิริกเลต์ฟังก์ชัน ไม่เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน $[0,1]$ ●

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการอินทิเกรตได้ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.2.12 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f รีมันน์อินทริเกรเบิล บนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชัน Q ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

พิสูจน์ : $(\leftarrow)$ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องว่าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชัน Q ของ $[a,b]$ ซึ่ง $U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$

สมมติ f ไม่เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ ดังนั้น

$$\sup_P \{ L(P,f) \} \neq \inf_P \{ U(P,f) \}$$

และโดยทฤษฎีบท 3.2.7 เราสรุปได้ว่า

$$\sup_P \{ L(P,f) \} < \inf_P \{ U(P,f) \}$$

ให้ $\varepsilon = \inf_P \{ U(P,f) \} - \sup_P \{ L(P,f) \}$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

โดยสิ่งที่กำหนดให้ จะมีพาร์ทิชัน Q_ε ซึ่งสอดคล้อง

$$U(Q_\varepsilon,f) - L(Q_\varepsilon,f) < \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.8 เราได้ว่า

$$L(Q_\varepsilon,f) \le \sup_P \{ L(P,f) \} < \inf_P \{ U(P,f) \} \le U(Q_\varepsilon,f)$$

และสรุปได้ว่า

$$\varepsilon = \inf_P \{ U(P,f) \} - \sup_P \{ L(P,f) \} \le U(Q_\varepsilon,f) - L(Q_\varepsilon,f) < \varepsilon$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งเพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้

$(\rightarrow)$ ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ บนช่วง $[a,b]$ และ $\int_a^b f = I$

ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการแสดงว่า มีพาร์ทิชัน P ซึ่ง $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$

โดยบทนิยาม 3.2.9 ได้ว่า

$$I = \sup_P \{ L(P,f) \} = \inf_P \{ U(P,f) \}$$

เนื่องจาก $I-\frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{L(P,f)\,|\,P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$ ดังนั้น จะมีพาร์ทิชัน R ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$I-\frac{\varepsilon}{2} < L(R,f)$$

ในทำนองเดียวกัน $I+\frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $\{U(P,f)\,|\,P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$ ดังนั้นจะมีพาร์ทิชัน Q ของ $[a,b]$ ซึ่ง $U(Q,f) < I+\frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $P = R\cup Q$ ดังนั้น

$$I-\frac{\varepsilon}{2} < L(R,f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(Q,f) < I+\frac{\varepsilon}{2}$$

และจะได้

$$U(P,f)-L(P,f) < \varepsilon$$ ■

ตัวอย่าง 3.2.13 : จงแสดงว่า $f(x) = x$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า f สอดคล้องทฤษฎีบท 3.2.12

ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

เป็นพาร์ทิชันของช่วง $[a,b]$ ซึ่งมีความกว้างของทุกช่วงย่อยเท่ากัน โดยยาวช่วงละ $x_i - x_{i-1} = \frac{(b-a)}{n}$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในแต่ละช่วงย่อย i ค่าน้อยสุดของ f เกิดขึ้นที่จุดปลายด้านซ้าย x_{i-1} และค่ามากสุดของ f เกิดขึ้นที่จุดปลายด้านขวา x_i นั่นคือ

$$M_i = f(x_i) = x_i \quad \text{และ} \quad m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
U(P,f)-L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(x_i - x_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\left(x_i - x_{i-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{n}\cdot\frac{(b-a)}{n}
\end{aligned}$$

$$= n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n}$$

โดยหลักอาร์คีมีดิส เราสามารถเลือกจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง

$$\varepsilon > \frac{(b-a)^2}{n}$$

แล้ว P จะสอดคล้องทฤษฎีบท 3.2.12 ซึ่งจะสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บนช่วง [a,b]

ในการหาค่า $\int_a^b x\,dx$ นี้เราสามารถหาค่า $\int_a^b x\,dx$ ได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของช่วง [a,b] แล้วจะได้ว่า

$$L(P,f) \le \frac{L(P,f)+U(P,f)}{2} \le U(P,f)$$

แต่

$$\begin{aligned} U(P,f)+L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i-x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2) \\ &= x_n^2 - x_0^2 \\ &= b^2 - a^2 \end{aligned}$$

และ

$$\frac{L(P,f)+U(P,f)}{2} = \frac{b^2+a^2}{2}$$

ดังนั้นสำหรับทุกพาร์ทิชัน P_n ใดๆ ของ [a,b] เราได้ว่า

$$L(P,f) \le \frac{b^2+a^2}{2} \le U(P,f)$$

หรือ

$$\sup_P\{L(P,f)\} \le \frac{b^2+a^2}{2} \le \inf_P\{U(P,f)\}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ ดังนั้น

$$\sup_P\{L(P,f)\} = \inf_P\{U(P,f)\}$$

และเราจึงสรุปได้ว่า

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2+a^2}{2}$$ ●

ต่อไปเราจะพิสูจน์ผลบางประการที่เกี่ยวข้องกับอินทิกรัล โดยอาศัยความหมายของอินทิกรัล ความหมายของขอบเขตบนค่าน้อยสุด และขอบเขตล่างค่ามากสุด

ทฤษฎีบท 3.2.14 :

(1) กำหนดให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ $m \le f(x) \le M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ แล้ว

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

(2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าไม่เป็นลบบน $[a,b]$ และ f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว $0 \le \int_a^b f$

พิสูจน์ : (1) ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ $m \le f(x) \le M$ หรับทุก $x \in [a,b]$

พิจารณา $P_1 = \{a = x_0, x_1 = b\}$ ซึ่งเป็นพาร์ทิชันหนึ่งของ $[a,b]$ และให้

$$m_1 = \inf\{f(x) \mid a \le x \le b\}$$
$$M_1 = \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}$$

ดังนั้น

$$L(P_1, f) = m_1(b-a) \quad , \quad U(P_1, f) = M_1(b-a)$$

สังเกตได้ว่า

$$m(b-a) \le m_1(b-a) \le M_1(b-a) \le M(b-a)$$

แต่

$$\int_a^b f = \sup_P \{L(P,f)\} \ge L(P_1, f) = m_1(b-a) \ge m(b-a)$$

ทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\int_a^b f = \inf_P \{U(P,f)\} \le U(P_1, f) = M_1(b-a) \le M(b-a)$$

