สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนมาจากโลก

โดย

นางสุดาพร พาระพัฒน์

สารนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974 – 11 – 6241 – 3

ELECTROMAGNETIC RESPONSE FROM THE EARTH

By

Sudaporn Parapat

A Master's Report Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree

MASTER OF SCIENCE

Department of Mathematics

Graduate School

SILPAKORN UNIVERSITY

2006

ISBN 974 – 11 – 6241 – 3

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร อนุมัติให้สารนิพนธ์เรื่อง “สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนมาจากโลก” เสนอโดย นางสุดาพร พาระพัฒน์ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ

....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริชัย ชินะตังกูร)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
วันที่..........เดือน..........................พ.ศ............

ผู้ควบคุมสารนิพนธ์

รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง

คณะกรรมการตรวจสอบสารนิพนธ์

....ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ)
………../………………/………..….

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)
………../………………/………..….

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ วารี เกรอต)
………../………………/…………….

K45308310 : สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ
คำสำคัญ : สนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สุดาพร พาระพัฒน์ : สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนมาจากโลก (ELECTROMAGNETIC RESPONSE FROM THE EARTH) อาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์ รศ. ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง. 65 หน้า. ISBN 974 – 11 – 6241 – 3

สารนิพนธ์ฉบับนี้ ผู้จัดทำได้นำเสนอวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์ เป็นระบบสมการที่บรรยายความสัมพันธ์ ระหว่างสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้องได้แก่ ระยะทางในแนวระนาบและแนวดิ่ง เป็นต้น วิธีการแปลงฮังเคิลและวิธีการหาคำตอบโดยใช้สมการคุณลักษณะ ถูกนำมาใช้ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คำตอบที่ได้เป็นปริมาณสนามไฟฟ้าที่บริเวณต่างๆของแบบจำลองเชิงเรขาคณิต ในสารนิพนธ์นี้ผู้จัดทำได้ดำเนินการพิจารณา 2 รูปแบบ ได้แก่ แบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกชั้นเดียวที่มีสภาพนำไฟฟ้าแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกที่มี 2 ชั้น ชั้นบนมีสภาพนำไฟฟ้าแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว

ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ปีการศึกษา 2549
ลายมือชื่อนักศึกษา..
ลายมือชื่ออาจารย์ผู้ควบคุมสารนิพนธ์...

K45308310 : MAJOR : MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

KEY WORD : ELECTROMAGNETIC

SUDAPORN PARAPAT : ELECTROMAGNETIC RESPONSE FROM THE EARTH. MASTER'S REPORT ADVISOR : ASSOC. PROF. SUABSAGUN YOOYUANYONG, Ph.D. 65 pp. ISBN 974 – 11 – 6241 – 3

In this project , we present the method to conduct the mathematical model using the Maxwell's equations. These equations describe the relation between electric and magnetic fields. The mathematical model which is conducted in this project is the patial differential equation and it describes the relation of the electric field in term of several quantities such as the distance in horizontal and vertical directions. The Hankel transforms and the characteristic equations are used to solve the patial differential equation. The solutions show the electric field of the 2 geometric models. The first geometric model is a halfspace with an exponentially conductivity profile. The second geometric model is a layered homogeneous conductivity earth model with an exponentially conductivity overburden.

Department of Mathematics Graduate School , Silpakorn University Academic Year 2006

Student ' s signature……………………………………………

Master ' s Report Advisor 's signature ……………………………………………

กิตติกรรมประกาศ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้เพราะความกรุณาของรองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง ที่ให้คำปรึกษา และคำแนะนำ ทำให้ผู้จัดทำเข้าใจวิธีการศึกษางานวิจัยทางคณิตศาสตร์ประยุกต์เพิ่มมากขึ้น อีกทั้งยังช่วยแนะนำ แก้ไขส่วนต่างๆที่บกพร่อง ทำให้สารนิพนธ์นี้สำเร็จได้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชา ขอขอบคุณเพื่อนๆ สาขาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ สำหรับความช่วยเหลือ คำแนะนำ ที่ให้กันตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัว ที่ให้การสนับสนุนการศึกษาและเป็นกำลังใจเสมอมา จนมีความสำเร็จในวันนี้

สารบัญ

หน้า

บัญชีสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
$I(\omega)$	กระแสไฟฟ้าที่ไหลในขดลวดวงแหวนที่ใช้เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
σ	สภาพนำไฟฟ้าของวัตถุใดๆ
ε	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของวัตถุใดๆ
ε_0	ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ
μ	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของวัตถุใดๆ
μ_0	ค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศ
J_s	ค่าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าบนขดลวดวงแหวนที่เป็นแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
$\sigma_p(z)$	สภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินที่ความลึก z เมตรจากพื้นผิวโลก
E^{air}	สนามไฟฟ้าในอากาศ
E^{a}	สนามไฟฟ้าที่เกิดจากแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ
E^{u}	สนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นโลกกลับขึ้นมาในอากาศ
E^{g1}	สนามไฟฟ้าใต้ดินชั้นที่ 1
E^{g2}	สนามไฟฟ้าใต้ดินชั้นที่ 2
$I_\nu(\ )$	ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 1 อันดับ ν
$K_\nu(\ )$	ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 2 อันดับ ν
α^2	$(4i\omega\mu\sigma_1)/b^2$
α_a^2	$i\omega\mu_0\sigma_a$
α_p^2	$i\omega\mu_0\sigma_p(z)$
ν^2	$(4\lambda^2)/b^2$

i	หน่วยจินตภาพ แทน $\sqrt{-1}$
ω	ความถี่เชิงมุมของกระแสไฟฟ้า
r	ระยะทางระหว่างแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากับเครื่องมือวัดสนามไฟฟ้า
a	รัศมีวงแหวนกลมของแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่วางตัวขนานกับพื้นโลก
$\hat{e}_r$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง r
$\hat{e}_\phi$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง ϕ
$\hat{e}_z$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง z
E_r	เป็นส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในทิศทาง $\hat{e}_r$
E_ϕ	เป็นส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในทิศทาง $\hat{e}_\phi$
E_z	เป็นส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในทิศทาง $\hat{e}_z$
H_r	เป็นส่วนประกอบสนามแม่เหล็กในทิศทาง $\hat{e}_r$
H_ϕ	เป็นส่วนประกอบสนามแม่เหล็กในทิศทาง $\hat{e}_\phi$
H_z	เป็นส่วนประกอบสนามแม่เหล็กในทิศทาง $\hat{e}_z$
(r,ϕ,z)	พิกัดทรงกระบอก
$J_1(\ )$	ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1
λ	ตัวแปรฮังเคิล

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ทรัพยากรธรรมชาติที่อยู่ใต้พื้นโลกมีมากมาย เช่น น้ำมัน ก๊าซธรรมชาติ ทองคำ และแร่ธาตุต่างๆ โดยเฉพาะน้ำมันซึ่งเป็นสารประกอบไฮโดรคาร์บอน ที่ประกอบด้วย ธาตุไฮโดรเจนและคาร์บอน มักพบอยู่ในหินตะกอน ทั้งสภาพของแข็ง ของเหลว และก๊าซ น้ำมันเกิดจากซากของสิ่งมีชีวิตทับถมกันในทะเล ทะเลสาบ หนอง บึงที่มีน้ำนิ่ง ซึ่งมีตะกอนตกทับถมอยู่ น้ำหนักของดินตะกอนประกอบกับการเปลี่ยนแปลงโดยแบคทีเรีย ทำให้ซากสิ่งมีชีวิตเหล่านั้นปราศจากออกซิเจนเหลืออยู่แต่สารประกอบไฮโดรเจนและคาร์บอน

ในปัจจุบันน้ำมันมีความจำเป็นมาก ต่อประเทศอุตสาหกรรม เพื่อนำไปใช้ในกระบวนการผลิตในโรงงาน รถจักรยานยนต์ รถยนต์ เรือ รถไฟ เครื่องบิน อีกทั้งอุปกรณ์การเกษตรอาทิเครื่องสูบน้ำ รถไถนา รถเกี่ยวข้าว รถตัดอ้อย หรือแม้แต่กระบวนการผลิตไฟฟ้าบางส่วนก็มีน้ำมันเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งนับวันจะมีประโยชน์และเป็นที่ต้องการมาก เมื่อมีความต้องการมากและมีการจำกัดการผลิตโดยกลุ่มผู้ผลิตน้ำมัน การเก็งกำไรจากการซื้อขายล่วงหน้า มีผลทำให้น้ำมันมีราคาสูงขึ้นทุกวัน จึงมีความพยายามที่จะนำทรัพยากรธรรมชาติเหล่านี้ขึ้นมาใช้ในปริมาณที่มากขึ้น ปัจจุบันมีการศึกษาลักษณะโครงสร้างของพื้นโลกกันอย่างแพร่หลาย โดยอาศัยความรู้ทางด้านธรณีฟิสิกส์ซึ่งเป็น วิธีการที่ใช้วิธีการทางฟิสิกส์ และคณิตศาสตร์

การศึกษาโครงสร้างใต้พื้นผิวโลกด้วยวิธีการทางธรณีฟิสิกส์ เป็นวิธีการที่ได้รับความนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายเพราะเป็นวิธีการที่ใช้ค่าใช้จ่ายในการสำรวจต่ำ หลักการทั่วไปของการสำรวจจะอาศัยความแตกต่างทางกายภาพของพื้นดิน และทรัพยากรแร่ธาตุที่ฝังตัวอยู่เป็นปัจจัยที่สำคัญ ในการค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติ เช่น สภาพต้านทาน สภาพนำไฟฟ้า ความต่างศักย์ไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า เป็นต้น

วิธีการสำรวจเพื่อค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติ จะต้องมีความสามารถในการแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างแร่ธาตุและพื้นโลกในบริเวณรอบๆ ซึ่งข้อมูลทางธรณีฟิสิกส์ที่ได้จากการสำรวจจะต้องสามารถนำมาประมวลผล เพื่อบ่งบอกถึงตำแหน่งของแร่ธาตุได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ อย่างไรก็ตาม การสำรวจโดยการสุ่มตัวอย่างโดยตรงจะมีค่าใช้จ่ายค่อนข้างสูง ดังนั้นการ

สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์จึงเป็นวิธีการหนึ่งที่ได้รับความนิยมอย่างมาก เนื่องจากเป็นวิธีการที่ใช้ค่าใช้จ่ายน้อยกว่าการสำรวจด้วยวิธีอื่น

ได้มีความพยายามใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในการสำรวจ ซึ่งในระยะเริ่มต้นของการใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าถูกนำมาใช้สำรวจใต้แผ่นเปลือกโลกโดยชาวแคนาดา ในระยะนั้นเทคโนโลยีทางด้านเครื่องมือต่างๆ ยังไม่ดีพอ เมื่อเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ได้ถูกพัฒนาให้มีความเจริญก้าวหน้ามากขึ้น ทำให้อุปกรณ์เครื่องมือต่างๆ มีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วย ทำให้การใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าสำรวจสิ่งต่างๆ ทำได้ดีและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ในการสำรวจโดยใช้วิธีการทางไฟฟ้านับเป็นวิธีการพื้นฐานที่สุดที่ทำได้ และวิธีการนี้รู้จักกันดีในชื่อของ วิธีการใช้ไฟฟ้ากระแสตรง ซึ่งอาศัยหลักการของไฟฟ้า 4 ขั้ว คือ 2 ขั้วแรก เป็นขั้วที่ใช้ส่งกระแสลงสู่พื้นโลก และอีก 2 ขั้ว ใช้วัดความต่างศักย์ไฟฟ้า ค่าความต่างศักย์จะถูกเปลี่ยนไปเป็นข้อมูลทางสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดิน สำหรับไฟฟ้ากระแสสลับก็ถูกนำมาใช้เช่นกันโดยอาศัยวิธีการเหนี่ยวนำของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ประจุไฟฟ้าในตัวกลางต่างๆ จะถูกเหนี่ยวนำก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสะท้อนขึ้นมาอีก สำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้านี้ถูกนำมาใช้ในการหาสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินได้

มีงานวิจัยจำนวนไม่น้อยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสำรวจโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็นชั้นๆ โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นโลกและในแต่ละชั้นมีความลึกจำกัดยกเว้นชั้นล่างสุดที่มีความลึกเป็นอนันต์และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นใดชั้นหนึ่งหรือทุกชั้นมีลักษณะเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันทวินาม หรือฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Stoyer และ Wait [10] , Chumchob [3] , Yooyuanyong และ Chumchob [12] , Siew และ Yooyuanyong [8]

สารนิพนธ์ฉบับนี้ ผู้จัดทำได้ศึกษาวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์เพื่อหาสนามไฟฟ้าที่ได้รับจากเครื่องมือรับสนามไฟฟ้า หลักการเบื้องต้นกำหนดให้มีเครื่องมือรับ - ส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ที่ผิวดิน โครงสร้างของแผ่นดิน กำหนดใน 2 ลักษณะ คือ แบบต่อเนื่องชั้นเดียว และ แบบต่อเนื่อง 2 ชั้น ค่าสนามไฟฟ้าที่ได้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสำรวจโครงสร้างใต้พื้นโลกได้ต่อไป

1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Stoyer และ Wait [10] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสภาพต้านทาน เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้นโดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนเป็นค่าคงตัว ส่วนชั้นล่างจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งนิยามโดย

$$\sigma_2(z) = c\sigma_1\, e^{-b(z-d)} \qquad \text{เมื่อ} \qquad z \geq h$$

เมื่อ b และ c เป็นจำนวนจริงบวก σ_1 เป็นจำนวนจริงบวกที่แทนสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นบน และ $h \geq 0$ แทนความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลกจนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก

Veitch และคณะ [11] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อค้นหาสนามแม่เหล็กในพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุด ซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ และกฎของแอมแปร์

Edwards และ Nabighian [5] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุดซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ โดยสามารถคำนวณหาค่าประมาณของอัตราส่วนระหว่างสนามแม่เหล็กในชั้นบนและชั้นล่างของชั้นที่อยู่ติดกันได้

Siew และ Yooyuanyong [8] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ โดยอาศัยวิธีการทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบการวัดอิงความถี่ (Frequency Domain) เพื่อศึกษาปัญหาย้อนกลับของการค้นหากลุ่มแร่ธาตุที่นำไฟฟ้าและมีรูปร่างคล้ายแผ่นจานกลมบาง ซึ่งฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และสภาพนำไฟฟ้าของชั้นบนมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ซึ่งกำหนดโดย

$$\sigma_1(z) = \sigma_0 e^{-bz} \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 \leq z \leq h$$

เมื่อ b และ σ_0 เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก ค่า h แทนความลึกของพื้นโลกชั้นบน ซึ่งวัดจากพื้นผิวโลกจนถึงระนาบรอยต่อระหว่างชั้นบนและชั้นล่างของพื้นโลก โดยสมมุติว่า กลุ่มแร่ธาตุดังกล่าวฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกชั้นล่าง ซึ่งสภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกชั้นนี้มีค่าน้อยมาก

Chumchob [3] Yooyuanyong และ Chumchob [12] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการค้นหาตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุรูปทรงกระบอกกลม 3 มิติ ฝังตัวอยู่ใต้พื้นผิวโลกที่มีลักษณะสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามความลึก โดยใช้วิธีทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ผลการวิจัยพบว่า สมการบรรยายสนามไฟฟ้าของแต่ละบริเวณถูกเขียนอยู่ในรูปสมการอินทิกรัล กระบวนการผันกลับได้นำสมการอินทิกรัลที่ได้ มาคำนวณหาค่าที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ได้แก่ ตำแหน่ง สภาพนำไฟฟ้า ความนำไฟฟ้า และส่วนหนาของกลุ่มแร่ธาตุ โดยค่าพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าดังกล่าวมีบทบาทสำคัญในการบรรยายลักษณะโครงสร้างของบริเวณใต้พื้นผิวโลก

Chen และ Oldenburg [2] ได้สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อค้นหาสนามแม่เหล็กในพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น n ชั้น โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลก และในแต่ละชั้นมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวและมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุดซึ่งจะมีความลึกเป็นอนันต์ โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการค้นหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติที่ฝังตัวอยู่ใต้พื้นโลกได้

Ketchanwit [6] ได้แสดงการศึกษาโครงสร้างใต้พื้นผิวโลกโดยการใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้า มีการสร้างแบบจำลองของพื้นโลก 3 ลักษณะ ได้แก่ แบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและมีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว σ_0 แบบจำลองต่อมาเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและกำหนดให้ดินชั้นล่างมีค่าสภาพนำไฟฟ้าคงตัว σ_0 และดินชั้นบนมีความหนา d มีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0\, e^{-b(z-d)}$ และแบบจำลองสุดท้ายเป็นแบบจำลองที่กำหนดให้ใต้พื้นผิวโลกแบ่งออกเป็น 2 ชั้น แต่ละชั้นมีลักษณะเป็นตัวกลางเนื้อเดียวและกำหนดให้ให้ดินชั้นบนมีความหนา d มีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว σ_0 และดินชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น $\sigma_0\, e^{-b(z-d)}$ โดยการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์และใช้เทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์ จะได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่บรรยายสนามไฟฟ้าที่ตอบสนองมาจากพื้นผิวโลกซึ่งจะนำพาข้อมูลต่างๆ ที่อยู่ใต้พื้นผิวโลกขึ้นมา

Sripunya [9] Yooyuanyong และ Sripanya [13] ได้นำเสนอการศึกษาหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กในสภาวะคงตัว ที่เกิดจากขั้วไฟฟ้ากระแสตรงซึ่งถูกฝังลงในพื้นโลกที่มีลักษณะเป็นชั้น โดยที่สภาพนำไฟฟ้าของพื้นโลกบางชั้นมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังหรือ

ฟังก์ชันทวินาม หรือฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อความลึกเพิ่มขึ้น ผลเฉลยของสนามแม่เหล็กสามารถหาได้จากการแก้ปัญหาค่าขอบเขตในระบบการวัดแบบอิงความถี่ โดยอาศัยวิธีการทางเมทริกซ์มาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งการศึกษาเราจะเริ่มต้นโดยการหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กสำหรับกรณีโครงสร้างของพื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยการทดลองเชิงตัวเลข ทำให้สามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและระยะห่างของเครื่องมือรับ-ส่งได้ ในขั้นตอนต่อไปได้ทำการขยายแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อหาผลเฉลยของสนามแม่เหล็กในพื้นโลกสำหรับกรณี N ชั้น เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 ในขั้นตอนสุดท้าย โดยอาศัยการหาค่าเหมาะที่สุดนำมาใช้แก้ปัญหาผกผัน ทำให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ของสภาพนำไฟฟ้าของโครงสร้างใต้พื้นโลกที่แบ่งออกเป็น 2 ชั้นได้

บทที่ 2

ทฤษฎีบทพื้นฐาน

พิจารณา สมการของแมกซ์เวลล์ ชนิดโดเมนอิงความถี่ ซึ่งเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้า ($\vec{E}$) และสนามแม่เหล็ก ($\vec{H}$)

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \tag{2-1}$$

และ

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E} + \vec{J}_s \tag{2-2}$$

โดยที่

∇ เป็นเกรเดียนต์ที่กำหนดโดย $\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$

i เป็นหน่วยจินตภาพแทนด้วย $\sqrt{-1}$

ω เป็นความถี่เชิงมุมของกระแสไฟฟ้า

σ เป็นสภาพนำไฟฟ้าของตัวกลาง

ε เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของวัตถุใดๆ

μ เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็ก ของวัตถุใดๆ

$\vec{J}_s$ เป็นเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า

สมการ (2-1) และ (2-2) เขียนได้ในระบบพิกัดทรงกระบอก (r, ϕ, z) ดังนี้

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi}\right)\hat{e}_z$$

$$= -i\omega\mu\left(H_r\hat{e}_r + H_\phi\hat{e}_\phi + H_z\hat{e}_z\right) \tag{2-3}$$

และ

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi}\right)\hat{e}_z$$

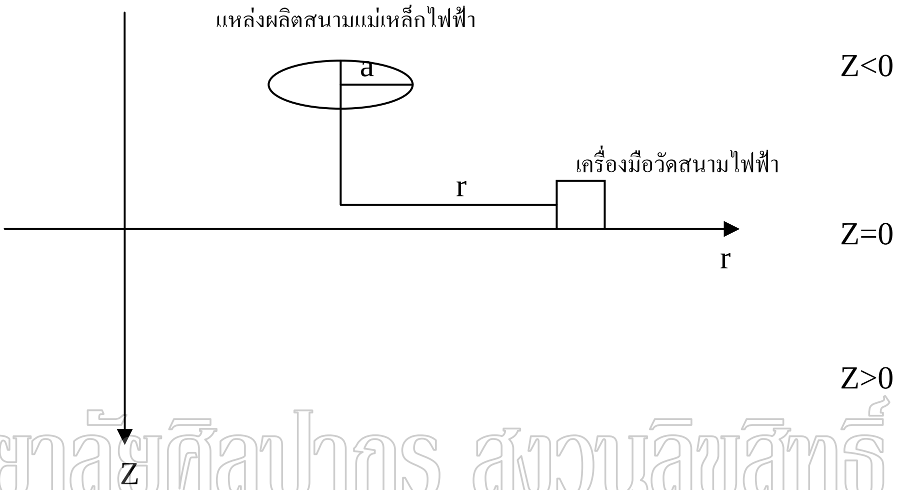
$$= (\sigma + i\omega\varepsilon)\left(E_r\hat{e}_r + E_\phi\hat{e}_\phi + E_z\hat{e}_z\right) + \left(J_{s_r}\hat{e}_r + J_{s_\phi}\hat{e}_\phi + J_{s_z}\hat{e}_z\right) \tag{2-4}$$

เมื่อ E_r , E_ϕ และ E_z เป็นส่วนประกอบของ $\vec{E}$ ในทิศทาง $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ และ $\hat{e}_z$ ตามลำดับ

H_r , H_ϕ และ H_z เป็นส่วนประกอบของ $\vec{H}$ ในทิศทาง $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ และ $\hat{e}_z$ ตามลำดับ

J_{s_r} , J_{s_ϕ} และ J_{s_z} เป็นส่วนประกอบของ $\vec{J}_s$ ในทิศทาง $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ และ $\hat{e}_z$ ตามลำดับ

พิจารณาแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกดังรูปที่ 2-1



รูปที่ 2- 1 แบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลก

ในระบบพิกัดทรงกระบอก (r,ϕ,z) โดยมีแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นขดลวดวงแหวน วางตัวขนานกับพื้นผิวโลก ดังนั้นสนามไฟฟ้าที่มาจากแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและจากการสะท้อนจากพื้นผิวดิน จะมีเฉพาะองค์ประกอบของ H_r , H_z และ E_ϕ เท่านั้น ดังนั้นสมการ (2-3) และ (2-4) เขียนได้เป็น

$$\left(0-\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_r+(0-0)\hat{e}_\phi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}-0\right)\hat{e}_z=-i\omega\mu\left(H_r\hat{e}_r+H_z\hat{e}_z\right) \qquad (2\text{-}5)$$

และ

$$(0-0)\hat{e}_r+\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\phi+\frac{1}{r}(0-0)\hat{e}_z=(\sigma+i\omega\varepsilon)\left(E_\phi\hat{e}_\phi\right)+\left(J_{s_\phi}\hat{e}_\phi\right) \qquad (2\text{-}6)$$

พิจารณาองค์ประกอบในแนว $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_z$ ในสมการ (2-5) จะได้สมการความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าดังนี้

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z} = i\omega\mu H_r \tag{2-7}$$

และ

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r}\right) = -i\omega\mu H_z \tag{2-8}$$

พิจารณาองค์ประกอบในแนว $\hat{e}_\phi$ ในสมการ (2-6) จะได้

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = (\sigma + i\omega\varepsilon)E_\phi + J_{s_\phi} \tag{2-9}$$

นำสมการ (2-7), (2-8) และ (2-9) มาหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับตัวแปร r และ z ดังนี้

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (2-7) เทียบกับตัวแปร z จะได้

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(i\omega\mu H_r)$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} = i\omega\mu \frac{\partial H_r}{\partial z}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2} \tag{2-10}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของสมการ (2-8) เทียบกับตัวแปร r จะได้

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(-i\omega\mu H_z)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial E_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}E_\phi\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial r}+E_\phi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}E_\phi\right)=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E_\phi=-i\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

ดังนั้น

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r}=\frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E_\phi\right) \qquad (2\text{-}11)$$

แทนสมการ (2-10) และ (2-11) ลงในสมการ (2-9) เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าในแนว ϕ กับตัวแปร r และ z ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E_\phi+\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial z^2}=i\omega\mu\eta E_\phi+i\omega\mu J_{s_\phi} \qquad (2\text{-}12)$$

เมื่อ $\eta=\sigma+i\omega\varepsilon$ ในที่นี้เพื่อความสะดวกจะละ ϕ โดยเขียน E_ϕ เป็น E และ J_{s_ϕ} เป็น J_s ดังนั้น สมการ (2-12) เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=i\omega\mu\eta E+i\omega\mu J_s \qquad (2\text{-}13)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-13) จะถูกใช้ในการหาสนามไฟฟ้าที่บริเวณต่างๆได้ดังในบทที่ 3 และบทที่ 4

บทที่ 3

แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของโครงสร้างพื้นดินที่มีสภาพนำไฟฟ้าแบบเลขชี้กำลัง

3.1 การจำลองแบบเชิงคณิตศาสตร์

ให้ z คือ ตัวแปรความลึกใต้พื้นดินมีหน่วยเป็นเมตร

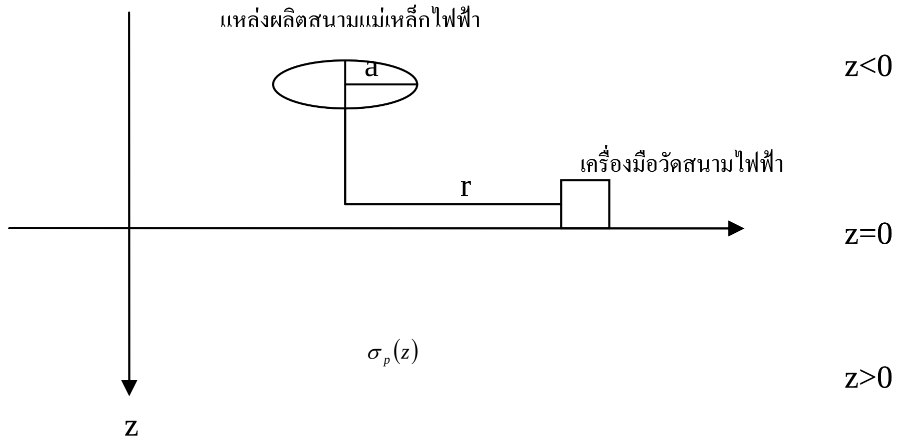
โดยกำหนดให้ $z < 0$ ถ้าวัตถุนั้นอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลก $z = 0$ ถ้าวัตถุนั้นอยู่ระดับพื้นผิวโลกและ $z > 0$ ถ้าวัตถุนั้นอยู่ลึกลงไปจากระดับพื้นผิวโลก ดังรูปที่ 3-1