ดังนั้น

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$ ■

(2) จากกำหนดให้จะมีค่าบวก M ซึ่งสอดคล้องว่า $0 \le f(x) \le M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ โดยข้อ (1) สรุปได้ว่า

$$0 \le \int_a^b f \le M(b-a)$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.15 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนเพิ่มขึ้นและต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$
ให้ $\varepsilon > 0$ พิจารณาพาร์ทิชัน

$$P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

ซึ่งเป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ ที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน
เนื่องจาก f ต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นบนช่วงย่อยที่ i f จะมีค่าน้อยสุดที่จุดปลายด้านซ้าย คือ x_{i-1} และ f มีค่ามากสุดที่จุดปลายด้านขวา คือ x_i ดังนั้น

$$M_i = f(x_i) \quad \text{และ} \quad m_i = f(x_{i-1})$$

เราเห็นได้ว่า

$$m_i = M_{i-1} \;,\; i = 2, 3, \ldots, n$$

$$m_1 = f(a) \qquad M_n = f(b)$$

นอกจากนี้

$$\begin{aligned} U(P_n) - L(P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\frac{(b-a)}{n} \\ &= (f(b) - f(a))\frac{(b-a)}{n} \end{aligned}$$

ถ้าเราเลือกจำนวนเต็มบวก n ซึ่งสอดคล้องว่า

$$n > \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon}$$

แล้วจะได้ว่า

$$U(P_n) - L(P_n) < \varepsilon$$

ซึ่งสรุปโดยทฤษฎีบท 3.2.12 ได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.16 : ถ้า f อินทิเกรตได้ บนช่วง [a,b] แล้วสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มีพาร์ชัน P ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$0 \le U(P,f) - \int_a^b f < \varepsilon \text{ และ } 0 \le \int_a^b f - L(P,f) < \varepsilon$$

พิสูจน์ : ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.2.12 จะมีพาร์ทิชัน $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ บน [a,b] ซึ่งสอดคล้อง

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

จากบทนิยามขอบเขตบนจะได้ว่า

$$L(Q,f) \le \sup_P \{L(P,f)\}$$

แต่

$$\int_a^b f = \sup_P \{L(P,f)\}$$

ดังนั้น

$$L(Q,f) \le \int_a^b f$$

และจะได้

$$0 \le U(Q,f) - \int_a^b f \le U(Q,f) - L(P,f)$$

นั่นคือ

$$0 \le U(Q,f) - \int_a^b f < \varepsilon$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\int_a^b f \le U(P,f)$$

และดังนั้น

$$\int_a^b f - L(P,f) \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

นั่นคือ

$$0 \le \int_a^b f - L(P,f) < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 3.2.17 : ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ บนช่วง [a,b] และ $g(x) \leq f(x)$

สำหรับทุก $x \in [a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b g \leq \int_a^b f$$

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า $\sup_P \{L(P,g)\} \leq \sup_P \{L(P,f)\}$

ให้ $\alpha = \int_a^b f$ เพราะฉะนั้น

$\alpha \geq L(P,f)$ สำหรับทุกพาร์ทิชัน P ของ [a,b]

เนื่องจาก $g(x) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ดังนั้น

$$\alpha \geq L(P,f) \geq L(P,g)$$

สำหรับทุกพาร์ทิชัน P ของ [a,b]

นั่นคือ α เป็นขอบเขตบนของ

$\{L(P,g) : P$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]\}$

ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$\alpha \geq \sup_P \{L(P,g)\}$$

แต่

$$\alpha = \sup_P \{L(P,f)\}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sup_P \{L(P,f)\} \geq \sup_P \{L(P,g)\}$$

ซึ่งสรุปได้ว่า

$$\int_a^b g \leq \int_a^b f$$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.18 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ บนช่วง [a,b] ถ้ามีจำนวนจริง J ซึ่งสอดคล้อง

$$L(P,f) \leq J \leq U(P,f)$$

สำหรับทุกพาร์ทิชัน P ของ [a,b] แล้วได้ว่า

$$\int_a^b f = J$$

พิสูจน์ : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้ บนช่วง $[a,b]$ และให้ J เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้อง

$$L(P,f) \leq J \leq U(P,f)$$

สำหรับทุกพาร์ทิชัน P ของ $[a,b]$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $\int_a^b f \leq J$ เนื่องจาก J เป็นขอบเขตบนของ

$$\{L(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

แต่ $\int_a^b f$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด ของ

$$\{L(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f \leq J$$

ต่อไปจะแสดงว่า $J \leq \int_a^b f$ เนื่องจาก J เป็นขอบเขตล่างของ

$$\{U(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

และ $\int_a^b f$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด ของ

$$\{U(P,f) \mid P \text{ เป็นพาร์ทิชันของ } [a,b]\}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f \geq J$$

เพราะฉะนั้น

$$J = \int_a^b f \qquad \blacksquare$$

บทที่ 4
สมบัติของอินทิกรัล
(Properties of the Integral)

4.1 เงื่อนไขของการอินทิเกรตได้ (Integrability Conditions)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติบางประการของ f ซึ่งจะทำให้ f อินทิเกรตได้ สมบัติเหล่านี้ คือ ความต่อเนื่องและการเป็นฟังก์ชันโมโนโทน

ทฤษฎีบท 4.1.1 : ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เราจะแสดงว่ามีพาร์ทิชัน P ซึ่งสอดคล้อง

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

ให้ $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[a,b]$ ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้อง

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon'$$

สำหรับทุก x, y ใน $[a,b]$ ซึ่ง $|x-y| < \delta$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ ซึ่งแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ มีความยาวน้อยกว่า δ

ดังนั้นสำหรับแต่ละ x และ y ใน $[x_{i-1}, x_i]$ เราได้ว่า $|f(x)-f(y)| < \varepsilon'$

สำหรับทุก $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ให้

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} < x < x_i\}$$

และเราสรุปได้โดยทฤษฎีบท 2.13 ว่า $M_i = f(x)$ และ $m_i = f(y)$ สำหรับบางค่าของ x,y ใน $[x_{i-1}, x_i]$ ดังนั้น

$$M_i - m_i < \varepsilon'$$

เพราะฉะนั้น

$$U(P,f)-L(P,f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$< \varepsilon'\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 4.1.2 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลงบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่า f มีขอบเขต เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