รูปที่ 3-1 แบบจำลองเชิงเรขาคณิตแสดงโครงสร้างใต้พื้นโลก

สำหรับบริเวณที่ $z < 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งเกิดจากขดลวดวงแหวนกลมรัศมี a เมตรติดตั้งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลกเป็นระยะ $z = -h$ เมตร

สำหรับบริเวณที่ $z = 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือวัดสนามไฟฟ้า โดยมีระยะห่างจากแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขนานกับพื้นผิวโลกเป็นระยะทาง r เมตร

สำหรับบริเวณที่ $z > 0$ กำหนดให้ $\sigma_p(z)$ เป็นสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินซึ่งเป็นฟังก์ชันตามความลึก z ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3-2



รูปที่ 3-2 แสดงการจัดเครื่องมือรับส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนผิวโลก

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-13) นำมาหาค่าสนามไฟฟ้าในบริเวณ $z < 0$ และ $z > 0$ ได้ดังนี้

3.2 สนามไฟฟ้าในอากาศ ($z < 0$)

กรณีที่จะหาสนามไฟฟ้าในอากาศซึ่งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลก

กำหนดให้ E^{air} เป็นสนามไฟฟ้าในอากาศ

E^{a} เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในอากาศ ในที่นี้ใช้ขดลวดวงแหวนซึ่งมีรัศมี a เมตร

E^{u} เป็นสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นผิวโลกกลับขึ้นมา

จะพบว่า สนามไฟฟ้าในอากาศ E^{air} เกิดจากผลรวมของ E^{a} และ E^{u} นั่นคือ

$$E^{air} = E^{a} + E^{u} \qquad (3\text{-}1)$$

พิจารณาบริเวณที่เหนือพื้นผิวโลก กรณีที่ไม่มีแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า $J_s = 0$ ในที่นี้จะประมาณว่าในอากาศมี $\mu \approx \mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของ สุญญากาศ มีค่าประมาณ $12.57\times10^{-7} \quad H/m$ มี $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ เมื่อ ε_0 เป็นค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85\times10^{-12} \quad F/m$ และค่าสภาพนำไฟฟ้าในอากาศ ซึ่งมีค่าโดยประมาณใกล้เคียงกับศูนย์ ดังนั้นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ด้านขวามือของสมการ (2-13) เขียนได้เป็น $i\omega\mu_0\left((\sigma + i\omega\varepsilon)E^{u} + J_s\right) \approx 0$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-13) เขียนใหม่สำหรับหา E^{u} ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^u + \frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2} = 0 \tag{3-2}$$

ในที่นี้จะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-2) โดยใช้การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดย

$$\tilde{E} = \tilde{E}(\lambda, z) = \int_0^\infty rE(r,z)J_1(\lambda r)dr \tag{3-3}$$

โดยที่ $J_1(\ )$ แทน ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1 และ λ แทน ตัวแปรฮังเคิล เมื่อใช้การแปลงฮังเคิลกับทั้งสองข้างของสมการ (3-2) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^u + \frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr = \int_0^\infty r(0)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2} + \frac{\partial E^u}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^u}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\left. r\frac{\partial E^u}{\partial r}J_1(\lambda r)\right]_0^\infty - \int_0^\infty r\frac{\partial E^u}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^u}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\left. rE^u\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\right]_0^\infty - \int_0^\infty E^u\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty E^u\left(r\frac{d^2}{dr^2}(J_1(\lambda r)) + \frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^u J_1''(\lambda r) + \lambda E^u J_1'(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^{\infty}\left(\lambda^2 J_1''(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^u\,dr+\int_0^{\infty} r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$-\lambda^2\int_0^{\infty} rE^u J(\lambda r)dr+\int_0^{\infty} r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^u}{\partial z^2}-\lambda^2\tilde{E}^u=0 \qquad (3\text{-}4)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-4) พบว่าขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (3-4) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ นั่นคือ

$$\frac{d^2 \tilde{E}^u}{dz^2}-\lambda^2\tilde{E}^u=0 \qquad (3\text{-}5)$$

การหาคำตอบของสมการ(3-5) ทำได้โดยใช้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ช่วยในการหาคำตอบ ดังนี้

$$D^2-\lambda^2=0 \qquad (3\text{-}6)$$

เมื่อ D แทน ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ คำตอบของสมการ (3-6) คือ $D=-\lambda,\lambda$
ดังนั้นคำตอบของ (3-5) คือ

$$\tilde{E}^u=\tilde{E}^u(\lambda,z)=Ae^{\lambda z}+Be^{-\lambda z} \qquad (3\text{-}7)$$

เมื่อ A และ B เป็นตัวคงค่า ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบเขต

เมื่อพิจารณาสมการคำตอบ (3-7) ในอากาศเมื่อ $z\to-\infty$ แล้วจะได้ว่าค่าสนามไฟฟ้าควรมีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์ $\tilde{E}^u\to 0$ ดังนั้นเพื่อให้สมการคำตอบ (3-7) เป็นจริง จึงเลือก $B=0$ ดังนั้นคำตอบของสมการ (3-5) เขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{u} = Ae^{\lambda z} \tag{3-8}$$

การหาสนามไฟฟ้าในกรณีที่มีแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า E^a ทำได้โดยใช้สมการ (2-13) เช่นกันโดยในที่นี้จะประมาณว่าในอากาศมีค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็ก $\mu \approx \mu_0$ และ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ เนื่องจากค่าสภาพนำไฟฟ้าในอากาศ มีค่าโดยประมาณใกล้เคียงกับ 0 และสมมติไว้ว่ามีเครื่องมือผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าติดตั้งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลกที่ระยะความสูง $z = -h$ เมตร มีความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าเป็น $J_s = \sigma_a E^a$ ดังนั้น รูปแบบทางคณิตศาสตร์ด้านขวามือของสมการ (2-13) เขียนได้เป็น $i\omega\mu_0\left(\eta E^u + J_s\right) \approx i\omega\mu_0 J_s$

กำหนดให้ $\alpha_a^2 = i\omega\mu_0\sigma_a$ เมื่อ σ_a คือ ค่าสภาพนำไฟฟ้าของขดลวดวงแหวนซึ่งเป็นค่าคงตัว แล้วจะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับหา E^a สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^a}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^a + \frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2} = \alpha_a^2 E^a \tag{3-9}$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-9) หาได้โดยใช้การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดยสมการ (3-3) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^a}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^a + \frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E^a}{\partial r^2} + \frac{\partial E^a}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^a}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$r\frac{\partial E^a}{\partial r}J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty r\frac{\partial E^a}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^a}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$rE^a \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty E^a \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2 \int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^a\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right) + \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2 \int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^a J_1^{''}(\lambda r) + \lambda E^a J_1^{'}(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2 \int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1^{''}(\lambda r) + \frac{\lambda}{r}J_1^{'}(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^a dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2 \int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2 \int_0^\infty rE^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2 \int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^a}{\partial z^2} - \lambda^2 \tilde{E}^a = \alpha_a^2 \tilde{E}^a$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^a}{\partial z^2} - \left(\alpha_a^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^a = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-10) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (3-10) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ นั่นคือ

$$\frac{d^2 \tilde{E}^a}{dz^2} - \left(\alpha_a^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^a = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

คำตอบของสมการ (3-11) คือ

$$\tilde{E}^a(\lambda, z) = -\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} \qquad (3\text{-}12)$$

ดังนั้นจากสมการ (3-1) จะได้คำตอบของสมการไฟฟ้าในอากาศเขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{air}(\lambda, z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + Ae^{\lambda z} \quad \text{เมื่อ} \quad z < 0 \qquad (3\text{-}13)$$

3.3 สนามไฟฟ้าใต้ผิวดิน ($z > 0$)

กำหนดให้

E^g เป็นสนามไฟฟ้าใต้พื้นดิน ที่มีค่าสภาพนำไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามความลึก

$\sigma_p(z)$ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินที่แปรเปลี่ยนตามความลึก z กำหนดโดย

$\sigma_p(z) = \sigma_1 e^{-bz}$ เมื่อ σ_1 เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงมีค่ามากกว่าศูนย์

และ b เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

3.3.1 กรณีที่พื้นดินมีค่าสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังชนิดลดลงเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น (Exponentially decreasing profile)

ในกรณีนี้ ค่าสภาพนำไฟฟ้าของชั้นดินกำหนดเป็น $\sigma_p(z) = \sigma_1 e^{-bz}$, $b > 0$ พิจารณาสมการ (2-13) เนื่องจากไม่มีวัตถุใดๆ ฝังอยู่หรือไม่มีแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้น $i\omega\mu J_s = 0$ โดยการประมาณ $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ มีค่าประมาณ 8.85×10^{-12} F/m และ $\mu \approx \mu_0$ มีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m จะได้ว่า $i\omega\mu_0(\eta E^u + J_s) \approx i\omega\mu_0\sigma_p(z)E^u$ ดังนั้นจากสมการ (2-13) สามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ในการหา E^g ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^g}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^g + \frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2} = \alpha_p^2 E^g \qquad (3\text{-}14)$$

เมื่อ $\alpha_p^2 = i\omega\mu_0\sigma_p(z)$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-14) หาได้โดยใช้การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดยสมการ (3-3) การแปลงทำได้ดังนี้

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^g}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^g+\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2}+\frac{\partial E^g}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^g}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$r\frac{\partial E^g}{\partial r}J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty r\frac{\partial E^g}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^g}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$rE^g\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty E^g\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^g\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right)+\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^g J_1^{''}(\lambda r)+\lambda E^g J_1^{'}(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^g J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1^{''}(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1^{'}(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^g dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2 \int_0^\infty r E^g J(\lambda r) dr + \int_0^\infty r \frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2} J_1(\lambda r) dr = \alpha_p^2 \int_0^\infty r\left(E^g\right) J_1(\lambda r) dr$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}^g}{\partial z^2} - \lambda^2 \widetilde{E}^g \quad = \quad \alpha_p^2 \, \widetilde{E}^g$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}^g}{\partial z^2} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\widetilde{E}^g \quad = \quad 0 \qquad (3\text{-}15)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-15) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถ เขียนสมการ (3-15) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ นั่นคือ

$$\frac{d^2 \widetilde{E}^g}{dz^2} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\widetilde{E}^g \quad = \quad 0 \qquad (3\text{-}16)$$

คำตอบของสมการ (3-16) หาได้หลายวิธี วิธีที่น่าสนใจวิธีหนึ่งทำโดยการแปลงสมการ (3-16) ให้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปร โดยใช้ความสัมพันธ์ $\zeta = e^{-\frac{bz}{2}}$ เป็นสมการแปลงซึ่งจะได้ผลการแปลงเป็น

$$\zeta^2 \frac{d^2 \widetilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\widetilde{E}^g}{d\zeta} - \left(\alpha^2 \zeta^2 + \nu^2\right)\widetilde{E}^g = 0 \qquad (3\text{-}17)$$

เมื่อ $\alpha^2 = \left(4i\omega\mu_0\sigma_1\right)/b^2$ และ $\nu^2 = \left(4\lambda^2\right)/b^2$ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

จาก $\zeta = e^{-\frac{bz}{2}}$ ดังนั้น $\zeta^2 = e^{-bz}$ และ $d\zeta = -(b/2).e^{-bz/2}dz$ ดังนั้นสมการ (3-17) เขียนได้เป็น

$$0 = \zeta^2 \frac{d^2 \widetilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\widetilde{E}^g}{d\zeta} - \left(\alpha^2 \zeta^2 + \nu^2\right)\widetilde{E}^g$$

$$0 = \zeta^2 \frac{d^2 \widetilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\widetilde{E}^g}{d\zeta} - \left(\frac{4i\omega\mu_0\sigma_1}{b^2}\zeta^2 + \frac{4\lambda^2}{b^2}\right)\widetilde{E}^g$$

$$0 = \zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \frac{4}{b^2}\left(i\omega\mu_0\sigma_1 e^{-bz} + \lambda^2\right)\tilde{E}^g$$

$$0 = \zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \frac{4}{b^2}\left(i\omega\mu_0\sigma_p + \lambda^2\right)\tilde{E}^g$$

$$0 = \zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \frac{4}{b^2}\left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g$$

เพราะฉะนั้น $\zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \frac{4}{b^2}\left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$

$$\left(\frac{b^2}{4}\right)\left(\zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \frac{4}{b^2}\left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g\right) = \left(\frac{b^2}{4}\right)0$$

$$\frac{b^2}{4}\zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^g}{d\zeta^2} + \frac{b^2}{4}\zeta \frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$$

$$\frac{b^2}{4}e^{-bz}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta}\right) + \frac{b^2}{4}e^{-\frac{bz}{2}}\frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$$

$$\frac{b^2}{4}e^{-bz}\frac{d}{-\frac{b}{2}e^{-\frac{bz}{2}}dz}\left(\frac{d\tilde{E}^g}{-\frac{b}{2}e^{-\frac{bz}{2}}dz}\right) + \frac{b^2}{4}e^{-\frac{bz}{2}}\frac{d\tilde{E}^g}{-\frac{b}{2}e^{-\frac{bz}{2}}dz} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$$

$$e^{-bz}\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{bz}{2}}\frac{d\tilde{E}^g}{dz}\right) - \frac{b}{2}\frac{d\tilde{E}^g}{dz} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$$

$$e^{-bz}\left(e^{\frac{bz}{2}}\frac{d\tilde{E}^g}{dz} + \frac{b}{2}e^{\frac{bz}{2}}\frac{d\tilde{E}^g}{dz}\right) - \frac{b}{2}\frac{d\tilde{E}^g}{dz} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$$