ดังนั้น $f([a,b])$ มีขอบเขตล่างและขอบเขตบน

พิจารณา พาร์ทิชัน $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ $[a,b]$ ที่มีความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน ซึ่งกว้างช่วงละ $\frac{b-a}{n}$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง ดังนั้น บนแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ f จะมีค่าน้อยสุดที่ x_{i-1} และมีค่ามากสุดที่ x_i ดังนั้น

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad M_i = f(x_i)$$

และได้ว่า

$$\begin{aligned} U(P_n,f) - L(P_n,f) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \\ &= \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.2 สามารถเลือก n ให้มีขนาดใหญ่เพียงพอซึ่งสอดคล้อง

$$n > \frac{b-a}{\varepsilon}\big(f(b) - f(a)\big)$$

ดังนั้น

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) < \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.13 สรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ $\blacksquare$

ทฤษฎีบท 4.1.3 : ถ้า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้นบนช่วง [a,b] แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b]

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่า f มีขอบเขต เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่เพิ่มขึ้น สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b)$$

ดังนั้น f มีขอบเขตล่าง คือ f(b) บนช่วง [a,b]

พิจารณา พาร์ทิชัน $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ [a,b] ที่มีความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน ซึ่งกว้างช่วงละ $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ f จะมีค่าน้อยสุดที่ x_i และค่ามากสุดที่ x_{i-1} ดังนั้น

$$m_i = f(x_i) \quad , \quad M_i = f(x_{i-1})$$

และได้ว่า

$$\begin{aligned} U(P_n,f) - L(P_n,f) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)) \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 2.2 สามารถเลือก n ให้มีขนาดใหญ่เพียงพอซึ่งสอดคล้อง

$$n > \frac{b-a}{\varepsilon}(f(a) - f(b))$$

ดังนั้น

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) < \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.13 เราสรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้บน [a,b] ■

ตัวอย่าง 4.1.4 : พิจารณาฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง [0 , 1] ดังนี้

$n \in I^+$ ให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x = 0 \\ \dfrac{1}{n} \ , & \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

สังเกตว่า f มีจำนวนจุดซึ่งไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งปรากฏที่จุด $\dfrac{1}{n}$

(เมื่อ $n > 1$) เราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันโมโนโทนไม่ลดลง

ให้ $x, y \in [0,1]$ และ $x < y$

กรณีที่ 1 : $x = 0$, $y = 1$ ดังนั้น $f(x) = 0 < 1 = f(y)$

กรณีที่ 2 : $x \in (0,1)$, $y = 1$ เนื่องจากค่าสูงสุดของ f คือ 1 ดังนั้น $f(x) \le 1 = f(y)$

กรณีที่ 3 : $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ ดังนั้น มี $n \in I^+$ ซึ่ง

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$$

ถ้า $y \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$ แล้ว $f(x) = \frac{1}{n} = f(y)$

ถ้า $y \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]$ แล้ว เราสรุปได้ว่ามี $n' \in I^+$ ซึ่ง $n' < n$ และ

$$\frac{1}{n'+1} < y \le \frac{1}{n'}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1}{n} < \frac{1}{n'} = f(y)$$

โดยทฤษฎีบท 4.1.2 เราสรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้บน [0,1] ●

4.2 สมบัติการบวกและสมบัติเชิงเส้นของอินทิกรัล (The Additivity and Linearity of the Integral)

พิจารณาฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง [0,2] ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & 0 \le x \le 1 \\ 1.5\text{-}x , & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

เห็นได้ว่า $g(x) = x^2$ นิยามบนช่วง [0,1] เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ และ $h(x) = 1.5 - x$ นิยามบนช่วง [1,2] เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้เช่นกัน ดังนั้นเราคาดว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [0,2] ทฤษฎีบทต่อไปนี้ (สมบัติการบวกของอินทิกรัล) และทฤษฎีบท 4.1.3 ทำให้เราสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน [0,2]

ทฤษฎีบท 4.2.2 : (สมบัติการบวกของอินทิกรัล) ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] และ [b,c] แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง[a,c] และกลับกัน ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,c] และ $a < b < c$ แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] และ [b,c] และ

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] และ [b,c] และ ให้

$$P_1 = \{a = x_0, \ldots, x_k = b\}$$
$$P_2 = \{b = x_k, \ldots, x_n = c\}$$

เป็นพาร์ทิชันของ [a,b] และ [b,c] ตามลำดับ พิจารณา

$$P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$

แล้ว P เป็นพาร์ทิชันของ [a,c] สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_i - 1 \le x \le x_i\}$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L(P, [a,c]) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= L(P_1, [a,b]) + L(P_2, [b,c]) \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$L(P, [a,c]) \le \sup_Q \{L(Q,[a,c])\}$$

เพราะฉะนั้น

$$L(P_1, [a,b]) + L(P_2, [b,c]) \le \sup_Q \{L(Q,[a,c])\}$$

ดังนั้น

$\sup_Q \{L(Q,[a,c])\}$ เป็นขอบเขตบนของเซตของผลบวกในรูป

$$L(P_1, [a,b]) + L(P_2, [b,c])$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.23 เราสรุปได้ว่า

$$\sup_P \{L(P,[a,b])\} + \sup_P \{L(P,[b,c])\} \le \sup_Q \{L(Q,[a,c])\}$$

หรือ

$$\int_a^b f + \int_b^c f \quad \leq \quad \sup_Q\left\{L\left(Q,[a,c]\right)\right\}$$

(4.2.2.1)

ในทำนองเดียวกันสำหรับผลบวกบน เราจะได้ว่า

$$\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \quad \leq \quad \int_a^b f + \int_b^c f$$

ดังจะแสดงรายละเอียดดังนี้ สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P, [a,c]) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= U(P_1, [a,b]) + U(P_2, [b,c]) \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \quad \leq \quad U(P, [a,c])$$

เพราะฉะนั้น

$$\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \quad \leq \quad U(P_1, [a,b]) + U(P_2, [b,c])$$

ดังนั้น $\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\}$ เป็นขอบเขตล่างของเซตของผลบวกทั้งหมดในรูป

$$U(P_1, [a,b]) + U(P_2, [b,c])$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.23 เราสรุปได้ว่า

$$\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \leq \inf_{P_1}\left\{U\left(p_1,[a,b]\right)\right\} + \inf_{P_2}\left\{U\left(p_2,[b,c]\right)\right\}$$

หรือ

$$\inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \quad \leq \quad \int_a^b f + \int_b^c f \qquad (4.2.2.2)$$

จากอสมการ (4.2.2.1) และอสมการ (4.2.2.2) จะได้ว่า

$$\int_a^b f + \int_b^c f \leq \sup_Q\left\{L\left(Q,[a,c]\right)\right\} \leq \inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\} \leq \int_a^b f + \int_b^c f$$

ดังนั้น

$$\sup_Q\left\{L\left(Q,[a,c]\right)\right\} = \inf_Q\left\{U\left(Q,[a,c]\right)\right\}$$

ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้บน [a,c] และ $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

($\leftarrow$) กำหนดให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง [a,c] ให้ $\varepsilon > 0$

โดยทฤษฎีบท 3.2.12 มีพาร์ทิชัน P ของ [a,c] ซึ่งสอดคล้องว่า

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

ให้ $Q = P \cup \{b\}$ แล้ว Q เป็นรีไฟน์เมนท์ของ P

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 ได้ว่า

$$L(P,f) \le L(Q,f) \le U(Q,f) \le U(P,f)$$

ดังนั้น

$$0 \le U(Q,f) - L(Q,f) \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

พิจารณา $Q_1 = \{x_0, \ldots, x_k = b\}$

ซึ่งเป็นพาร์ทิชันของ [a,b]

และ

$$Q_2 = \{x_k, \ldots, x_n\}$$

ซึ่งเป็นพาร์ทิชันของ [b,c] และ $Q = Q_1 \cup Q_2$

สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

และได้ว่า

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\begin{aligned} L(Q_1,[a,b]) + L(Q_2,[b,c]) &= \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= L(Q,[a,c]) \qquad (4.2.2.3) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} U(Q_1,[a,b]) + U(Q_2,[b,c]) &= \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i + \sum_{i=k}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= U(Q,[a,c]) \qquad (4.2.2.4) \end{aligned}$$

นำ (4.2.2.3) – (4.2.2.4) จะได้

$$(U(Q_1,[a,b]) - L(Q_1,[a,b])) + (U(Q_2,[b,c]) - L(Q_2,[b,c])) = U(Q,[a,c]) - L(Q,[a,c])$$

เนื่องจาก $U(Q,[a,c]) - L(Q,[a,c]) < \varepsilon$ ดังนั้น

$$(U(Q_1,[a,b]) - L(Q_1,[a,b])) + (U(Q_2,[b,c]) - L(Q_2,[b,c])) < \varepsilon$$

เนื่องจาก $U(Q_2,[b,c]) - L(Q_2,[b,c]) \geq 0$ ดังนั้น

$$U(Q_1,[a,b]) - L(Q_1,[a,b]) < \varepsilon$$

และทำนองเดียวกัน

$$U(Q_1,[a,b]) - L(Q_1,[a,b]) \geq 0$$

ดังนั้น

$$U(Q_2,[b,c]) - L(Q_2,[b,c]) < \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.12 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[b,c]$ ■

บทนิยาม 4.2.3 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ (ซึ่ง $a<b$) แล้วเรานิยาม

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

สำหรับจำนวน a ใดๆ ในโดเมนของ f และนิยาม

$$\int_a^a f = 0$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง I และ $a, b, c \in I$ แล้ว

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

(แม้ว่า b จะไม่ได้อยู่ระหว่าง a และ c ก็ตาม)

พิสูจน์ : กรณีที่1 : $b<a<c$

โดยบทนิยาม 4.2.3 จะได้ว่า

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า

$$\int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f$$

ทำให้

$$\int_a^c f = -\int_b^a f + \int_b^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

กรณีที่2 : $a < b < c$

โดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

กรณีที่3 : $a < c < b$

โดยบทนิยาม 4.2.3 จะได้ว่า

$$\int_b^c f = -\int_c^b f$$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

ทำให้

$$\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \blacksquare$$

ทฤษฎีบท 4.2.5 : (Linearity 1) ถ้า f และ g อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] แล้ว f+g อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] และ

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เมื่อ f และ g สามารถอินทิเกรตได้
โดยทฤษฎีบท 3.2.12 มีพาร์ทิชัน Q และ R ของช่วง [a,b] ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

และ

$$U(R,g) - L(R,g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้

$$P = Q \cup R$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.5 จะได้ว่า

$$U(P,f) - L(P,f) \le U(Q,f) - L(Q,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

และ

$$U(P,g) - L(P,g) \le U(R,g) - L(R,g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า

$$(U(P,f) + U(P,g)) - (L(P,f) + L(P,g)) < \varepsilon \qquad (4.2.5.1)$$

ต่อไปจะเปรียบเทียบ

$$U(P, f+g) \quad \text{กับ} \quad U(P,f) + U(P,g)$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$M_i = \sup \{(f+g)(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$M_i^f = \sup \{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$M_i^g = \sup \{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

ดังนั้น สำหรับ x ใด ๆ ใน $[x_{i-1}, x_i]$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \le M_i^f + M_i^g \qquad (4.2.5.2)$$

นั่นคือ $M_i^f + M_i^g$ เป็นขอบเขตบน $(f+g)([x_{i-1}, x_i])$ ดังนั้น

$$M_i \le M_i^f + M_i^g \qquad (4.2.5.3)$$

คูณแต่ละเทอมใน (4.2.5.3) ด้วย $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และหาผลบวก ซึ่งจะได้

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^f + M_i^g\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i^f \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} M_i^g \Delta x_i$$

และเราสรุปได้ว่า

$$U(P, f+g) \le U(P,f) + U(P,g) \qquad (4.2.5.4)$$

ในทำนองเดียวกันเราได้ว่า

$$L(P,f) + L(P,g) \le L(P, f+g)$$

จาก (4.2.5.4) และ (4.2.5.2) เราได้ว่า

$$U(P, f+g) - L(P, f+g) \le (U(P,f) + U(P,g)) - (L(P,f) + L(P,g))$$

และจาก (4.2.5.1) ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$U(P, f+g) - L(P, f+g) \le (U(P,f) + U(P,g)) - (L(P,f) + L(P,g)) < \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.12 เราสรุปได้ว่า $f+g$ อินทิเกรตได้ บนช่วง $[a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 4.2.6 : (Linearity 2) ถ้า c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว cf อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

พิสูจน์ : ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ $[a,b]$ และสำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$\overline{M_i} = \sup\{cf(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