นั่นคือ $\frac{d^2 \tilde{E}^g}{dz^2} - \left(\alpha_p^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^g = 0$

เพราะว่าสมการ (3-17) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปร ดังนั้นคำตอบของสมการอยู่ในรูปของฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรดังนี้

$$\tilde{E}^{g} = \tilde{E}^{g}(\lambda,\zeta) = BI_{\nu}(\alpha\zeta) + CK_{\nu}(\alpha\zeta) \tag{3-18}$$

เมื่อ $I_{\nu}(\ )$ เป็น ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 1 อันดับ ν

$K_{\nu}(\ )$ เป็น ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 2 อันดับ ν

B และ C เป็นตัวคงค่า

เนื่องจาก $b > 0$ และที่ $z \to \infty$ เราได้ว่า $\zeta \to 0$ ดังนั้น เพื่อทำคำตอบดังสมการ (3-18) ให้สอดคล้องกับความเป็นจริง จึงเลือก $C = 0$ และจะได้คำตอบของสมการ (3-17) เป็น

$$\tilde{E}^{g} = \tilde{E}^{g}(\lambda,\zeta) = BI_{\nu}(\alpha\zeta) \tag{3-19}$$

การหาตัวคงค่าต่างๆ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขขอบเขตโดยพิจารณา ความต่อเนื่องของสนามไฟฟ้าบริเวณพื้นผิวโลก $(z = 0)$ จะได้ว่า

$$\tilde{E}^{air}(\lambda,0) = \tilde{E}^{g}(\lambda,0) \tag{3-20}$$

และ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{air}(\lambda,z)\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g}(\lambda,z)\right|_{z=0} \tag{3-21}$$

เนื่องจาก สมการแสดงสนามไฟฟ้าในอากาศ ถูกกำหนดโดยสมการ (3-13) ดังนี้

$$\tilde{E}^{air}(\lambda,z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + Ae^{\lambda z} \quad , \quad z < 0$$

ดังนั้นที่ $z = 0$ จะได้ $\tilde{E}^{air}(\lambda,0) = -\dfrac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} + A$ (3-22)

และ สมการแสดงสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินซึ่งถูกกำหนดโดยสมการ (3-19) เขียนได้ดังนี้

$$\tilde{E}^{g}(\lambda,\zeta)=BI_{\nu}(\alpha\zeta)$$

หรือ

$$\tilde{E}^{g}(\lambda,z)=BI_{\nu}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)$$

เมื่อแทน $z=0$ จะได้ $\tilde{E}^{g}(\lambda,0)=BI_{\nu}(\alpha\ )$ (3-23)

อนุพันธ์ย่อยของสนามไฟฟ้าในอากาศเทียบกับตัวแปร z ได้โดย

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{air}(\lambda,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}+Ae^{\lambda z}\right)\\
&=-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)}{2\lambda}\frac{\partial e^{-\lambda|h-z|}}{\partial z}+A\frac{\partial e^{\lambda z}}{\partial z}\\
&=\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2}+Ae^{\lambda z}\frac{\partial(\lambda z)}{\partial z}\\
&=\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2}+\lambda Ae^{\lambda z} \qquad (3\text{-}24)
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{air}(\lambda,z)\right|_{z=0}=\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2}+\lambda A \qquad (3\text{-}25)$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g}(\lambda,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(BI_{\nu}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right)\\
&= B\frac{\partial}{\partial z}\left(I_{\nu}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right)\\
&= B\, I_{\nu}'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\\
&= \alpha B\, I_{\nu}'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{bz}{2}\right)\\
&= -\frac{\alpha\, b}{2}B\, I_{\nu}'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}} \qquad (3\text{-}26)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g}(\lambda, z)\bigg|_{z=0} = -\frac{\alpha b}{2} B I_v'(\alpha) \tag{3-27}$$

นำสมการ (3-22) และ (3-23) ไปแทนในสมการ (3-20) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} + A \quad = \quad B I_v(\alpha) \tag{3-28}$$

นำสมการ (3-25) และ (3-27) ไปแทนในสมการ (3-21) จะได้ว่า

$$\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \quad = \quad -\frac{\alpha\, b}{2} B\, I_v'(\alpha\,) \tag{3-29}$$

นำ λ คูณสมการ (3-28) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \quad = \quad \lambda B I_v(\alpha) \tag{3-30}$$

นำสมการ (3-30) ลบด้วยสมการ (3-29) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A - \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2} - \lambda A$$

$$= \quad \lambda B I_v(\alpha) + \frac{\alpha\, b}{2} B\, I_v'(\alpha\,)$$

$$-i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|} \quad = \quad B\left(\lambda I_v(\alpha) + \frac{\alpha\, b}{2} I_v'(\alpha\,)\right)$$

ดังนั้น จะได้

$$B = \frac{-i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{\lambda I_v(\alpha) + \frac{\alpha\, b}{2} I_v'(\alpha\,)} \tag{3-31}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิด $I_v'(\alpha) = I_{v-1}(\alpha) - (v/\alpha) I_v(\alpha)$ แทนลงไปในสมการ (3-31) จะได้ว่า

$$B = \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\lambda I_v(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)-(v/\alpha)I_v(\alpha)\right]}$$

$$B = \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\lambda I_v(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)-(2\lambda/\alpha b)I_v(\alpha)\right]}$$

$$= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\lambda I_v(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]-\frac{\alpha b}{2}\left[\frac{2\lambda}{\alpha b}I_v(\alpha)\right]}$$

$$= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\lambda I_v(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}I_{v-1}(\alpha)-\lambda I_v(\alpha)}$$

$$= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]}$$

นำ B ไปแทนในสมการ (3-28) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda}+A = \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]}I_v(\alpha)$$

จะได้ $$A = \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]}I_v(\alpha)+\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} \qquad (3\text{-}32)$$

ดังนั้น สมการแสดงสนามไฟฟ้าในอากาศ เขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{air}(\lambda,z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}+Ae^{\lambda z} \quad , \quad z<0$$

$$= -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}$$

$$-\left(\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]}I_v(\alpha)-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda}\right)e^{\lambda z} \quad , \quad z<0$$

หรือ

$$E^{air}(r,z) = -\int_0^\infty \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + \left(\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]} I_v(\alpha) - \frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} \right) e^{\lambda z} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda$$

และสมการแสดงสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินเขียนได้เป็น

$$\widetilde{E}^{g}(\lambda,z) = -\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]} I_v\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)$$

หรือ

$$E^{g}(r,z) = -\int_0^\infty \left[\frac{i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha\, b}{2}\left[I_{v-1}(\alpha)\right]} I_v\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right) \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda$$

3.3.2 กรณีที่พื้นดินมีค่าสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังชนิดเพิ่มขึ้นเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น (Exponentially increasing profile)

สำหรับกรณีนี้ คือ กรณีที่ $b < 0$ ดังนั้นค่าสภาพนำไฟฟ้ากำหนดได้เป็น $\sigma_p(z) = \sigma_1 e^{|b|z/2}$ ซึ่งขั้นตอนในการพิจารณาหา E^g สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับ กรณีที่พื้นดินมีค่าสภาพนำไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงแบบฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเมื่อความลึกเพิ่มขึ้น

เพราะว่า พื้นโลกไม่มีแหล่งผลิตสนามไฟฟ้า ดังนั้น $J_s = 0$ โดยการประมาณ $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ และ $\mu \approx \mu_0$ ดังนั้น $i\omega\mu(\eta E^u + J_s) \approx i\omega\mu_0\sigma_p E^u$ เมื่อใช้สมการ (2-13) แล้วจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ในการหา E^g เขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^g}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^g + \frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2} = \alpha_p^2 E^g \tag{3-33}$$

เมื่อ $\alpha_p^2 = i\omega\mu_0\sigma_p$

ในที่นี้จะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-33) โดยใช้ การแปลงฮังเคิล ซึ่งกำหนดโดยสมการ (3-3) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^g}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^g+\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E^g}{\partial r^2}+\frac{\partial E^g}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^g}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$r\frac{\partial E^g}{\partial r}J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty r\frac{\partial E^g}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^g}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$rE^g\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty E^g\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^g\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right)+\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(r\lambda^2E^gJ_1''(\lambda r)+\lambda E^gJ_1'(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^gJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(\lambda^2J_1''(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^g\,dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2\int_0^\infty rE^g J(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^g}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=\alpha_p^2\int_0^\infty r\left(E^g\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\frac{\partial^2\tilde{E}^g}{\partial z^2}-\lambda^2\tilde{E}^g \quad = \quad \alpha_p^2\,\tilde{E}^g$$

$$\frac{\partial^2\tilde{E}^g}{\partial z^2}-\left(\alpha_p^2+\lambda^2\right)\tilde{E}^g \quad = \quad 0 \qquad (3\text{-}34)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3-34) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถ เขียนสมการ (3-34) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ นั่นคือ

$$\frac{d^2\tilde{E}^g}{dz^2}-\left(\alpha_p^2+\lambda^2\right)\tilde{E}^g \quad = \quad 0 \qquad (3\text{-}35)$$

ต่อไปจะแปลงสมการ (3-35) ให้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปร โดยใช้ความสัมพันธ์ $\zeta=e^{-\frac{bz}{2}}$ เป็นตัวแปลงซึ่งจะได้ผลการแปลงเป็น

$$\zeta^2\frac{d^2\tilde{E}^g}{d\zeta^2}+\zeta\frac{d\tilde{E}^g}{d\zeta}-\left(\alpha^2\zeta^2+\nu^2\right)\tilde{E}^g=0 \qquad (3\text{-}36)$$

เมื่อ $\alpha^2=\left(4i\omega\mu_0\sigma_1\right)/b^2$ และ $\nu^2=\left(4\lambda^2\right)/b^2$ คำตอบของสมการ (3-36) อยู่ในรูปของ

$$\tilde{E}^g=\tilde{E}^g(\lambda,\zeta)=BI_\nu(\alpha\zeta)+CK_\nu(\alpha\zeta) \qquad (3\text{-}37)$$

B และ C เป็นตัวคงค่า หาได้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต

เพราะว่า $b<0$ และที่ $z\to\infty$ เราได้ว่า $\zeta\to\infty$ ดังนั้น เพื่อทำคำตอบให้เป็นจริง ดังนั้น จึงเลือก $B=0$ และจะได้คำตอบของ (3-37) คือ

$$\tilde{E}^g=\tilde{E}^g(\lambda,\zeta)=CK_\nu(\alpha\zeta) \qquad (3\text{-}38)$$

ขั้นต่อไปเป็นการหาตัวคงค่าต่างๆ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขขอบเขตโดยพิจารณาสนามไฟฟ้าบริเวณพื้นโลก $(z=0)$ จะได้ว่า

$$\widetilde{E}^{air}(\lambda,0) = \widetilde{E}^{g}(\lambda,0) \tag{3-39}$$

และ

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{air}(\lambda,z)\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{g}(\lambda,z)\right|_{z=0} \tag{3-40}$$

เนื่องจาก สมการสนามไฟฟ้าในอากาศ กำหนดโดยสมการ (3-13) ดังนี้

$$\widetilde{E}^{air}(\lambda,z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + Ae^{\lambda z} \quad , \quad z<0$$

ที่ $z=0$ จะได้

$$\widetilde{E}^{air}(\lambda,0) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} + A \tag{3-41}$$

และอนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าในอากาศเทียบกับตัวแปร z ในที่ $z=0$ เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{air}(\lambda,z)\Big|_{z=0} = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \tag{3-42}$$

จากสมการแสดงสนามไฟฟ้าในดินถูกกำหนดโดยสมการ (3-38)

$$\widetilde{E}^{g} = \widetilde{E}^{g}(\lambda,\zeta) = CK_\nu(\alpha\zeta)$$

หรือ $$\widetilde{E}^{g}(\lambda,z) = CK_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right) \tag{3-43}$$

ที่ $z=0$ สมการแสดงสนามไฟฟ้าเขียนได้เป็น

$$\widetilde{E}^{g}(\lambda,0) = CK_\nu(\alpha) \tag{3-44}$$

และอนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินเทียบกับตัวแปร z ในที่ $z=0$ เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{g}(\lambda,z) &= \frac{\partial}{\partial z}CK_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\\ &= C\frac{\partial}{\partial z}K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\end{aligned}$$

$$= CK'_{\nu}\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\frac{d}{dz}\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)$$

$$= CK'_{\nu}\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\frac{d}{dz}\left(-\frac{bz}{2}\right)$$

$$= -\frac{b}{2}\alpha e^{-\frac{bz}{2}} CK'_{\nu}\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right) \tag{3-45}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g}(\lambda, z)\bigg|_{z=0} = -\frac{b}{2}\alpha C K'_{\nu}(\alpha) \tag{3-46}$$

นำสมการ (3-41) และ (3-44) แทนในสมการ (3-39)จะได้

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + A \;=\; CK_{\nu}(\alpha) \tag{3-47}$$