กรณีที่ 1 : $c > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.27 จะได้ว่า

$$\overline{M_i} = cM_i$$

$$U(P,cf) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} cM_i(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = cU(P,f)$$

และ

$$\inf_P\{U(P,cf)\} = \inf_P\{cU(P,f)\} = c\inf_P\{U(P,f)\} = c\int_a^b f$$

ทำนองเดียวกัน

$$\sup_P\{L(P,cf)\} = c\int_a^b f$$

เพราะฉะนั้น cf อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

กรณีที่ 2 : $c = 0$ เราได้ว่า

$$U(P,cf) = \sum_{i=1}^{n} cM_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot M_i\Delta x_i = 0$$

$$L(P,cf) = \sum_{i=1}^{n} cm_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot m_i\Delta x_i = 0$$

ดังนั้น

$$\inf_P\{U(P,cf)\} = \inf_P\{U(P,0)\} = 0$$

และ

$$\sup_P\{L(P,cf)\} = \sup_P\{L(P,0)\} = 0$$

ทำให้เราสรุปได้ว่า $\int cf = 0 = c\int f$

กรณีที่ 3 : $c < 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.27 เราได้ว่า

$$\inf_P\{U(P,cf)\} = \inf_P\{cU(P,f)\} = c\sup_P\{L(P,f)\} = c\int_a^b f$$

และ

$$\sup_P\{L(P,cf)\} = \sup_P\{cL(P,f)\} = c\inf_P\{U(P,f)\} = c\int_a^b f$$

ทำให้สรุปได้ว่า cf อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ ■

เราทราบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการอินทิเกรตได้ แต่เรายังไม่ทราบว่าความต่อเนื่องเป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการอินทิเกรตได้หรือไม่ สามทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะแสดงว่าความต่อเนื่องไม่เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการอินทิเกรต

ทฤษฎีบท 4.2.7 : ถ้า f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นที่ a แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : ให้ f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นที่ a ดังนั้นมี M และ m ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$M = \sup\{f(x) | a \le x \le b\} \quad , \quad m = \inf\{f(x) | a \le x \le b\}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta > 0$ ซึ่ง $(M-m)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $a+\delta < b$

พิจารณาช่วง $[a, a+\delta]$ ซึ่ง f มีขอบเขต ดังนั้นมี M_1 และ m_1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของ f บน $[a, a+\delta]$ ตามลำดับ พิจารณา

$$R = \{a, a+\delta\}$$

ซึ่งเป็นพาร์ทิชันของช่วง $[a, a+\delta]$ จะได้ว่า

$$U(R,f) - L(R,f) = M_1\delta - m_1\delta = (M_1 - m_1)\delta$$

เนื่องจาก $M_1 \le M$ และ $m_1 \ge m$ ดังนั้น

$$M - m \ge M_1 - m_1$$

หรือ

$$(M_1 - m_1)\delta \le (M - m)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบนช่วง $[a+\delta, b]$ ดังนั้น f อินทิเกรตได้บน $[a+\delta, b]$ โดยทฤษฎีบท 3.2.12 จะมีพาร์ทิชัน

$$Q = \{a+\delta = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$

ของ $[a+\delta, b]$ ซึ่งสอดคล้อง

$$U(Q,f) - L(Q,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

พิจารณา

$$P = \{a = x_0, a+\delta = x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$

ซึ่งเป็นพาร์ทิชันของ $[a,b]$ การพิสูจน์ทฤษฎีบทจะสิ้นสุด ถ้าเราแสดงได้ว่า

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

สำหรับ $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ ให้

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P,f) - L(P,f) &= [M_1\delta + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})] - \\ &\quad [m_1\delta + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})] \\ &= (M_1 - m_1)\delta + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ &\quad (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= (M_1 - m_1)\delta + U(Q,f) - L(Q,f) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

ทฤษฎีบท 4.2.8 : ถ้า f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นที่ b แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

เราจะละการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.8 เนื่องจากการพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.2.7

ทฤษฎีบท 4.2.9 : ถ้า f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

พิสูจน์ : โดยทฤษฎีบท 4.2.7 ทฤษฎีบท 4.2.8 และสมบัติการบวกของอินทิกรัล ดังนั้นเพียงพอที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบท เมื่อ f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ยกเว้นที่จุด x_1, x_2 เมื่อ $x_1 \neq x_2$ สมมติ $x_1 < x_2$ เราจะพิสูจน์โดยแยกพิจารณากรณีตามค่าของ x_1, x_2

กรณีที่ 1 : $a < x_1 < x_2 < b$

ให้ $y_1 = \dfrac{a+x_1}{2}$ เป็นจุดซึ่งอยู่ระหว่าง a และ x_1 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, y_1]$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.8 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[y_1, x_1]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้ บนช่วง $[a, x_1]$ และ

ให้ $y_2 = \frac{x_2+x_1}{2}$ โดยทฤษฎีบท 4.2.7 ได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[x_1, y_2]$

และโดยทฤษฎีบท 4.2.8 ได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[y_2, x_2]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[x_1, x_2]$ และอินทิเกรตได้บนช่วง $[a, x_2]$

$$\int_{x_1}^{x_2} f = \int_{x_1}^{y_2} f + \int_{y_2}^{x_2} f$$

ให้ $y_3 = \frac{b+x_2}{2}$ ทำนองเดียวกันโดยทฤษฎีบท 4.2.7 ทฤษฎีบท 4.1.1 และทฤษฎีบท 4.2.2 เราสรุปได้ว่า f อินทิเกรตได้ บนช่วง $[x_2, b]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

กรณีที่ 2 : $a = x_1 < x_2 < b$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 : $a < x_1 < x_2 = b$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 4 : $a = x_1 < x_2 = b$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 ■

ทฤษฎีบท 4.2.10 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ g มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ และ $f = g$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว g อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

พิสูจน์ : ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ g มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $f = g$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน ให้ $F = g - f$

จะได้ว่า $F = 0$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน นั่นคือ F ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.9 จะได้ว่า F อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$

เนื่องจาก $g = F + f$ และ F, f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ว่า g อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ $\int_a^b g = \int_a^b F + \int_a^b f$

โดยทฤษฎีบท 1 ในภาคผนวก เราได้ว่า $\int_a^b F = 0$

ดังนั้น $\int_a^b f = \int_a^b g$ และการพิสูจน์สิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 4.2.11 : ถ้า f และ g อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b] แล้ว max (f,g) อินทิเกรตได้บน [a,b]