นำสมการ (3-42) และ (3-46) แทนในสมการ (3-40)

$$\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \;=\; -\frac{b}{2}\alpha C K'_{\nu}(\alpha) \tag{3-48}$$

นำ λ คูณสมการ (3-47) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \;=\; \lambda CK_{\nu}(\alpha) \tag{3-49}$$

นำสมการ (3-49) ลบด้วยสมการ (3-48) จะได้

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A - \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} - \lambda A$$

$$= \lambda CK_{\nu}(\alpha) + \frac{b}{2}\alpha CK'_{\nu}(\alpha)$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|} \;=\; C\left(\lambda K_{\nu}(\alpha) + \frac{b}{2}\alpha K'_{\nu}(\alpha)\right) \tag{3-50}$$

ดังนั้นจะได้ $$C = \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\left(\lambda K_\nu(\alpha) + \frac{b}{2}\alpha K'_\nu(\alpha)\right)} \tag{3-51}$$

เนื่องจากความสัมพันธ์เวียนเกิด $K'_\nu(\alpha) = (-\nu/\alpha)K_\nu(\alpha) - K_{\nu-1}(\alpha)$ แทนลงไปในสมการ (3-51) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C &= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\left(\lambda K_\nu(\alpha) + \frac{b\alpha}{2}\left((-\nu/\alpha)K_\nu(\alpha) - K_{\nu-1}(\alpha)\right)\right)} \\ &= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\left(\lambda K_\nu(\alpha) + \frac{b\alpha}{2}\left((-2\lambda/\alpha b)K_\nu(\alpha) - K_{\nu-1}(\alpha)\right)\right)} \\ &= \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{-\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)} \\ &= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)} \end{aligned}$$

นำ C แทนในสมการ (3-47) จะได้

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + A = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)}$$

$$A = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)}K_\nu(\alpha) + \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} \tag{3-52}$$

ดังนั้น สมการแสดงสนามไฟฟ้าในอากาศ เขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{air}(\lambda, z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}$$

$$+\left(\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{v-1}(\alpha)}K_v(\alpha)+\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}\right)e^{\lambda z}, \quad z<0$$

หรือ

$$E^{air}(r,z)=-\int_0^\infty\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}-\left(\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{v-1}(\alpha)}K_v(\alpha)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-|h-z|}}{2\lambda}\right)e^{\lambda z}\right]\lambda J_1(\lambda r)d\lambda$$

และ สมการแสดงสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินเขียนได้เป็น

$$\widetilde{E}^g(\lambda,z)=\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{v-1}(\alpha)}K_v\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)$$

หรือ

$$E^g(r,z)=\int_0^\infty\left[\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{\frac{\alpha b}{2}K_{v-1}(\alpha)}K_v\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right]\lambda J_1(\lambda r)d\lambda$$

บทที่ 4

แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของโครงสร้างพื้นดินสองชั้น
ที่มีสภาพนำไฟฟ้าชั้นบนแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังและชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว

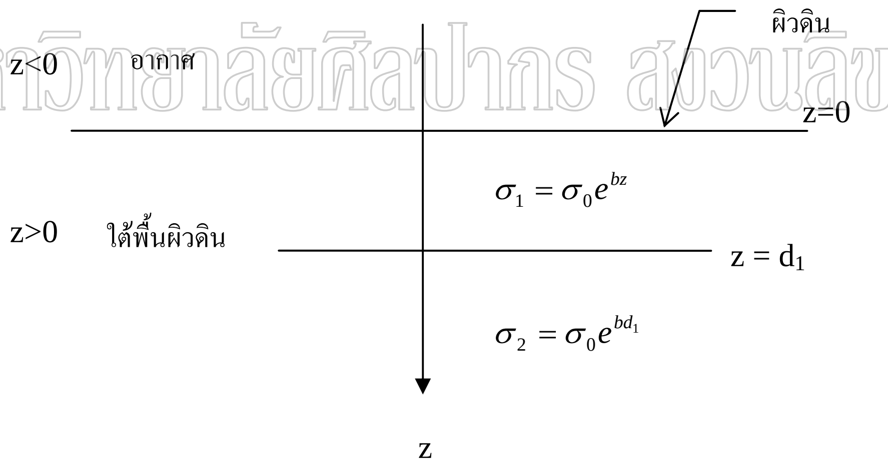
4.1 การจำลองแบบเชิงคณิตศาสตร์

ให้ z คือ ตัวแปรระยะทางในแนวดิ่งมีหน่วยเป็นเมตร

โดยกำหนดให้ $z < 0$ คือบริเวณที่อยู่เหนือระดับพื้นผิวโลก

$z = 0$ คือบริเวณที่อยู่ระดับพื้นผิวโลก

และ $z > 0$ คือบริเวณที่อยู่ลึกลงไปจากระดับพื้นผิวโลก ดังรูปที่ 4-1



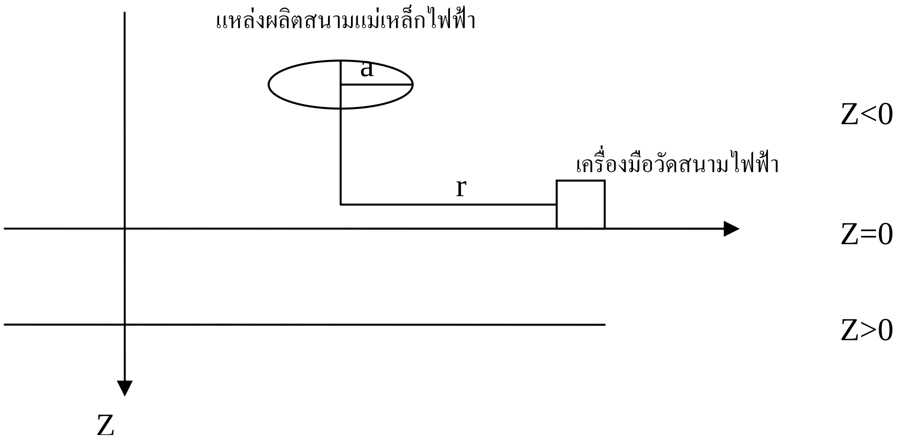
รูปที่ 4-1 แบบจำลองเชิงเรขาคณิตแสดงโครงสร้างใต้พื้นโลก

สำหรับบริเวณที่ $z < 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งเกิดจากขดลวดวงแหวนกลมรัศมี a เมตรตั้งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลกเป็นระยะ $z = -h$ เมตร

สำหรับบริเวณที่ $z = 0$ กำหนดให้มีเครื่องมือวัดสนามไฟฟ้า โดยมีระยะห่างจากแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขนานกับพื้นผิวโลกเป็นระยะทาง r เมตร

สำหรับบริเวณที่ $z > 0$ กำหนดให้ พื้นดินมี 2 ชั้น ชั้นบนมีสภาพนำไฟฟ้าเป็น $\sigma_1(z)$ โดยที่ $\sigma_1(z) = \sigma_0 e^{bz}$ มีค่าเปลี่ยนแปลงตามความลึกที่เพิ่มขึ้น สำหรับดินชั้นล่างกำหนดให้มีสภาพ

นำไฟฟ้าเป็นค่าคงตัวเท่ากับ $\sigma_2 = \sigma_0 e^{bd_1}$ เมื่อ d_1 เป็นความลึกของชั้นดินชั้นที่ 1 ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวแสดงได้ดังรูปที่ 4-2



รูปที่ 4-2 แสดงการจัดเครื่องมือรับส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนผิวโลก

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-13) นำมาหาสนามไฟฟ้าในบริเวณ $z<0$ และ $z>0$ ได้ดังนี้

4.2 สนามไฟฟ้าในอากาศ ($z<0$)

กรณีที่เราจะหาสนามไฟฟ้าในอากาศซึ่งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลก

กำหนดให้ E^{air} เป็นสนามไฟฟ้าในอากาศ

E^{a} เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากแหล่งผลิตสนามไฟฟ้าในอากาศ ในที่นี้ใช้ขดลวดวงแหวนซึ่งมีรัศมี a เมตร

E^{u} เป็นสนามไฟฟ้าที่สะท้อนจากพื้นโลกกลับขึ้นมา

จะพบว่า สนามไฟฟ้าในอากาศ E^{air} เกิดจากผลรวมของ E^{a} และ E^{u} นั่นคือ

$$E^{air} = E^{a} + E^{u} \tag{4-1}$$

พิจารณาบริเวณเหนือพื้นผิวโลก กรณีที่ไม่มีแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า $J_s = 0$ ในที่นี้จะประมาณว่าในอากาศมี $\mu \approx \mu_0$ เมื่อ μ_0 เป็นค่า ความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็กของสุญญากาศมีค่าประมาณ 12.57×10^{-7} H/m และ $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ เป็นค่าความสามารถ

ในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85\times10^{-12}\ F/m$ และค่าสภาพนำไฟฟ้าในอากาศ ซึ่งมีค่าโดยประมาณใกล้เคียงกับศูนย์ ดังนั้นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ด้านขวามือของสมการ (2-13) เขียนได้เป็น $i\omega\mu_0\left((\sigma+i\omega\varepsilon_0)E^u+J_s\right)\approx i\omega\mu_0(0+0)\approx 0$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-13) เขียนใหม่สำหรับหา E^u ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^u+\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}=0 \qquad (4\text{-}2)$$

ในที่นี้จะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-2) โดยใช้การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดย

$$\tilde{E}=\tilde{E}(\lambda,z)=\int_0^\infty rE(r,z)J_1(\lambda r)dr \qquad (4\text{-}3)$$

เมื่อใช้การแปลงฮังเคิลกับทั้งสองข้างของสมการ (4-2) จะได้ว่า

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^u+\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr=\int_0^\infty r(0)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E^u}{\partial r^2}+\frac{\partial E^u}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^uJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^u}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^uJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\left.r\frac{\partial E^u}{\partial r}J_1(\lambda r)\right]_0^\infty-\int_0^\infty r\frac{\partial E^u}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^uJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^u}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr-\int_0^\infty\frac{1}{r}E^uJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$-rE^u \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty E^u \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty E^u\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right) + \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^u J_1''(\lambda r) + \lambda E^u J_1'(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^u J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1''(\lambda r) + \frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^u dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$-\lambda^2\int_0^\infty rE^u J(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^u}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^u}{\partial z^2} - \lambda^2 \tilde{E}^u = 0 \tag{4-4}$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-4) พบว่าขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (4-4) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้เป็น

$$\frac{d^2 \tilde{E}^u}{dz^2} - \lambda^2 \tilde{E}^u = 0 \tag{4-5}$$

การหาคำตอบของสมการ (4-5) ทำได้โดยใช้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ช่วยในการหาคำตอบได้ ดังนี้

$$D^2 - \lambda^2 = 0 \tag{4-6}$$

เมื่อ D แทน ตัวดำเนินการอนุพันธ์ คำตอบของสมการ (4-6) คือ $D = -\lambda, \lambda$
ดังนั้นคำตอบของ (4-5) เขียนได้เป็น

$$\widetilde{E}^{u} = \widetilde{E}^{u}(\lambda, z) = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z} \quad (4\text{-}7)$$

เมื่อ A และ B เป็นตัวคงค่า ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบเขต

เมื่อพิจารณาสมการคำตอบ (4-7) สำหรับกรณีที่กำหนดให้โลกเป็นชั้นเดียวเมื่อ $z \to -\infty$ แล้วจะได้ว่าค่าสนามไฟฟ้าควรมีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์ $\widetilde{E}^{u} \to 0$ ดังนั้นเพื่อให้คำตอบของสมการ (4-7) เป็นจริง จึงเลือก $B = 0$ ดังนั้นคำตอบของสมการ (4-5) เขียนได้เป็น

$$\widetilde{E}^{u} = Ae^{\lambda z} \quad (4\text{-}8)$$

การหาสนามไฟฟ้าในกรณีที่มีแหล่งผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้า E^{a} ทำได้โดยใช้สมการ (2-13) เช่นกันโดยในที่นี้จะประมาณว่าในอากาศมีค่าความสามารถในการซึมซับสนามแม่เหล็ก $\mu \approx \mu_0$ และ ค่าความสามารถในการส่งผ่านสนามไฟฟ้าของสุญญากาศ $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ เนื่องจาก ค่าสภาพนำไฟฟ้าในอากาศ มีค่าโดยประมาณใกล้เคียงกับ 0 และสมมติไว้ว่ามีเครื่องมือผลิตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าติดตั้งอยู่เหนือระดับพื้นผิวโลกที่ระยะความสูง $z = -h$ เมตร มีความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าเป็น $J_s = \sigma_a E^{a}$ ดังนั้น รูปแบบทางคณิตศาสตร์ด้านขวามือของสมการ (2-13) เขียนได้เป็น $i\omega\mu_0(\eta E^{u} + J_s) \approx i\omega\mu_0 J_s$

กำหนดให้ $\alpha_a^2 = i\omega\mu_0\sigma_a$ เมื่อ σ_a คือ ค่าสภาพนำไฟฟ้าของขดลวดวงแหวน ซึ่งเป็นค่าคงตัว แล้วจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับหา E^{a} ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^{a}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^{a}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^{a} + \frac{\partial^2 E^{a}}{\partial z^2} = \alpha_a^2 E^{a} \quad (4\text{-}9)$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-9) หาได้โดยใช้การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดยสมการ (4-3) จะได้ว่า

$$\int_0^{\infty} r\left(\frac{\partial^2 E^{a}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^{a}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^{a} + \frac{\partial^2 E^{a}}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^{\infty} r(E^{a})J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^{\infty}\left(r\frac{\partial^2 E^{a}}{\partial r^2} + \frac{\partial E^{a}}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr - \int_0^{\infty}\frac{1}{r}E^{a}J_1(\lambda r)dr + \int_0^{\infty} r\frac{\partial^2 E^{a}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^{\infty} r(E^{a})J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^a}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$r\frac{\partial E^a}{\partial r}J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty r\frac{\partial E^a}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^a}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-rE^a\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty E^a\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^a\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right) + \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^a J_1''(\lambda r) + \lambda E^a J_1'(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r}E^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1''(\lambda r) + \frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r) - \frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^a dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2\int_0^\infty rE^a J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = \alpha_a^2\int_0^\infty r\left(E^a\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^a}{\partial z^2} - \lambda^2\tilde{E}^a = \alpha_a^2\,\tilde{E}^a$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^a}{\partial z^2} - \left(\alpha_a^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^a = 0 \qquad (4\text{-}10)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (4-10) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (4-10) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ นั่นคือ

$$\frac{d^2\tilde{E}^a}{dz^2}-\left(\alpha_a^2+\lambda^2\right)\tilde{E}^a=0 \qquad (4\text{-}11)$$

คำตอบของสมการ (4-11) คือ

$$\tilde{E}^a(\lambda,z)=-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} \qquad (4\text{-}12)$$

ดังนั้นจากสมการ (4-1) จะได้คำตอบของสนามไฟฟ้าในอากาศเขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{air}(\lambda,z)=-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda}+Ae^{\lambda z} \quad \text{เมื่อ} \quad z<0 \qquad (4\text{-}13)$$

4.3 สนามไฟฟ้าใต้ผิวดิน ($z>0$)

กำหนดให้ พื้นโลกมี 2 ชั้น โดยกำหนดให้

E^g เป็นสนามไฟฟ้าใต้พื้นดิน ที่มีค่าสภาพนำไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงตามความลึก

$\sigma_1(z)$ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินชั้นแรกที่แปรเปลี่ยนตามความลึก z

กำหนดโดย $\sigma_1(z)=\sigma_0 e^{bz}$

และ $\sigma_2(z)$ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าของพื้นดินชั้นที่สอง กำหนดโดย $\sigma_2=\sigma_0 e^{bd_1}$

เมื่อ σ_0 เป็นค่าคงตัวที่ไม่น้อยกว่าศูนย์ และ b เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

4.3.1 การหาสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินชั้นที่ 1 ทำได้โดยใช้สมการ (2-13) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^{g1}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^{g1}+\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2}=\alpha_1^2 E^{g1} \qquad (4\text{-}14)$$

เมื่อ $\alpha_1^2=i\omega\mu\sigma_1$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-14) หาได้โดยใช้ การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดยสมการ (4-3) ดังนี้

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E^{g1}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E^{g1}+\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr=\alpha_1^2\int_0^\infty r\left(E^{g1}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial r^2} + \frac{\partial E^{g1}}{\partial r} \right) J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^{g1}}{\partial r} \right) \right] J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$r\frac{\partial E^{g1}}{\partial r} J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty r\frac{\partial E^{g1}}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^{g1}}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$-rE^{g1}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty E^{g1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right) \right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^{g1}\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right) + \frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right) \right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^{g1} J_1''(\lambda r) + \lambda E^{g1} J_1'(\lambda r) \right)dr - \int_0^\infty \frac{1}{r} E^{g1} J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1''(\lambda r) + \frac{\lambda}{r} J_1'(\lambda r) - \frac{1}{r^2} J_1(\lambda r) \right) rE^{g1}dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr$$

$$= \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2 \int_0^\infty rE^{g1} J(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g1}}{\partial z^2} J_1(\lambda r)dr = \alpha_1^2 \int_0^\infty r\left(E^{g1}\right) J_1(\lambda r)dr$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^{g1}}{\partial z^2} - \lambda^2 \tilde{E}^{g1} = \alpha_1^2 \; \tilde{E}^{g1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^{g1}}{\partial z^2} - \left(\alpha_1^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^{g1} = 0 \qquad (4\text{-}15)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-15) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถ เขียนสมการ (4-15) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ ดังนี้

$$\frac{d^2 \tilde{E}^{g1}}{dz^2} - \left(\alpha_1^2 + \lambda^2\right)\tilde{E}^{g1} = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

คำตอบของสมการ (4-16) หาได้หลายวิธี วิธีที่น่าสนใจวิธีหนึ่งทำโดยการแปลงสมการ (4-16) ให้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปร โดยใช้ความสัมพันธ์ $\zeta = e^{-\frac{bz}{2}}$ เป็นสมการแปลงซึ่งจะได้ผลการแปลงเป็น

$$\zeta^2 \frac{d^2 \tilde{E}^{g1}}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\tilde{E}^{g1}}{d\zeta} - \left(\alpha^2 \zeta^2 + \nu^2\right)\tilde{E}^{g1} = 0 \qquad (4\text{-}17)$$

เมื่อ $\alpha^2 = \left(4i\omega\mu\sigma_1\right)/b^2$ และ $\nu^2 = \left(4\lambda^2\right)/b^2$

เพราะว่าสมการ (4-17) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลดัดแปร ซึ่งมีคำตอบของสมการอยู่ในรูปของฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรดังนี้

$$\tilde{E}^{g1} = \tilde{E}^{g1}(\lambda, \zeta) = CI_\nu(\alpha\zeta) + DK_\nu(\alpha\zeta)$$

หรือ

$$\tilde{E}^{g1}(\lambda, z) = CI_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right) + DK_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right) \qquad (4\text{-}18)$$

เมื่อ $I_\nu(\;)$ เป็น ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 1 อันดับ ν

$K_\nu(\;)$ เป็น ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 2 อันดับ ν

C และ D เป็นตัวคงค่า

4.3.2 การหาสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินชั้นที่ 2

ในกรณีนี้ ค่าสภาพนำไฟฟ้าของดินชั้นล่าง $\sigma_1(z) = \sigma_0 e^{bd_1}$ ดังนั้นขวามือของสมการ (2-13) เขียนได้เป็น $i\omega\mu\left(\eta E^u + J_p\right) \approx i\omega\mu\sigma_p E^u$

หลังจากที่เราใช้สมการ (2-13) แล้วจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ใช้ในการหา E^{g2} สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^{g2}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E + \frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2} = i\omega\mu\eta E^{g2} \qquad (4\text{-}19)$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-19) หาได้โดยใช้ การแปลงฮังเคิล ซึ่งนิยามโดยสมการ (4-3) ดังนี้

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E^{g2}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}E^{g2} + \frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left(r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial r^2} + \frac{\partial E^{g2}}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E^{g2}}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\left. r\frac{\partial E^{g2}}{\partial r}J_1(\lambda r)\right]_0^\infty - \int_0^\infty r\frac{\partial E^{g2}}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E^{g2}}{\partial r}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\left. -rE^{g2}\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty E^{g2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr - \int_0^\infty\frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr + \int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr = i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty E^{g2}\left(r\frac{d^2}{dr^2}\left(J_1(\lambda r)\right)+\frac{d}{dr}\left(J_1(\lambda r)\right)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2 E^{g2}J_1''(\lambda r)+\lambda E^{g2}J_1'(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^{g2}J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2 J_1''(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^{g2}dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr$$
$$=i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$-\lambda^2\int_0^\infty rE^{g2}J(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^{g2}}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=i\omega\mu\eta\int_0^\infty r\left(E^{g2}\right)J_1(\lambda r)dr$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^{g2}}{\partial z^2}-\lambda^2\tilde{E}^{g2} = i\omega\mu\eta\,\tilde{E}^{g2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}^{g2}}{\partial z^2}-\left(i\omega\mu\eta+\lambda^2\right)\tilde{E}^{g2} = 0 \qquad (4\text{-}20)$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4-20) เป็นสมการที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ z เพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นสามารถ เขียนสมการ (4-20) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดาได้ ดังนี้

$$\frac{d^2 \tilde{E}^{g2}}{dz^2}-\left(i\omega\mu\eta+\lambda^2\right)\tilde{E}^{g2} = 0$$

ซึ่งสามารถใช้สมการลักษณะเฉพาะ ช่วยในการหาคำตอบ ดังนี้

$$D^2-\left(i\omega\mu\eta+\lambda^2\right)=0$$

และคำตอบของสมการคือ $D=\pm\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}$

ดังนั้นคำตอบของสมการ (4-20) เขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{g2}(\lambda,z)=Ge^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z}+He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z} \qquad (4\text{-}21)$$

เมื่อ G และ H เป็นตัวคงค่า

สำหรับกรณี $z \to \infty$ แล้วจะได้ว่าค่าสนามไฟฟ้าควรมีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์ $\tilde{E}^{g2} \to 0$ ดังนั้นเพื่อให้คำตอบสมการ (4-21) เป็นจริง จึงเลือก $G = 0$ ดังนั้นคำตอบของสมการ (4-21) เขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{g2}(\lambda, z) = He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, z} \qquad (4\text{-}22)$$

การหาตัวคงค่า ต่างๆ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขขอบเขตโดยพิจารณา สนามไฟฟ้าบริเวณพื้นผิวโลก $(z = 0)$ จะได้ว่า

$$\tilde{E}^{air}(\lambda,0) \;=\; \tilde{E}^{g1}(\lambda,0)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{air}(\lambda, z)\right|_{z=0} \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g1}(\lambda, z)\right|_{z=0}$$

สนามไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อชั้นที่ 1 และ 2

$$\tilde{E}^{g1}(\lambda, d_1) \;=\; \tilde{E}^{g2}(\lambda, d_1)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g1}(\lambda, z)\right|_{z=d_1} \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g2}(\lambda, z)\right|_{z=d_1}$$

เนื่องจาก สมการสนามไฟฟ้าในอากาศ ถูกกำหนดโดยสมการ (4-13)

$$\tilde{E}^{air}(\lambda, z) = -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + Ae^{\lambda z} \quad , \quad z < 0$$

ดังนั้นที่ $z = 0$ จะได้ $\tilde{E}^{air}(\lambda,0) = -\dfrac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} + A$ (4-23)

สมการสนามไฟฟ้าใต้ผิวดินชั้นบนซึ่งถูกกำหนดโดยสมการ (4-18)

$$\tilde{E}^{g1}(\lambda, \zeta) = CI_\nu(\alpha\zeta) + DK_\nu(\alpha\zeta)$$

หรือ $\tilde{E}^{g1}(\lambda, z) = CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right) + DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)$

เมื่อแทน $z = 0$ จะได้ $\widetilde{E}^{g1}(\lambda,0) = CI_\nu(\alpha) + DK_\nu(\alpha)$ (4-24)

สมการสนามไฟฟ้าใต้ผิวดินชั้นล่างซึ่งถูกกำหนดโดยสมการ (4-22)

$$\widetilde{E}^{g2}(\lambda,z) = \quad He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z}$$

อนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าในอากาศหาได้โดย

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{air}(\lambda,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2\lambda} + Ae^{\lambda z}\right) \\
&= -\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)}{2\lambda}\frac{\partial e^{-\lambda|h-z|}}{\partial z} + A\frac{\partial e^{\lambda z}}{\partial z} \\
&= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2} + A\frac{e^{\lambda z}\partial(\lambda z)}{\partial z} \\
&= \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h-z|}}{2} + \lambda Ae^{\lambda z}
\end{aligned}$$

อนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าในอากาศเทียบกับตัวแปร z ในที่ $z = 0$ เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{air}(\lambda,z)\Big|_{z=0} = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A \qquad (4\text{-}25)$$

อนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินชั้นที่ 1 เทียบกับตัวแปร z หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{E}^{g1}(\lambda,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right) \\
&= C\frac{\partial}{\partial z}\left(I_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right) + D\frac{\partial}{\partial z}\left(K_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\right) \\
&= C\,I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\frac{d}{dz}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right) + DK_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)\frac{d}{dz}\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right) \\
&= \alpha\, C\, I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}}\frac{d}{dz}\left(-\frac{bz}{2}\right) + \alpha\, D\, K_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}}\frac{d}{dz}\left(-\frac{bz}{2}\right) \\
&= -\frac{\alpha\, b}{2}C\, I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}} - \frac{\alpha\, b}{2}D\, K_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bz}{2}}\right)e^{-\frac{bz}{2}}
\end{aligned}$$

ที่ $z = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g1}(\lambda, z)\Big|_{z=0} = -\frac{\alpha\, b}{2} C\, I_{\nu}'(\alpha\,) - \frac{\alpha\, b}{2} D\, K_{\nu}'(\alpha\,) \qquad (4\text{-}27)$$

อนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าใต้พื้นดินชั้นที่ 2 เทียบกับตัวแปร z หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E^{g2}(\lambda, z) = &\ \frac{\partial}{\partial z}He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ z} \\ = &\ H\frac{\partial}{\partial z}e^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ z} \\ = &\ He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ z}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ z\right) \\ = &\ \left(-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\right)He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ z} \qquad (4\text{-}28)\end{aligned}$$

เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขต $\tilde{E}^{air}(\lambda,0) = \tilde{E}^{g1}(\lambda,0)$

จะได้ว่า $$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda} + A = CI_{\nu}(\alpha\,) + DK_{\nu}(\alpha) \qquad (4\text{-}29)$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{air}(\lambda, z)\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g1}(\lambda, z)\Big|_{z=0}$