พิสูจน์ : ให้ f และ g อินทิเกรตได้บนช่วง [a,b]
ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันใดๆ ของ [a,b] สำหรับ $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ ให้ M_i^f , M_i^g , M_i เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ f , g และ max (f,g) บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ตามลำดับ ให้ m_i^f , m_i^g , m_i เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ f , g และ max (f,g) บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ตามลำดับ เนื่องจาก M_i เป็นค่ามากสุดใน $\{M_i^f , M_i^g\}$ เราจะแยกพิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้ คือ

กรณีที่ 1 : $M_i = M_i^f$ กรณีที่ 2 : $M_i = M_i^g$

ถ้า $M_i = M_i^f$ พิจารณา $h : [x_{i-1}, x_i] \to R$ นิยามโดย $h(x) = \max(f,g)(x)$ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in [x_{i-1}, x_i]$ เราสรุปได้ว่า

$$h(x) \geq f(x) \geq m_i^f$$

เพราะฉะนั้น

$$m_i \geq m_i^f$$

และดังนั้น

$$M_i - m_i \leq M_i^f - m_i^f \qquad (4.2.11-1)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า $M_i = M_i^g$ แล้วเราสรุปได้ว่า

$$M_i - m_i \leq M_i^g - m_i^g \qquad (4.2.11-2)$$

โดย (4.2.11 – 1) และ (4.2.11 – 2) จะได้ว่า

$$M_i - m_i \leq \left(M_i^f - m_i^f\right) + \left(M_i^g - m_i^g\right) \qquad (4.2.11-3)$$

นำค่าใน (4.2.11 – 1) และ (4.2.11 – 2) แทนในการหาค่าต่อไปนี้

$$\begin{aligned} U(P,\max(f,g)) - L(P,\max(f,g)) &= \sum_{i=1}^{n}\left[M_i(x_i - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1})\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left[\left(M_i^f - m_i^f\right) + \left(M_i^g - m_i^g\right)\right](x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\le U(P,f) - L(P,f) + U(P,g) - L(P,g)$$

สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชัน P_1 และ P_2 ของ $[a,b]$ ซึ่งสอดคล้อง

$$U(P_1,f) - L(P_1,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P_2,g) - L(P_2,g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ถ้าให้ $Q = P_1 \cup P_2$ แล้วโดยทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า

$$U(Q,f) - L(Q,f) \le U(P_1,f) - L(P_1,f) \qquad (4.2.11-4)$$

และ

$$U(Q,g) - L(Q,g) \le U(P_2,g) - L(P_2,g) \qquad (4.2.11-5)$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่า (4.2.11 – 4) และ (4.2.11 – 5) ใน (4.2.11 – 3) จะได้ว่า

$$U(Q,\max(f,g)) - L(Q,\max(f,g)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\max(f,g)$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และการพิสูจน์สิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 4.2.12 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ แล้ว $|f|$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

พิสูจน์ : ให้ f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ เนื่องจาก

$$|f| = \max(f,-f)$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.11 เราสรุปได้ว่า $|f|$ อินทิเกรตได้บน $[a,b]$
เนื่องจาก $f \le |f|$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.17 จะได้ว่า

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|$$ ■

4.3 ทฤษฎีบทหลักของแคลคูลัส (The Fundamental Theorems of Calculus)

ทฤษฎีบท 4.3.1 : ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ F นิยามบนช่วง $[a,b]$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

แล้ว F ต่อเนื่องบน $[a,b]$

พิสูจน์ : เนื่องจาก f มีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ดังนั้นมีจำนวนบวก M ซึ่งสำหรับทุก $t \in [a,b]$

$$-M \le f(t) \le M$$

เราจะแสดงว่า F ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบนช่วง $[a,b]$ และดังนั้นการพิสูจน์สิ้นสุด

ให้ $\varepsilon > 0$ กำหนด $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$

พิจารณา x, y ในช่วง $[a,b]$ เมื่อ $x > y$ และ $|x-y| < \delta$

ดังนั้นโดยบทนิยามของ F และทฤษฎีบท 4.2.2 เราได้ว่า

$$\int_a^y f + \int_y^x f = \int_a^x f$$

หรือ

$$\int_y^x f = \int_a^x f - \int_a^y f$$

นั่นคือ

$$\int_y^x f = F(x) - F(y)$$

เนื่องจาก $-M \le f(t) \le M$ สำหรับทุก $t \in [a,b]$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.14(1) จะได้ว่า

$$-M(x-y) \le \int_y^x f(t)\,dt \le M(x-y)$$

หรือ

$$\left|\int_y^x f(t)dt\right| \le M|x-y|$$

เพราะฉะนั้น

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \le M|x-y| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มบน $[a,b]$ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 4.3.2 : (ทฤษฎีบทหลักของแคลคูลัสบทที่ 1) ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และถ้ามีฟังก์ชัน g ซึ่ง $g' = f$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

พิสูจน์ : ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชันใดๆของ $[a,b]$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ให้

$$m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

พิจารณา

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

เนื่องจาก g มีอนุพันธ์บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ดังนั้นโดย ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย มีจุด $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ ซึ่ง

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

เพราะฉะนั้น

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

แต่

$$m_i \le f(x_i^*) \le M_i$$

ดังนั้นเราได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

นั่นคือสำหรับพาร์ทิชัน P ใดๆ เราได้ว่า

$$L(P,f) \le g(b) - g(a) \le U(P,f)$$

และ

$$\sup_P \{L(P,f)\} \le g(b) - g(a) \le \inf_P \{U(P,f)\}$$

แต่

$$\sup_P \{L(P,f)\} = \inf_P \{U(P,f)\} = \int_a^b f$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) \qquad \blacksquare$$

บทแทรก 4.3.3 : ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง [a,b] และ $f = g'$ บนช่วง [a,b] แล้ว

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

ทฤษฎีบท 4.3.4 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอินทิกรัล (The Integral Mean Value Theorem) ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง [a,b] แล้วมีจุด c ในช่วง [a,b] ซึ่ง

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

พิสูจน์ : ให้ m และ M เป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ f บนช่วง [a,b] โดยทฤษฎีบท 4.1.1 และตัวอย่าง 3.2.14 ได้ว่า