จะได้ว่า $$\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A = -\frac{\alpha\, b}{2} C\, I_{\nu}'(\alpha\,) - \frac{\alpha\, b}{2} D\, K_{\nu}'(\alpha\,) \qquad (4\text{-}30)$$

นำ λ คูณสมการ (4-29) จะได้ว่า

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2} + \lambda A = \lambda CI_{\nu}(\alpha\,) + \lambda DK_{\nu}(\alpha) \qquad (4\text{-}31)$$

นำสมการ (4-31) - (4-30)

$$\left(-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2}+\lambda A\right)-\left(\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2}+\lambda A\right)=$$

$$\left(\lambda CI_\nu(\alpha)+\lambda DK_\nu(\alpha)\right)\ -\ \left(-\frac{\alpha\, b}{2}C\, I'_\nu(\alpha\,)-\frac{\alpha\, b}{2}D\, K'_\nu(\alpha\,)\right)$$

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2}+\lambda A-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2}-\lambda A\ =$$

$$\lambda CI_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}C\, I'_\nu(\alpha\,)\ +\lambda DK_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}D\, K'_\nu(\alpha\,)$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}=C\left(\lambda I_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}I'_\nu(\alpha\,)\right)+D\left(\lambda K_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}K'_\nu(\alpha\,)\right)$$

เนื่องจากความสัมพันธ์เวียนเกิด $I'_\nu(\alpha)=I_{\nu-1}(\alpha)-(\nu/\alpha)I_\nu(\alpha)$ และ $K'_\nu(\alpha)=(-\nu/\alpha)K_\nu(\alpha)-K_{\nu-1}(\alpha)$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}=C\left(\lambda I_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}\left(I_{\nu-1}(\alpha)-\frac{2\lambda}{\alpha b}I_\nu(\alpha)\right)\right)$$

$$+D\left(\lambda K_\nu(\alpha)+\frac{\alpha\, b}{2}\left(-\frac{2\lambda}{\alpha b}K_\nu(\alpha)-K_{\nu-1}(\alpha)\right)\right)$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\ =\ C\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)+D\left(-\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)\right)$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\ =\ C\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)-D\left(\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)\right)$$

$$C\ =\ \frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}+D\left(\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)} \qquad (4\text{-}32)$$

เนื่องจากเงื่อนไขขอบเขต $\tilde{E}^{g1}(\lambda,d_1)\ =\ \tilde{E}^{g2}(\lambda,d_1)$

ดังนั้นจากสมการ (4-18) และ (4-22) จะได้ว่า

$$CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)+DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)=He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\ d_1}$$

$$H\ =\ CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,d_1}+DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,d_1} \qquad (4\text{-}33)$$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $\left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g1}(\lambda,z)\right|_{z=d_1} = \left.\frac{\partial}{\partial z}\tilde{E}^{g2}(\lambda,z)\right|_{z=d_1}$

$$-\frac{\alpha\, b}{2} C\, I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} - \frac{\alpha\, b}{2} D\, K_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} = \left(-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\right)He^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1}$$

$$H = \frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} CI_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1}$$

$$+\frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} DK_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1} \qquad (4\text{-}34)$$

จากสมการ (4-33) และ (4-34) จะได้ว่า

$$CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1} + DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1}$$

$$= \frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} CI_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1} + \frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} DK_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\, d_1}$$

$$CI_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} CI_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) = -DK_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) + \frac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} DK_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)$$

$$C\left(I_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \frac{\alpha b e^{-\frac{bd_1}{2}}}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) = -D\left(K_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \frac{\alpha b e^{-\frac{bd_1}{2}}}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} K_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)$$

$$C = -D\frac{\left(K_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \frac{\alpha b e^{-\frac{bd_1}{2}}}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} K_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \frac{\alpha b e^{-\frac{bd_1}{2}}}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}} I_\nu'\left(\alpha\, e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}$$

ให้ $\gamma = \dfrac{\alpha b}{2\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}}$ สามารถเขียนได้เป็น C ได้เป็น

$$C = -D\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)} \tag{4-35}$$

จากสมการ (4-32) และ (4-35) จะได้ว่า

$$\frac{-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}+D\left(\frac{\alpha b}{2}K_{\nu-1}(\alpha)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)} = -D\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|} + D\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)$$
$$= -D\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}$$
$$= -D\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)} - D\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)$$

$$-i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}$$
$$= -D\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left[\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}\right]$$

$$D = \frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

แทน D ในสมการ (4-35) จะได้ว่า

$$C = -\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}$$

$$\times\frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

$$C = -\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

แทน C และ D ลงในสมการ (4-29) จะได้

$$-\frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda}+A$$

$$= -\frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}I_\nu(\alpha)$$

$$+\frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}K_\nu(\alpha)$$

$$A = \frac{i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}}{2\lambda}$$
$$- \frac{\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)} I_\nu(\alpha)$$
$$+ \frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)} K_\nu(\alpha)$$

แทน C และ D ลงในสมการ (4-34) จะได้

$$H = -\frac{\gamma\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right) I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,d_1}}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$
$$+ \frac{\gamma\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) e^{-\frac{bd_1}{2}} e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,d_1}}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

แทน C และ D ลงในสมการ (4-18) จะได้สมการสนามไฟฟ้าใต้ดินชั้นบน คือ

$$\tilde{E}^{g1}(\lambda, z) = \frac{I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$
$$+ \frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

หรือ

$$E^{g1}(r,0)=\int_0^\infty\left[\frac{I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bz}{2}}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right]\lambda J_1(\lambda r)d\lambda$$

สนามไฟฟ้าที่ผิวดินเขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{g1}(\lambda,0)=\frac{I_\nu(\alpha)\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

$$+\frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)K_\nu(\alpha)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}$$

หรือ

$$E^{g1}(\lambda,0)=\int_0^\infty\left[\frac{I_\nu(\alpha)\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)K_\nu(\alpha)}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right]\lambda J_1(\lambda r)d\lambda$$

สมการสนามไฟฟ้าใต้ผิวดินชั้นล่างเขียนได้เป็น

$$\tilde{E}^{g2}(\lambda,z)=\ -\left[\frac{\gamma\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}}e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}d_1}}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}}e^{\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}d_1}}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right]e^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z}$$

$$\tilde{E}^{g2}(\lambda,z)=\ -\left[\frac{\gamma\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}}}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma\left(i\omega\mu_0 aI(\omega)J_1(\lambda a)e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)e^{-\frac{bd_1}{2}}}{\left(\frac{\alpha b}{2}I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}K'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)+\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)-\gamma e^{-\frac{bd_1}{2}}I'_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)}\right]e^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z}$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
E^{g2}(r,z) = -\int_0^{\infty} \Bigg[& \frac{\gamma\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\left(i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}\right) I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) e^{-\frac{bd_1}{2}}}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)} \\
& - \frac{\gamma\left(i\omega\mu_0 a I(\omega) J_1(\lambda a) e^{-\lambda|h|}\right)\left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) e^{-\frac{bd_1}{2}}}{\left(\frac{\alpha b}{2} I_{\nu-1}(\alpha)\right)\left(\left(K_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} K_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right) + \left(I_\nu\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right) - \gamma e^{-\frac{bd_1}{2}} I_\nu'\left(\alpha e^{-\frac{bd_1}{2}}\right)\right)\right)} \Bigg] e^{-\sqrt{i\omega\mu\eta+\lambda^2}\,z} \lambda J_1(\lambda r)\, d\lambda
\end{aligned}
$$

การคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ทำได้โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขซึ่งน่าสนใจที่จะได้ดำเนินการต่อไป

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา

วิธีการศึกษาทางวิทยาศาสตร์เริ่มจากการที่เรามีความสนใจและสงสัยในสิ่งใดแล้ว จึงได้มีการสังเกต ทดลอง เก็บรวบรวมข้อมูล และนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์ โดยอาศัยวิธีการของคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการสรุปเพื่อตอบข้อสงสัยนั้น ซึ่งสารนิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการศึกษาปรากฏการณ์ ธรรมชาติของสนามไฟฟ้า ด้วยการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ โดยอาศัยสมการของแมกซ์เวลล์ ชนิดโดเมนอิงความถี่ ซึ่งเป็นระบบสมการเวกเตอร์ใน 3 มิติ ที่แสดงความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ในการแก้สมการเวกเตอร์ทำได้ยาก จึงได้ใช้วิธีการเปลี่ยนสมการเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปสมการสเกลาร์ โดยแยกองค์ประกอบของสมการเวกเตอร์ออกมาพิจารณา ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าและตัวแปรที่เกี่ยวข้องในรูปของสมการสเกลาร์

จากการศึกษาครั้งนี้ได้เสนอวิธีการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ โดยตั้งสมมติให้มีเครื่องมือส่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่เหนือผิวดิน และมีเครื่องมือวัดสนามไฟฟ้าอยู่ที่ผิวดินห่างออกไปจากเครื่องมือส่งสนามไฟฟ้าในแนวระดับเป็นระยะ r เมตร กำหนดระยะทางลงไปในแนวดิ่งลึกลงไปใต้พื้นดินเป็น z เมตร กำหนดให้ใต้พื้นดินมีสภาพนำไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ z คือ $\sigma(r,z)$ ในการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์นี้สนใจบริเวณใต้พื้นดินที่มีเครื่องรับ – ส่ง สนามแม่เหล็กไฟฟ้า โดยจำลองโครงสร้างของพื้นโลกแบ่งออกเป็นชั้นๆ โดยที่รอยต่อระหว่างชั้นมีลักษณะเป็นระนาบขนานกับพื้นผิวโลกและในแต่ละชั้นมีความลึกจำกัด ยกเว้นชั้นล่างสุด ซึ่งมีความลึกเป็นอนันต์

ในสารนิพนธ์นี้ได้แบ่งแบบจำลองเชิงเรขาคณิตออกเป็น 2 ชนิด คือแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างใต้พื้นโลกชั้นเดียวมีสภาพนำไฟฟ้าแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลังและแบบจำลองเชิงเรขาคณิตของโครงสร้างพื้นโลกมี 2 ชั้น ชั้นบนมีสภาพนำไฟฟ้าแบบฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และชั้นล่างมีสภาพนำไฟฟ้าคงตัว การหาสนามไฟฟ้าในอากาศ สนามไฟฟ้าใต้ผิวดินของแบบจำลองเชิงเรขาคณิตทั้ง 2 ชนิด ทำได้ด้วยวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้การแปลงฮังเคิล แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดา ซึ่งหาคำตอบได้โดยใช้สมการลักษณะเฉพาะ

สนามไฟฟ้าที่ได้เป็นฟังก์ชันที่สามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขขั้นสูง และไม่อาจใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ที่มีในปัจจุบันคำนวณได้ ด้วยความซับซ้อนของปริพัทธ์ จึงอาจกล่าวได้ว่าเป็นงานที่ท้าทายอีกชิ้นที่จะทำต่อไปในอนาคต

บรรณานุกรม

[1] Andrews, L. C. , Special Functions of Mathematics for Engineers , McGraw-Hill , Inc., 1992 , Second Edition , 479 pp.

[2] Chen, J. and Oldenburg, D.W. "Magnetic and electrical fields of direct currents in a layered earth." Submitted to Geophysics, 2003.

[3] Chumchob, N. "Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular cylinder body embedded in a conducting half-space" M. Sc. Thesis, Silpakorn University, 2000.

[4] Davie B. , Integral Transforms and Their Applications , Springer - Verlag , Inc , New York, 1978, 411 pp.

[5] Edwards, R. N. and Nabighian, M. N. "The magnetometric resistivity method." Soc. Expl.Geophys., 1991.

[6] Ketchanwit, P. "Time domain electromagnetic response in heterogeneous media." M. Sc. Thesis, Silpakorn University, 2001.

[7] Raghuwanshi, S. S. and Singh, B. "Resistivity sounding on a horizontally stratified multilayered earth." Geophysical Prospecting, 34 (1986) : 409-423.

[8] Siew, P. F. and Yooyuanyong, S. "The electromagnetic response of a disk beneath an exponentially varying conductive overburden." J. Australian Mathematical Society., Series B, 41 (2000) : E1-E28.

[9] Sripunya, W. "Magnetic field of direct current in homogeneous media." M. Sc. Thesis, Silpakorn University, 2005.

[10] Stoyer, C. H. and Wait, J. R. "Resistivity probing of an exponential earth with a homogeneous overburden." Geophysics, 15 (1977) : 11-18.

[11] Veitch, D. M. W. and Leeuwen, E. H. "Electrical and magnetometric field in layered earth containing buried electrodes." Geophysics, 55 (1990) :1605-1612.

[12] Yooyuanyong, S. and Chumchob, N. "Mathematical modeling of electromagnetic sounding for a conductive 3-D circular body embedded in half-space." Proceedings of the Third Asian Mathematical Conference 2000 : 590-603.

[13] Yooyuanyong, S. and Sripanya, W. “Mathematical modeling of Magnetometric Resistivity Sounding Earth Structures.” Thai Journal of Mathematics, Volume 3(2005), Number 2, December 2005: 249-258.