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

หรือ

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$$

แต่ f ต่อเนื่องบนช่วง [a,b] ดังนั้นโดยทฤษฎีบทค่ากลาง มีจุด $c \in [a,b]$ ซึ่ง

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 4.3.5 : (ทฤษฎีบทหลักของแคลคูลัสบทที่ 2) ให้ f ต่อเนื่องบนช่วง [a,b] และ F นิยามบนช่วง [a,b] โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

แล้วสำหรับทุก x ในช่วง [a,b] $F'(x) = f(x)$ (ถ้า $x = a$ หรือ $x = b$ แล้ว $F'(x)$ คือ
อนุพันธ์ด้านเดียว)

พิสูจน์ : ให้ $x \in (a,b)$ เราต้องการแสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ x ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า

ถ้า $0 < |t-x| < \delta$ แล้ว $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$

สำหรับค่า h ใดๆ ซึ่ง $0 < |h| < \delta$ เราได้ว่า

$$|(x+h)-x| = |h| < \delta$$

ดังนั้น

$$|f(x+h)-f(x)| < \varepsilon$$

ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่าสำหรับทุก h ซึ่ง $0 < |h| < \delta$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon$$

แล้วเราสรุปได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ เราจะเริ่มการพิสูจน์ดังนี้

สำหรับ $h > 0$ และ $|h| < \delta$ เราได้ว่า

$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f$$

$$= \int_a^{x+h} f + \int_x^a f = \int_x^{x+h} f$$

โดยการใช้ทฤษฎีบท 4.3.4 กับ f บนช่วง $[x, x+h]$ เราได้ว่ามี $c_h \in [x, x+h]$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$\int_x^{x+h} f = f(c_h)\cdot h$$

ต่อไปพิจารณา $h < 0$ และ $|h| < \delta$ เราได้ว่า

$$F(x+h)-F(x) = -\int_{x+h}^{x} f$$

และโดยการใช้ทฤษฎีบท 4.3.4 กับ f บนช่วง $[x+h, x]$ เราได้ว่ามี $c_h \in [x+h, x]$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$F(x+h)-F(x) = -\int_{x+h}^{x} f = -f(c_h)(-h) = f(c_h)\cdot h$$

เพราะฉะนั้นสำหรับทุก h ซึ่ง $0 < |h| < \delta$ เราได้ว่า $|c_h - x| < \delta$ และ

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{f(c_h)\cdot h}{h} - f(x)\right|$$

$$= |f(c_h)-f(x)| < \varepsilon$$

■

บทแทรก 4.3.6 : ถ้า f มีอนุพันธ์ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้วสำหรับทุก x ใน $[a,b]$ จะได้

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

พิสูจน์ : เนื่องจาก f' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ดังนั้นโดยบทแทรก 4.3.3 เราได้ว่า

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

หรือ

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$ ■

ทฤษฎีบท 4.3.7 : ถ้า f' ต่อเนื่อง และไม่เป็นลบ(ไม่เป็นบวก) บนช่วง I แล้ว f เป็นฟังก์ชันไม่ลดลง(ไม่เพิ่มขึ้น) บนช่วง I

พิสูจน์ : เราจะพิสูจน์เฉพาะกรณีที่ f' ต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง I ให้ a และ x อยู่ในช่วง I ซึ่ง $x > a$ ดังนั้นเมื่อ f' ไม่เป็นลบ เราสรุปได้ โดยทฤษฎีบท 3.2.14(2) ว่า

$$\int_a^x f'(t)\,dt \geq 0$$

และโดยทฤษฎีบท 4.3.6 จะได้ว่า

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq f(a)$

กรณีที่ f' ต่อเนื่องและไม่เป็นบวกบนช่วง I เราจะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับข้างบนว่า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้นบนช่วง I ■

เราจะจบการค้นคว้าอิสระฉบับนี้ โดยการนำเสนอผลบางประการที่เกี่ยวข้องกับอินทิกรัล ซึ่งเป็นบทพิสูจน์ของผู้ศึกษาเอง

ตัวอย่าง 4.3.8 : จงแสดงว่า สำหรับทุกจำนวนจริง x , $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|$

พิสูจน์ : เราจะหาค่าของ $\int_0^x |t|\,dt$ โดยแยกพิจารณาตามค่าของ x

กรณีที่1 : $x > 0$ ในกรณีนี้เราได้ว่า

$$\int_0^x |t|\,dt = \int_0^x t\,dt$$

และโดยการใช้ $g(t) = \frac{1}{2}t^2$ ในทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้ว่า

$$\int_0^x t\,dt = g(x) - g(0) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x|$$

กรณีที่2 : $x < 0$ ในกรณีนี้เราได้ว่า

$$\int_0^x |t|\,dt = -\int_x^0 |t|\,dt = \int_x^0 t\,dt$$

โดยการใช้ $g(t) = \frac{1}{2}t^2$ ในทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้ว่า

$$\int_0^x |t|\,dt = g(0) - g(x) = -\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x| \qquad \bullet$$

ตัวอย่าง 4.3.9 : (1) จงหา $f(2)$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง x และ $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$

(2) ถ้า $F(x) = \int_0^x t\sqrt{t+1}\,dt$ แล้วจงหา $F'(3)$

วิธีทำ : (1) สำหรับทุกจำนวนจริง x ให้

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$$

โดยทฤษฎีบท 4.3.5 ได้ว่า

$$3x^2+2x = F'(x) = f(x)$$

ดังนั้น

$$f(2) = 3(2)^2+2(2) = 12 + 4 = 16$$

(2) โดยทฤษฎีบท 4.3.5 ได้ว่า

$$F'(x) = f(x)$$

ดังนั้น

$$F'(x) = \left(x\sqrt{x+1}\right)$$

และ

$$F'(3) = 3\sqrt{3+1} = 6 \qquad \bullet$$

ทฤษฎีบท 4.3.10 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน [a,b] โดยที่ f' และ g' ต่อเนื่องบน [a,b]

(1) จงพิสูจน์ว่าอนุพันธ์(เทียบกับ x) ของ $\int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ มีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของ

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$$

(2) จงแสดงว่า $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$

พิสูจน์ : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน [a,b] โดยที่ f' และ g' ต่อเนื่องบน [a,b]