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \ldots + b_n(x)y = R(x)$$

เมื่อ $b_0(x)y^n, b_1(x)y^{n-1}, \ldots, b_n(x)y, R(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น มีชื่อเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีอันดับ n

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีอันดับ n ต่อไปนี้

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \ldots + b_n(x)y = R(x) \qquad (\text{ก-1})$$

เมื่อ $b_0(x)y^n, b_1(x)y^{n-1}, \ldots, b_n(x)y, R(x)$ เป็นโพลีโนเมียล กล่าวว่า $x = x_0$ เป็นจุดสามัญของสมการ (ก-1) ถ้า $b_0(x_0) \neq 0$ จุดเอกฐานของสมการ (ก-1) คือ จุด $x = x_1$ ใดๆ ซึ่ง $b_0(x_0) = 0$

กำหนดให้ $x = x_0$ $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0 \qquad (\text{ก-2})$$

เมื่อเขียน (ก-2) เสียใหม่ดังนี้

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (\text{ก-3})$$

โดยที่ $p(x)$ กับ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะซึ่งเศษและส่วนไม่มีแฟกเตอร์ร่วมกัน ถ้าโพลีโนเมียลที่เป็นส่วนของ $p(x)$ ไม่มีแฟกเตอร์ $(x = x_0)$ ที่มีกำลังเกินหนึ่งและโพลีโนเมียลที่เป็นส่วนของ $q(x)$ ไม่มีแฟกเตอร์ $(x = x_0)$ ที่มีกำลังเกินสอง แล้วจะกล่าวว่า $x = x_0$ เป็นจุดเอกฐานปกติ ของสมการ (ก-2) เรียกจุดเอกฐานที่ไม่เป็นจุดเอกฐานปกติว่า จุดเอกฐานไม่ปกติ

บทนิยาม สมการเบสเซลที่มีอันดับ n คือ สมการเชิงอนุพันธ์รูปต่อไปนี้

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (\text{ก-4})$$

เห็นได้ว่า $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (ก-4) ดังนั้นสมการนี้จะมีคำตอบอยู่ในรูปของ

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, x^{j+c} \qquad (ก\text{-}5)$$

เช่นเดียวกันเมื่อแทนค่า y ของสมการ (ก-5) ในสมการ (ก-4) จะได้

$$x^2 \sum_{j=0}^{\infty} (j+c)(j+c-1)\, a_j \, x^{j+c-2} + x \sum_{j=0}^{\infty} (j+c)\, a_j \, x^{j+c-1} + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c} - n^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+c)(j+c-1)\, a_j \, x^{j+c} + \sum_{j=0}^{\infty} (j+c)\, a_j \, x^{j+c} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+c+2} - \sum_{j=0}^{\infty} n^2 a_j x^{j+c} = 0$$

และเมื่อรวมเทอมของ x กำลังเท่ากันไว้ด้วยกัน จะได้

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+c)(j+c-1) a_j + (j+c) a_j + a_{j-2} - n^2 a_j \right] x^{j+c} = 0$$

หรือ $$\sum_{j=0}^{\infty} \left[\left\{ (j+c)^2 - n^2 \right\} a_j + a_{j-2} \right] x^{j+c} = 0$$

และเมื่อตั้งให้สัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่างๆ เท่ากับ ศูนย์ จะได้

$$\left[(j+c)^2 - n^2 \right] a_j + a_{j-2} = 0 \qquad (ก\text{-}6)$$

เมื่อแทนค่า $j = 0$ ในสมการ (ก-6) และภายใต้เงื่อนไขว่า $a_{j-2} = 0$ แต่ $a_0 \neq 0$ จะได้ว่า

$$c^2 - n^2 = 0 \qquad (ก\text{-}7)$$

เป็นสมการอินดิเชียล ซึ่งจะได้รากคือ $c = \pm n$ จะแยกพิจารณาค่า c เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 เมื่อ $c = n, n \geq 0$ และกรณีที่ 2 เมื่อ $c = -n, n < 0$

กรณีที่ 1 จากสมการ (ก-6) เมื่อ แทน c = n จะได้ค่าของสัมประสิทธิ์ a_j ดังนี้

$$a_j = -\frac{1}{j(2n+j)} a_{j-2} \qquad (ก\text{-}8)$$

เมื่อ แทนค่า $j=1$ ในสมการ (ก-8)จะได้ $a_1=0$ ทั้งนี้เนื่องจาก $a_{-1}=0$ นอกจากนี้ $a_3=0$, $a_5=0$, $a_7=0$ นั่นคือ $a_k=0$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มคี่ เมื่อแทนค่า $j=2\,,4\,,6\,,\ldots$ จะได้

$$a_2=\frac{-a_0}{2(2n+2)}$$
$$a_4=\frac{-a_2}{4(2n+4)}=\frac{a_0}{2.4.(2n+2)(2n+4)}$$
$$a_6=\frac{-a_4}{6(2n+6)}=\frac{-a_0}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ a_j ในสมการ (ก-5) จะได้ว่า

$$y=a_0x^n\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\right]$$

$$y=a_0x^n\left[1-\frac{x^2}{2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2^4.1.2(n+1)(n+2)}-\frac{x^6}{2^6.1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]$$

$$y=a_0x^n\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(n+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!(n+1)(n+2)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right] \qquad (\text{ก-9})$$

ถ้าให้ $a_0=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ แล้วสมการ (ก-9) กลายเป็น

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^n\left[\frac{1}{\Gamma(n+1)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!\Gamma(n+2)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\Gamma(n+3)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\Gamma(n+4)}+\ldots\right] \qquad (\text{ก-10})$$

จะเขียนแทน ขวามือของสมการ (ก-10) โดย $J_n(x)$ ซึ่งจะเป็นคำตอบของสมการ (ก-4) สำหรับทุก $n\geq 0$

นั่นคือ $$J_n(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n}k!\Gamma(k+n+1)}$$

กรณีที่ 2 กรณีนี้จะได้คำตอบหนึ่งของสมการ (ก-4) เขียนแทนโดย $J_{-n}(x)$ โดยการแทนค่า $n = -n$ ในสมการ (ก-10) ดังนี้

$$J_{-n} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2}}{1!\Gamma(-n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+4}}{2!\Gamma(-n+3)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+6}}{3!\Gamma(-n+4)} + \ldots$$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติของ $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$

ถ้า n เป็นค่าบวกที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $J_{-n}(x)$ และ $J_n(x)$ เป็นคำตอบที่เป็นอิสระกัน ซึ่งทำให้ได้ $y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x)$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ (ก-4)

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มแล้ว $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ โดยทั่วไปเมื่อ n ไม่เป็นจำนวนเต็ม เราหาอีกคำตอบหนึ่งที่เป็นอิสระกับ $J_n(x)$ ได้คือ

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi \; J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \qquad (ก\text{-}11)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้คำตอบอิสระกับ $J_n(x)$ คือ

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{\cos p\pi \; J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \qquad (ก\text{-}12)$$

ซึ่งลิมิตนี้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ และหาค่าของลิมิตได้โดยใช้กฎของโลปิตาล

จะเรียกคำตอบ (ก-12) ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 ของอันดับ n และเรียก $J_n(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 ของอันดับ n

สรุปได้ว่าคำตอบทั่วไปของสมการ (ก-4) คือ

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

ภาคผนวก ข

ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปร

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่มีรูปแบบ

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \left(x^2 + v^2\right)y = 0$$

โดยที่ $v \in \Re$ มีชื่อเรียกว่าสมการเบสเซลดัดแปรอันดับ v (Bessel's equation of order v) และมีคำตอบทั่วไป คือ

$$y = AI_v(x) + BK_v(x)$$

เมื่อ A และ B เป็นตัวคงค่าสำหรับฟังก์ชัน $I_v(x)$ และ $K_v(x)$ กำหนดดังนี้

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+v}}{2^{2k+v}\ k!\Gamma(k+v+1)}$$

และ

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin(v\pi)}$$

โดยทั่วไปเราเรียก $I_v(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 1 อันดับ v (Bessel function of the first kind of order v) และเรียก $K_v(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรชนิดที่ 2 อันดับ v (Bessel function of the second kind of order v)

ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับฟังก์ชันเบสเซลดัดแปร

1. $I_v^{'}(x) = I_{v+1}(x) + \left(\frac{v}{x}\right)I_v(x)$
2. $I_v^{'}(x) = I_{v-1}(x) - \left(\frac{v}{x}\right)I_v(x)$
3. $K_v^{'}(x) = \left(\frac{v}{x}\right)K_v(x) - K_{v+1}(x)$
4. $K_v^{'}(x) = -\left(\frac{v}{x}\right)K_v(x) - K_{v+1}(x)$

ภาคผนวก ค

การแปลงฮังเคิล

บทนิยาม ให้ $I=[0,\infty)$ และ $f:I\rightarrow\Re$ เป็นฟังก์ชันแล้ว การแปลงฮังเคิล (Hankel Transforms) ของฟังก์ชัน f นิยามโดย

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_0^\infty xf(x)J_v(\lambda x)dx \qquad (ค\text{-}1)$$

และ

$$f(x)=\int_0^\infty \lambda\,\tilde{f}(\lambda)J_v(\lambda x)d\lambda \qquad (ค\text{-}2)$$

โดยที่ $J_v(\lambda)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ v (Bessel function of the first kind of order v) และ λ แทน ตัวแปรฮังเคิล (Hankel variable) โดยทั่วไป เราเรียกสมการ (ค-1) ว่า การแปลงฮังเคิล และเรียกสมการ (ค-2) ว่า การแปลงฮังเคิลผกผัน (Inverse Formula for Hankel Transforms)

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณากฎของแอมแปร์

$$H(r,z)=\frac{I}{2\pi r}$$

โดยบทนิยามของการแปลงงฮังเคิลจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\lambda,z)&=\int_0^\infty rH(r,z)J_1(\lambda r)dr\\&=\int_0^\infty r\left(\frac{I}{2\pi r}\right)J_1(\lambda r)dr\\&=\frac{I}{2\pi\lambda}\end{aligned}$$

เมื่อ J_1 แทน ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ 1

ในทางกลับกัน โดยบทนิยามของการแปลงฮังเคิลผกผัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}H(r,z)&=\int_0^\infty \lambda\tilde{H}(\lambda,z)J_1(\lambda r)dr\\&=\int_0^\infty \lambda\left(\frac{I}{2\pi\lambda}\right)J_1(\lambda r)dr\\&=\frac{I}{2\pi r}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้การแปลงฮังเคิลเพื่อหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E \;+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=0$$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{1}{r^2}E \;+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)J_1(\lambda r)dr=\int_0^\infty r(0)J_1(\lambda r)dr$$

$$\int_0^\infty \left(r\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{\partial E}{\partial r}\right)J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E\;\;J_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)\right]J_1(\lambda r)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}EJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$r\frac{\partial E}{\partial r}J_1(\lambda r)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty r\frac{\partial E}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}EJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$-\int_0^\infty r\frac{\partial E}{\partial r}\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}EJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$rE\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\Big]_0^\infty-\int_0^\infty E\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}EJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\int_0^\infty E^a\left(r\frac{d^2}{dr^2}(J_1(\lambda r))+\frac{d}{dr}(J_1(\lambda r))\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^aJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\int_0^\infty \left(r\lambda^2E^aJ_1''(\lambda r)+\lambda E^aJ_1'(\lambda r)\right)dr-\int_0^\infty \frac{1}{r}E^aJ_1(\lambda r)dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0$$

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2J_1''(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1'(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)\right)rE^a dr+\int_0^\infty r\frac{\partial^2 E^a}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0 \qquad (ค\text{-}3)$$

เมื่อ $$\lambda^2 J_1^{''}(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1^{'}(\lambda r)-\left(1-\frac{1}{r^2}\right)J_1(\lambda r)=0$$

ดังนั้นจะได้ $$-J_1(\lambda r)=\lambda^2 J_1^{''}(\lambda r)+\frac{\lambda}{\lambda r}J_1^{'}(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r)$$

หรือ $$-\lambda^2 J_1(\lambda r)=\lambda^2 J_1^{''}(\lambda r)+\frac{\lambda}{r}J_1^{'}(\lambda r)-\frac{1}{r^2}J_1(\lambda r) \qquad (ค\text{-}4)$$

แทนสมการ (ค-4) ในสมการ (ค-3) จะได้

$$-\lambda^2\int_0^{\infty} rEJ_1(\lambda r)dr+\int_0^{\infty} r\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}J_1(\lambda r)dr=0 \qquad (ค\text{-}5)$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (ค-5) ได้เป็น

$$\frac{\partial^2\tilde{E}}{\partial z^2}-\lambda^2\tilde{E}=0$$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ - สกุล	นางสุดาพร พาระพัฒน์
ที่อยู่	285/4 ถ.หลังศูนย์ราชการ ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น 40000
ที่ทำงาน	โรงเรียนบ้านทัพพระยา ตำบลห้วยกระเจา อำเภอห้วยกระเจา จังหวัดกาญจนบุรี 71170
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2539	สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2545	ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์ อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2540	ครูสอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนมิตรพลพณิชยการ กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2541	ครูสอนคณิตศาสตร์ แผนกคณิตศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตขอนแก่น
พ.ศ. 2547	อาจารย์ 1 โรงเรียนบ้านทัพพระยา ตำบลห้วยกระเจา อำเภอห้วยกระเจา จังหวัดกาญจนบุรี
พ.ศ. 2547	ครู คศ.1 โรงเรียนบ้านทัพพระยา ตำบลห้วยกระเจา อำเภอห้วยกระเจา จังหวัดกาญจนบุรี
พ.ศ. 2548	หัวหน้าสาระคณิตศาสตร์ ระดับ ช่วงชั้นที่ 1-3 โรงเรียนบ้านทัพพระยา ตำบลห้วยกระเจา อำเภอห้วยกระเจา จังหวัดกาญจนบุรี