(1) เนื่องจาก f และ g มีอนุพันธ์บน [a,b] ดังนั้น f และ g ต่อเนื่องบน [a,b] และเนื่องจาก f' และ g' ต่อเนื่องบน [a,b] ดังนั้น fg' อินทิเกรตได้บน [a,b] นิยามฟังก์ชัน G บน [a,b] ดังนี้

$$G(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$$

โดยทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้ว่า

$$G'(x) = f(x)g'(x) \quad \text{เมื่อ } x \in [a,b]$$

พิจารณาค่าของ $\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt\right]$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x) - f(a)g(a)\right] - \frac{d}{dx}\int_a^x f'(t)g(t)dt \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) - f'(x)g(x) \\
&= f(x)g'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)g'(t)dt
\end{aligned}$$

(2) สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ให้

$$H(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt$$

โดย (1) เราได้ว่า

$$H'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)g'(t)dt$$

และโดยทฤษฎีบท 4.3.5 เราสรุปได้ว่า

$$H'(x) = f(x)g'(x)$$

นอกจากนี้โดยทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g'(t)dt &= H(b) - H(a) \\
&= \left[f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \right] - \\
&\quad \left[f(a)g(a) - f(a)g(a) - \int_a^a f'(t)g(t)dt \right] \\
&= \left[f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \right] + \\
&\quad \int_a^a f'(t)g(t)dt \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt + 0 \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

ผลของทฤษฎีบท 4.3.10(2) เราสรุปเป็นวิธีการอินทิเกรตแบบแยกส่วน ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.3.11 : การอินทิเกรตโดยวิธีแยกส่วน

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b fg'$ และ $\int_a^b gf'$ อินทิเกรตได้ และ

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b gf'$$

ทฤษฎีบท 4.3.12 : กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน นิยามบน $[a,b]$ แล้วได้ว่า

(1) ถ้า f ต่อเนื่องบน [a,b] แล้ว $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$

(2) ถ้า f ต่อเนื่อง และ g มีอนุพันธ์แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x)$$

(3) ถ้า f ต่อเนื่อง g และ h มีอนุพันธ์แล้ว จงหา

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$$

พิสูจน์ : (1) ให้ f ต่อเนื่องบน [a,b] โดยทฤษฎีบท 4.1.1 จะมีจำนวนจริง k ซึ่ง $\int_a^b f(x)\,dx = k$

นิยามฟังก์ชัน F และ G บน [a,b] ดังนี้

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

เห็นได้ชัดว่าสำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ เราได้ว่า

$$F(x) + G(x) = k$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x) = 0$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}G(x) = -\frac{d}{dx}F(x) = -\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = -f(x)$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$$

(2) สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ให้ $y = g(x)$ และ

$$G(y) = \int_a^y f(t)dt$$

โดยทฤษฎีบทหลักของแคลคูลัสบทที่ 2 ได้ว่า

$$G'(y) = f(y) = f(g(x))$$

ดังนั้นโดยกฎลูกโซ่เราได้ ว่า

$$\frac{d}{dx}(G(y)) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = f(g(x))g'(x)$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x)$$

(3) โดยทฤษฎีบท 4.2.4 จะได้ว่า

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{g(x)} f(t)dt$$

$$= -\int_{a}^{h(x)} f(t)\,dt + \int_{a}^{g(x)} f(t)dt$$

โดย (2) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_{a}^{h(x)} f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{g(x)} f(t)dt$$

$$= -f(h(x))h'(x) + f(g(x))g'(x)$$

■

ทฤษฎีบท 4.3.13 : การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ให้ u เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน $[a,b]$ และ u' อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ให้ f ต่อเนื่องบนเรนจ์ของ u ถ้า $u(a) = c$ และ $u(b) = d$ แล้ว

$$\int_{a}^{b} f\big(u(x)\big)u'(x)dx = \int_{c}^{d} f(x)dx$$

พิสูจน์ : ให้ u มีอนุพันธ์บน $[a,b]$

ดังนั้น u ต่อเนื่องบน $[a,b]$

สำหรับ $x \in u([a,b])$ นิยาม F โดย

$$F(x) = \int_{u(a)}^{x} f \qquad 4.3.13.1$$

โดยทฤษฎีบท 4.3.5 ได้ว่า

$$F'(x) = f(x)$$

เนื่องจาก u' ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(u(x))u'(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ

$$(F\circ u)'(x) = F'\big(u(x)\big)u'(x) = f\big(u(x)\big)u'(x)$$

ดังนั้น $F\circ u$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f\big(u(x)\big)u'(x)$ บน $[a,b]$

โดยทฤษฎีบท 4.3.2 จะได้ว่า

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a))$$
$$= F(d) - F(c)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสรุปได้โดยทฤษฎีบท 4.3.2 ว่า

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

บรรณานุกรม

[1] วารี เกรอต. **แคลคูลัส**. สำนักพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2539.

[2] อรวรรณ กลั่นบุศย์. **ฟังก์ชันต่อเนื่องและผลที่ตามมา**. การค้นคว้าอิสระ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2551.

[3] Belding, D.,F. **Foundations of Analysis.** Prentice-Hall,Inc.,1991.

[4] Kirkwood,J.,R. **An Introduction to Analysis**, 2 nd edition . PWS Publishing Company,1995.

ภาคผนวก

ทฤษฎีบท 1 : ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งอินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และ $f(x) = g(x)$ ทุก $x \in [a,b]$ ยกเว้นที่จุดซึ่งมีจำนวนนับถ้วน แล้ว

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ - สกุล	นางสาวขนิษฐา ใจหนักดี
ที่อยู่	62 ถนนราษฎร์สำเริง ตำบลสองพี่น้อง อำเภอสองพี่น้อง จังหวัดสุพรรณบุรี 72110
ที่ทำงาน	โรงเรียนบางลี่วิทยา ถนนบางลี่ – หนองวัลย์เปรียง ตำบลสองพี่น้อง อำเภอสองพี่น้อง จังหวัดสุพรรณบุรี

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2543	สำเร็จการศึกษาปริญญาศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
พ.ศ. 2549	ศึกษาต่อระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2546 – 2547	รับราชการครู ตำแหน่ง อาจารย์ 1 ระดับ 3 โรงเรียนสาหร่ายวิทยา ตำบลโนนตูม อำเภอชุมพวง จังหวัดนครราชสีมา
พ.ศ. 2547 – ปัจจุบัน	รับราชการครู ตำแหน่ง ครู คศ.1 โรงเรียนบางลี่วิทยา ตำบลสองพี่น้อง อำเภอสองพี่น้อง จังหวัดสุพรรณบุรี